ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Aleksander LEWICKI

# NIELINIOWE FIZYKALNE PROBLEMY TERMOSPRĘŻYSTOŚCI OŚRODKÓW OBROTOWYCH
# II. ZASADY WARIACYJNE

Streszczenie. W artykule sformułowano zasady wariacyjne: Hu-Washizu, Reissnera, Lagrange'a dla fizykalnie nieliniowego, termosprężystego ośrodka obrotowego.

## 1. Wstęp

Prawa rządzące deformacją ośrodków sprężystych mogą być przedstawione w postaci zasad wariacyjnych. Z odpowiednio ogólnie sformułowanych zasad można uzyskać wszystkie podstawowe równania teorii sprężystości, tj.: równania strony geometrycznej i fizycznej, równania równowagi, związki nierozdzielności, a także warunki brzegowe. Dzięki temu problem określenia stanu naprężenia i odkształcenia ośrodka sprężystego może być sprowadzony do rozwiązania odpowiedniego zadania wariacyjnego. Występujące w tych zadaniach funkcjonały mają w mechanice ośrodków ciągłych odpowiednią interpretację fizyczną.

Sformułujemy kolejno wariacyjne zasady: Hu-Washizu, Reissnera i Lagrange'a. Formułując zasady wariacyjne mamy głównie na uwadze ich sens geometryczno-fizyczny, a nie aspekt matematyczny.

Rozpatrzmy ośrodek sprężysty, zajmujący obszar osiowo-symetryczny V, który znajduje się w równowadze. Przyjmujemy, że obszar ten jest ograniczony brzegiem $\partial\mathcal{V} = \partial\tilde{\mathcal{V}} \cup \partial\hat{\mathcal{V}}$ gdzie $\partial\hat{\mathcal{V}} \cap \partial\tilde{\mathcal{V}} = \phi$. Ośrodek jest poddany działaniu ustalonych pól sił masowych i powierzchniowych oraz pola temperatur.

Zadajemy kolejno następujące warunki brzegowe, przemieszczeniowe i naprężeniowe:

$$u_r(x) = \tilde{u}_r, \qquad u_\varphi(x) = \tilde{u}_\varphi, \qquad u_z(x) = \tilde{u}_z, \qquad x \in \partial\tilde{\mathcal{V}}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_r(x) &= \sigma_{rr}n_r + \sigma_{r\varphi}n_\varphi + \sigma_{rz}n_z = \hat{\mathfrak{X}}_r, \\ \mathfrak{X}_\varphi(x) &= \sigma_{\varphi r}n_r + \sigma_{\varphi\varphi}n_\varphi + \sigma_{\varphi z}n_z = \hat{\mathfrak{X}}, \\ \mathfrak{X}_z(x) &= \sigma_{zr}n_r + \sigma_{z\varphi}n_\varphi + \sigma_{zz}n_z = \hat{\mathfrak{X}}_z, \qquad x \in \partial\hat{\mathcal{V}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

## 2. Zasada Hu-Washizu

Podstawowy funkcjonał tej zasady, por. [4], oznaczony tutaj przez I, można uzyskać z funkcjonału określającego pełną energię potencjalną oraz przez wprowadzenie przemieszczeniowych warunków brzegowych, a także przez uwzględnienie równań strony geometrycznej; rolę mnożnika Lagrange'a będzie spełniać w tym ostatnim przypadku tensor naprężenia.

Funkcjonał I ma postać:

$$
\begin{aligned}
I = I[\sigma_{ij},\varepsilon_{ij},u_i] &= \int_{\mathcal{V}} F_o\,dx - \int_{\mathcal{V}} (X_r u_r + X_\varphi u_\varphi + X_z u_z)dx - \\
&- \int_{\mathcal{V}} \Big\{ \sigma_{rr}(\varepsilon_{rr} - \frac{\partial u_r}{\partial r}) + \sigma_{\varphi\varphi}\Big[\varepsilon_{\varphi\varphi} - (\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r})\Big] + \sigma_{zz}(\varepsilon_{zz} - \frac{\partial u_z}{\partial z}) + \\
&+ 2\sigma_{r\varphi}\Big[\varepsilon_{r} \;-\frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \quad \frac{u_\varphi}{r})\Big] + 2\sigma_{rz}\Big[\varepsilon_{rz} - \frac{1}{2}(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r})\Big] + \\
&+ 2\sigma_{\varphi z}\Big[\varepsilon_{\varphi z} - \frac{1}{2}(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi})\Big]\Big\}\,dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} (u_r\hat{\mathcal{X}}_r + u_\varphi\hat{\mathcal{X}}_\varphi + u_z\hat{\mathcal{X}}_z)dx - \\
&- \int_{\partial\tilde{\mathcal{V}}} \Big[\mathcal{X}_r(u_r - \tilde{u}_r) + \mathcal{X}_\varphi(u_\varphi - \tilde{u}_\varphi) + \mathcal{X}_z(u_z - \tilde{u}_z)\Big]dx.
\end{aligned}
$$

Obliczmy wariację funkcjonału I, traktując przyrosty wirtualne $\delta\varepsilon_{ij}$, $\delta\sigma_{ij}$, $\delta u_i$ $(i,j = r,\varphi,z)$ jako wzajemnie niezależne. Na brzegu $\partial\hat{\mathcal{V}}$ – na którym określone są naprężenia – przyjmujemy, że występują przyrosty wirtualne przemieszczeń, a na brzegu $\partial\tilde{\mathcal{V}}$, na którym zadane są przemieszczenia, przyjmujemy, że występują zmiany naprężeń.

Warunkiem koniecznym stacjonarności funkcjonału I jest zerowanie się pierwszej wariacji, czyli

$$
\begin{aligned}
\delta I = 0 = \int_{\mathcal{V}} \Big\{\Big[ &(\frac{\partial F_o}{\partial \varepsilon_{rr}} - \sigma_{rr})\delta\varepsilon_{rr} + (\frac{\partial F_o}{\mathcal{X}_{\varphi\varphi}} - \sigma_{\varphi\varphi}) \qquad + (\frac{\partial F_o}{\partial \varepsilon_{zz}} - \sigma_{zz})\delta\varepsilon_{zz} + \\
&+ 2(\frac{\partial F_o}{\partial \varepsilon_{r\varphi}} - \sigma_{r\varphi})\delta\varepsilon_{r\varphi} + 2(\frac{\partial F_o}{\partial \varepsilon_{rz}} - \sigma_{rz})\delta\varepsilon_{rz} + 2(\frac{\partial F_o}{\partial \varepsilon_{\varphi z}} - \sigma_{\varphi z})\delta\varepsilon_{\varphi z}\Big] - \\
&- \Big[(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + X_r)\delta u_r + (\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \\
&+ \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + X_\varphi)\delta u_\varphi + (\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + X_z)\delta u_z\Big] - \\
&- \Big[(\varepsilon_{rr} - \frac{\partial u_r}{\partial r})\delta\sigma_{rr} + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - (\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}))\delta\sigma_{\varphi\varphi} + (\varepsilon_{zz} - \frac{\partial u_z}{\partial z})\delta\sigma_{zz} +
\end{aligned}
$$

$$+ 2\left(\varepsilon_{r\varphi} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right)\right)\delta\sigma_{r\varphi} + 2\left(\varepsilon_{rz} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right)\delta\sigma_{rz} +$$

$$+ 2\left(\varepsilon_{\varphi z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right)\right)\Big]\Big\} - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} [(\hat{\mathcal{X}}_r - \mathcal{X}_r)\delta u_r + (\hat{\mathcal{X}}_\varphi - \mathcal{X}_\varphi)\delta u_\varphi +$$

$$+ (\hat{\mathcal{X}}_z - \mathcal{X}_z)\delta u_z]dx - \int_{\partial\tilde{\mathcal{V}}} [(u_r - \tilde{u}_r)\delta\mathcal{X}_r + (u_\varphi - \tilde{u}_\varphi)\delta\mathcal{X}_\varphi + (\tilde{u}_z - u_z)\delta\mathcal{X}_z]dx,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{X}_r &= \delta\sigma_{rr}n_r + \delta\sigma_{r\varphi}n_\varphi + \delta\sigma_{rz}n_z, \\ \delta\mathcal{X}_\varphi &= \delta\sigma_{\varphi r}n_r + \delta\sigma_{\varphi\varphi}n_\varphi + \delta\sigma_{\varphi z}n_z, \\ \delta\mathcal{X}_z &= \delta\sigma_{zr}n_r + \delta\sigma_{z\varphi}n_\varphi + \delta\sigma_{zz}n_z. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ponieważ wariacje $\delta\varepsilon_{rr}$, $\delta\varepsilon_{r\varphi}$, $\delta\varepsilon_{rz}$, $\delta\varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\delta\varepsilon_{\varphi z}$, $\delta\varepsilon_{zz}$, $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\sigma_{r\varphi}$, $\delta\sigma_{rz}$, $\delta\sigma_{\varphi\varphi}$, $\delta\sigma_{\varphi z}$, $\delta\sigma_{zz}$, $\delta u_r$, $\delta u_\varphi$, $\delta u_z$ są niezależne, więc ze wzoru (2.2) otrzymujemy następujące równania interesującego nas problemu wariacyjnego:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_o}{\partial\varepsilon_{rr}} = \sigma_{rr}, \quad \frac{\partial F_o}{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}} = \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \frac{\partial F_o}{\partial\varepsilon_{zz}} = \sigma_{zz}, \\ &\frac{\partial F_o}{\partial\varepsilon_{rz}} = \sigma_{rz}, \quad \frac{\partial F_o}{\partial\varepsilon_{r\varphi}} = \sigma_{r\varphi}, \quad \frac{\partial F_o}{\partial\varepsilon_{\varphi z}} = \sigma_{\varphi z}, \qquad x \in \mathcal{V} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Otrzymaliśmy równania strony fizycznej.

Przyrównując do zera współczynniki przy wariacji przemieszczenia, otrzymamy równania równowagi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + X_r = 0, \\ &\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + X_\varphi = 0, \\ &\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + X_z = 0, \qquad x \in \mathcal{V} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Przyrównując następnie do zera współczynniki przy wariacji składowych stanu naprężenia uzyskujemy związki między przemieszczeniami i odkształceniami

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad x \in \mathcal{V}$$

Kolejne równania to naprężeniowe i przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_r = \hat{\mathfrak{X}}_r, \quad \mathfrak{X}_\varphi = \hat{\mathfrak{X}}_\varphi, \quad \mathfrak{X}_z = \hat{\mathfrak{X}}_z, \qquad x \in \partial\hat{\mathcal{V}} \\ &u_r = \tilde{u}_r, \quad u_\varphi = \tilde{u}_\varphi, \quad u_z = \tilde{u}_z, \qquad x \in \partial\tilde{\mathcal{V}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Zasada ta nie jest zasadą ekstremalną a rozwiązanie zadania wairacyjnego przedstawia punkt siodłowy funkcjonału.

## 3. Zasada Reissnera

Funkcjonał tej zasady uzyskamy przekształcając funkcjonał I zasady Hu-Washizu. Uwzględniając że

$$\begin{aligned} F_o = \hat{G} + \sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{r\varphi}\varepsilon_{r\varphi} + \\ + 2\sigma_{rz}\varepsilon_{rz} + 2\sigma_{\varphi z}\varepsilon_{\varphi z}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

a także przyjmując stronę geometryczną zagadnienia w znanej postaci (rów. (2.5)) możemy napisać:

$$\begin{aligned} I = I[\sigma_{ij}, u_i] = \int_{\mathcal{V}} [\hat{G} - (X_r u_r + X_\varphi u_\varphi + X_z u_z) + (\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \\ + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{r\varphi}\varepsilon_{r\psi} + 2\sigma_{rz}\varepsilon_{rz} + 2\sigma_{\varphi z}\varepsilon_{\varphi z})]\,dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} (\mathfrak{X}_r u_r + \mathfrak{X}_\varphi u_\varphi + \\ + \mathfrak{X}_z u_z)\,dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} [\mathfrak{X}_r(u_r - \hat{u}_r) + \mathfrak{X}_\varphi(u_\varphi - \tilde{u}_\varphi) + \mathfrak{X}_z(u_z - \hat{u}_z)]\,dx \end{aligned} \tag{3.2}$$

W (3.2) przyjęto oznaczenia:

$\hat{G}$ - potencjał termodynamiczny Gibbsa określony równaniem

$$\begin{aligned} -\hat{G} = G'(1 - \hat{a})(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{r\varphi}^2 + 2\sigma_{rz}^2 + 2\sigma_{\varphi z}^2) + \\ + \frac{\lambda'}{2}(1 - \hat{b})(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})^2 + \alpha_T \cdot \Theta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}); \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\hat{a}$ - funkcja intensywności naprężeń;

$\hat{b}$ - funkcja średniego naprężenia normalnego, por. [3].

Funkcjonał tej zasady również nie jest funkcjonałem ekstremalnym, a warunek stacjonarności $\delta I = 0$ wyznacza punkt siodłowy funkcjonału Reissnera. Jednakże rozważania dotyczące własności tego funkcjonału, np.: dla ustalonych wartości tensora naprężenia lub odkształcenia mogę doprowadzić do twierdzeń ekstremalnych. Przyjmujemy, że tensor naprężenia $\sigma_{ij}$, wektor przemieszczenia $u_i$, $(i,j = r,\varphi,z)$ są niezależnymi funkcjami. Obliczając pierwszą wariację funkcjonału i przyrównując otrzymany rezultat do zera uzyskamy:

$$
\begin{aligned}
\delta I = 0 = \int_{V} \Bigg\{ \Bigg[ & \Big(\varepsilon_{rr} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \sigma_{rr}}\Big)\delta\sigma_{rr} + \Big(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}\Big)\delta\sigma_{\varphi\varphi} + \\
& + \Big(\varepsilon_{zz} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \sigma_{zz}}\Big)\delta\sigma_{zz} + 2\Big(\varepsilon_{r\varphi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \sigma_{r\varphi}}\Big)\delta\sigma_{r\varphi} + 2\Big(\varepsilon_{rz} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \sigma_{rz}}\Big)\delta\sigma_{rz} + \\
& + 2\Big(\varepsilon_{\varphi z} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \sigma_{\varphi z}}\Big)\delta\sigma_{\varphi z}\Bigg] - \Bigg[\Big(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + X_r\Big) \\
& \cdot \delta u_r + \Big(\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + X_\varphi\Big)\delta u_\varphi + \Big(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + X_z\Big)\delta u_z\Bigg]\Bigg\} dx + \int_{\partial \hat{V}} \Big[(\mathcal{X}_r - \hat{\mathcal{X}}_r)\delta u_r + (\mathcal{X}_\varphi - \hat{\mathcal{X}}_\varphi)\delta u_\varphi + \\
& + (\mathcal{X}_z - \hat{\mathcal{X}}_z)\delta u_z\Big] dx - \int_{\partial \tilde{V}} \Big[(u_r - \tilde{u}_r)\delta\mathcal{X}_r + (u_\varphi - \tilde{u}_\varphi)\delta\mathcal{X}_\varphi + (u_z - \tilde{u}_z)\delta\mathcal{X}_z\Big] dx.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Element objętości $dx = r dr d\varphi dz$. Ponieważ wariacje $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\sigma_{\varphi\varphi}$, $\delta\sigma_{zz}$, $\delta\sigma_{r\varphi}$, $\delta\sigma_{rz}$, $\delta\sigma_{\varphi z}$, $\delta u_r$, $\delta u_\varphi$, $\delta u_z$ są niezależne, przeto ze wzoru (3.4) otrzymamy równanie Eulera problemu wariacyjnego. Przyrównując do zera współczynniki przy wariacji współrzędnych naprężeń i przemieszczeń uzyskamy kolejno: związki strony fizycznej (równania konstytutywne w drugiej postaci), równania strony statycznej oraz warunki brzegowe na $\partial\tilde{V}$ i $\partial\hat{V}$. Treść zasady Reissnera wyraża twierdzenie: ze wszystkich współrzędnych tensora stanu naprężenia $\sigma_{ij}$ i wektora przemieszczenia $u_i$ tylko te nadają stacjonarną wartość funkcjonałowi Reissnera $I[\sigma_{ij}, u_i]$, które spełniają równania równowagi, równania konstytutywne i warunki brzegowe na $\partial\tilde{V}$ i $\partial\hat{V}$.

## 4. Zasada całkowitej energii potencjalnej (Lagrange'a)

Przyjmujemy, że spełnione są warunki brzegowe na $\partial\tilde{\mathcal{V}}$, a odkształcenia i przemieszczenia związane są znanymi zależnościami; w tym przypadku funkcjonał I, określony równaniem (2.1), przyjmie postać:

$$I = \int_{\mathcal{V}} F_o dx - \int_{\mathcal{V}} (X_r u_r + X_\varphi u_\varphi + X_z u_z) dx -$$

$$- \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} (\hat{\mathfrak{X}}_r u_r + \hat{\mathfrak{X}}_\varphi u_\varphi + \hat{\mathfrak{X}}_z u_z) dx; \tag{4.1}$$

zapisując (4.1) w postaci zwięzłej otrzymamy:

$$I = \int_{\mathcal{V}} (F_o - X_i u_i) dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{\mathfrak{X}}_i u_i dx \qquad (i = r, \varphi, z). \tag{4.2}$$

Ponieważ

$$F_o = U_o - \gamma^* \Theta(3\varepsilon), \tag{4.3}$$

więc po zastosowaniu w (4.2) przykształcenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymamy, por. [1]:

$$I = \int_{\mathcal{V}} [U_o - (X_i - \frac{1}{h_i} (\gamma^* \Theta)_{,i}) u_i] dx -$$

$$- \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} u_i (\hat{\mathfrak{X}}_i + \gamma^* \Theta n_i) dx. \tag{4.4}$$

Oznaczając

$$X_i^* = X_i - \frac{1}{h_i} (\gamma^* \Theta)_{,i}$$

$$\hat{\mathfrak{X}}_i^* = \hat{\mathfrak{X}}_i + \gamma^* \Theta n_i$$

gdzie $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ stałe Lamego,

otrzymujemy funkcjonał:

$$I = \int_{\mathcal{V}} (U_o - X_i^* u_i) dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{\mathfrak{X}}_i^* u_i dx \qquad (i = r, \varphi, z). \tag{4.5}$$

W układzie współrzędnych walcowych

$$\begin{aligned} X_r^* &= X_r - (\gamma^* \Theta)_{,r}, & \hat{\mathfrak{X}}_r^* &= \hat{\mathfrak{X}}_r + \gamma^* \Theta n_r, \\ X_\varphi^* &= X_\varphi - \frac{1}{r} (\gamma^* \Theta)_{,\varphi} & \hat{\mathfrak{X}}_\varphi^* &= \hat{\mathfrak{X}}_\varphi + \gamma^* \Theta n_\varphi \\ X_z^* &= X_z - (\gamma^* \Theta)_{,z} & \hat{\mathfrak{X}}_z^* &= \hat{\mathfrak{X}}_z + \gamma^* \Theta n_z \end{aligned} \tag{4.6}$$

Oznaczając $W_o = \int\limits_{\mathcal{V}} U_o dx$ mamy:

$$\delta W_o = \int\limits_{\mathcal{V}} X_i^* \delta u_i dx + \int\limits_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{\mathcal{X}}_i^* \delta u_i dx. \tag{4.7}$$

Wariacja pracy odkształcenia izotermicznego w ośrodku sprężystym ma postać:

$$\delta W_o = \int\limits_{\mathcal{V}} X_i \delta u_i dx + \int\limits_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{\mathcal{X}}_i \delta u_i dx. \tag{4.8}$$

Z porównania (4.7) i (4.8) otrzymujemy następującą analogię sił masowych: przemieszczenia i odkształcenia będą w ośrodku termosprężystym takie same jak w ośrodku sprężystym, jeśli na $\partial\tilde{\mathcal{V}}$ przyłożyć te same przemieszczenia a na $\partial\hat{\mathcal{V}}$ - obciążenia $\mathcal{X}_i^* = \hat{\mathcal{X}}_i + \gamma^* \Theta n_i$, dodatkowo należy jako siły masowe przyjęć wielkości $X_i^* = X_i - \frac{1}{h_i}(\gamma^* \Theta)_{,i}$.

Przyrównując do zera wariację funkcjonału (4.1) otrzymujemy równania równowagi i warunki brzegowe na $\partial\hat{\mathcal{V}}$. Funkcjonał I (przy pewnych dodatkowych założeniach) osiąga minimum. Porównując energię potencjalną dla pola przemieszczenia $u_i$ oraz enerię potencjalną dla pola przemieszczenia $u_i + \delta u_i$ otrzymamy:

$$I'[u_i + \delta u_i] - I[u_i] = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} dx \quad (i,j,k,l = r,\varphi,z) \tag{4.9}$$

Jeśli $I' - I \geqslant 0$, to w rozpatrywanym przypadku fumkcjonał będzie osiągać minimum. Wykorzystując równania Kauderara po szeregu przekształceniach otrzymamy:

$$I' - I = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{V}} \Big\{ 2G\Big[1 - (\chi + 2e \frac{d\chi}{de})\Big] \delta e_{kl} \delta e_{kl} +$$

$$+ K[1 - (\varphi + \varepsilon \frac{d\varphi}{d\varepsilon})] \delta\varepsilon_{ii} \delta\varepsilon_{u} \Big\} dx. \tag{4.10}$$

Jeżeli więc funkcje $\chi$ i $\varphi$ spełniają nierówności,

$$\chi + 2e \frac{d\chi}{de} < 1 \qquad i \qquad \varphi + \varepsilon \frac{d\varphi}{d\varepsilon} < 1, \tag{4.11}$$

to

$$I' - I = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} dx > 0, \tag{4.12}$$

co gwarantuje absolutne minimum funkcjonału I.

Warunki (4.11) zastąpimy równoważnymi

$$\begin{aligned} & 1 - \chi(e) + \varepsilon_{(i)} \frac{d(1-\chi)}{d\varepsilon_{(i)}} > 0 \\ & 1 - \varphi(\varepsilon) + \varepsilon \frac{d(1-\varphi)}{d\varepsilon} > 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Nierówności (4.13), uzyskane przez nas dla termosprężystego ośrodka fizykalnie nieliniowego, są identyczne jak dla ośrodka sprężystego fizykalnie nieliniowego, por. [2]. Treść zasady całkowitej energii potencjalnej zapiszemy w postaci twierdzenia: ze wszystkich pól przemieszczeń ośrodka, określonych funkcjami materiałowymi spełniającymi (4.13) tylko przemieszczenia spełniające warunki równowagi i zadane naprężeniowe warunki brzegowe - wyrażone w przemieszczeniach - nadają energii potencjalnej wartość minimalną.

Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej i jego wariację można wyrazić poprzez przemieszczenia w postaci:

$$\begin{aligned} I = & -\frac{1}{2}\int A_{ik} \circ u_k u_i dx - \int_{\gamma} (X_i - \frac{1}{h_i}(\gamma^*\Theta)_{,i}) u_i dx + \\ & + \frac{1}{2}\int_{\partial\gamma} B_{ik} \circ u_k u_i dx - \int_{\partial\gamma} (\hat{\mathscr{X}}_i + \gamma^*\Theta n_i) u_i dx \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \delta I = & -\int_{\gamma} N_{ik} \circ u_k \delta u_i dx - \int_{\gamma} (X_i - \frac{1}{h_i}(\gamma^*\Theta)_{,i}) \delta u_i dx + \\ & + \int_{\partial\gamma} M_{ik} \circ u_k \delta u_i dx - \int_{\partial\hat{\gamma}} (\hat{\mathscr{X}}_i + \gamma^*\Theta n_i) \delta u_i dx = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$(i,k = r, \varphi, z).$$

Postaci operatorów $A_{ik}$, $B_{ik}$, $N_{ik}$, $M_{ik}$ podano w części dotyczącej równań przemieszczeniowych. Zasada wariacyjna energii dopełniającej dla fizykalnie nieliniowych termosprężystych ośrodków obrotowych została sformułowana w [3].

## LITERATURA


[1] BORKOWSKI Sz.: Dynamical equation of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 9, 24 (1976), [655]-[661].

[2] KAUDERER H.: Nichtlineare Mechanik, Springer-Verlag, Ber.-Gott.-Heild., 1958.

[3] LEWICKI A.: Nieliniowe fizykalnie problemy termosprężystości ośrodków obrotowych (praca magisterska), Gliwice 1980, maszynopis 99 str.

[4] WASHIZU K.: Variational methods in elasticity and plasticity,Pergamon Press 1974.

ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СРЕД.
II. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

Р е з ю м е

В работе представлено вариационные принципы Вашицу, Рейснера и Лагранжа для физически нелинейной термоупругой вращательной среды.

PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF THERMOELASTICITY
OF ROTATIONAL MEDIA
II. VARIATIONAL PRINCIPLES

S u m m a r y

Variational principles of Hu-Washizu, Reissner and Lagrange for physically nonlinear thermoelastic rotational medium are derived.

Wpłynęło do Redakcji 18.VII.1980 r. Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski