ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Aleksander LEWICKI

RÓWNANIA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DLA FIZYKALNIE NIELINIOWYCH, TERMOSPRĘŻYSTYCH OŚRODKÓW OBROTOWYCH

Streszczenie. Dla rozpatrywanych ośrodków przedstawiono ogólne wzory metody elementów skończonych oraz ich postać dla stanu osiowosymetrycznego.

1. Wstęp

Metoda elementów skończonych, będąca jedną z najważniejszych metod numerycznych mechaniki ośrodków ciągłych, pozwala zastąpić opis kontinualny przez wprowadzenie procedury aproksymacyjnej opisem dyskretnym. Relacje, jakie w ośrodku są spełnione, zapisuje się w postaci równań macierzowych i w ten sposób problem określenia przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w ośrodku sprowadza się do macierzowej analizy numerycznej. Zakładamy, że ośrodek poddany jest działaniu pól sił masowych X_i, powierzchniowych $\mathcal{X}_i$ oraz pola temperatur Θ.

2. Równania metody

Rozpatrzmy dowolny element skończony "a" powiązany z ośrodkiem w węzłach i,j,...,m. Przemieszczenia węzłów elementu zapiszemy w postaci macierzy kolumnowej

$$\{\delta\}^a = \begin{bmatrix} \delta_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_m \end{bmatrix}$$

Podobnie zapiszemy w postaci macierzy siły F działające w węzłach

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_m \end{Bmatrix}$$

Relacje zachodzęce między siłami i przemieszczeniami - związki charakterystyczne - dla elementów sprężystych mają, por. [3], ogólną postać

$$\{F\}^a = [K]^a \{\delta\}^a + \{F\}^a_x + \{F\}^a_{\varkappa} + \{F\}^a_{\varepsilon_o}, \tag{2.1}$$

gdzie:

$\{F\}^a_x$ - macierz sił węzłowych, równoważęcych działanie sił masowych;

$\{F\}^a_{\varkappa}$ - macierz sił węzłowych, równoważęcych działanie sił powierzchniowych;

$\{F\}^a_{\varepsilon_o}$ - macierz sił węzłowych wywołanych polem temperatury;

$[K]^a$ - macierz sztywności elementu "a".

Podobnie można określić naprężenia w każdym wybranym punkcie elementu - w zależności od przemieszczeń węzłowych;

$$\{\sigma\}^a = [S]^a \{\delta\}^a + \{\sigma\}^a_x + \{\sigma\}^a_{\varkappa} + \{\sigma\}^a_{\varepsilon_o} \tag{2.2}$$

Macierz przemieszczenia węzłów dla całego ośrodka ma postać:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ \delta_n \end{Bmatrix}$$

Zapisując równania równowagi dla wszystkich węzłów otrzymamy:

$$[K]\{\delta\} = \{R\} - \{F\}_x - \{F\}_{\varkappa} - \{F\}_{\varepsilon_o}, \tag{2.3}$$

gdzie

$$[K_{im}] = \sum [K_{im}]^a, \qquad \{F_i\}_x = \sum \{F_i\}^a_x$$

$$\{F_i\}_{\varkappa} = \sum \{F_i\}^a_{\varkappa}, \qquad \{F_i\}_{\varepsilon_o} = \sum \{F_i\}^a_{\varepsilon_o} \tag{2.3'}$$

W powyższych równościach sumowanie obejmuje wszystkie elementy. Przemieszczenia w dowolnym punkcie elementu "a" określimy wektorem kolumnowym

$$\{f\} = [C]\{\delta\}^a = [C_i,\dots,C_m]\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \delta_m\end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

Jeżeli znane są przemieszczenia we wszystkich punktach elementu, to możemy wyznaczyć odkształcenia w dowolnym jego punkcie

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^a \tag{2.5}$$

Dla ośrodka sprężystego związek między naprężeniami i odkształceniami ma postać:

$$\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\}\right) \tag{2.6}$$

$[D]$ - macierz sprężystości,

$\{\varepsilon_o\}$ - odkształcenie wywołane polem temperatury.

Stosując zasadę mimimum energii potencjalnej i wykorzystując równości (2.4), (2.5), (2.6) otrzymujemy, por. [3], ogólne wzory na określenie macierzy sztywności i sił węzłowych pochodzących od sił masowych, powierzchniowych i wpływów termicznych.

$$\begin{aligned}
[K]^a &= \int_{\gamma(a)} [B]^T [D][B]\,dx \\
\{F\}_x^a &= -\int_{\gamma(a)} [C]^T \{X\}\,dx \\
\{F\}_{\varkappa}^a &= -\int_{\partial\gamma(a)} [C]^T \{\varkappa\}\,dx \\
\{F\}_{\varepsilon_o}^a &= -\int_{\gamma(a)} [B]^T [D]\{\varepsilon_o\}\,dx
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Macierz naprężeń elementu ma postać:

$$[S]^a = [D][B] \tag{2.8}$$

Macierz sprężystości można przedstawić w postaci:

$$[D] = [D]^L + [D]^N \tag{2.9}$$

Po wykonaniu całkowania w równościach (2.7) i po uwzględnieniu (2.9) równość (2.3) zapiszemy w postaci, por. [1]:

$$[K]^L\{\delta\} = \{R\} - \{F\}_x - \{F\}_{\varkappa} - \{F\}_{\varepsilon_0} - [K]^N\{\delta\} \tag{2.10}$$

Równość powyższą przyjmujemy jako podstawę procesu iteracyjnego. Przyjmując

$$\overset{(1)}{[K]}{}^N = [0]$$

przebieg procesu iteracyjnego zapiszemy w postaci macierzowego równania rekurencyjnego

$$[K]^L \overset{(n+1)}{\{\delta\}} = \{R\} - \{F\}_x - \{F\}_{\varkappa} - \{F\}_{\varepsilon_0} - \overset{(n)}{[K]}{}^N \overset{(n)}{\{\delta\}} \tag{2.11}$$

Równanie to można interpretować jako równanie liniowe, w którym wraz ze zmianą liczby n zmienia się obciążenie układu. Równość tę stosujemy przy wyznaczaniu macierzy kolumnowej przemieszczeń węzłowych ośrodka.

3. Stan osiowo-symetryczny

W ośrodkach obrotowych, poddanych działaniu osiowo-symetrycznego obciążenia, wystąpią dwie składowe wektora przemieszczenia

$$u_r = u, \qquad u_z = v$$

Obszar przekroju osiowego dzielimy na elementy trójkątne o węzłach i, j, m. Zakładając liniowy rozkład przemieszczeń wewnątrz elementu, por. [2],

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \end{aligned} \tag{3.1}$$

można napisać:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix} = [IC'_i, IC'_j, IC'_m]\{\delta\}^a, \tag{3.2}$$

gdzie

$$C_i' = (a_i + b_i r + c_i z)/2\Delta$$

I - macierz jednostkowa drugiego rzędu

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j, \quad b_i = z_j - z_m, \quad c_i = r_m - r_j;$$

pozostałe współczynniki otrzymuje się przez cykliczne przestawienie indeksów i, j, m, zaś Δ - oznacza tutaj pole elementarnego trójkąta

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{bmatrix}$$

W stanie osiowo-symetrycznym pozostają różne od zera cztery składowe tensora odkształcenia

$$\{\varepsilon\}^a = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

Wprowadzając równość (3.2), otrzymamy:

$$\{\varepsilon\}^a = [B] \{\delta\}^a = [B_i, B_j, B_m] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}$$

gdzie:

$$[B_i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ b_i & 0 \\ \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r} & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Macierz $[B_i]$ nie jest macierzą stałą, odkształcenia ulegają zmianie wewnątrz elementu. Odkształcenia początkowe (termiczne) dla ciała izotropowego mają postać:

$$\{\varepsilon_o\}^a = \begin{Bmatrix} \alpha_T \cdot \Theta^a \\ \alpha_T \cdot \Theta^a \\ \alpha_T \cdot \Theta^a \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Θ^a - średni przyrost temperatury w elementcie.

Tensor naprężenia w elemencie związany jest z tensorem odkształcenia równością

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D]\ \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\} \tag{3.6}$$

Macierz sprężystości dla ośrodka fizykalnie nieliniowego ma postać:

$$[D] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2G^* + \lambda^*, & \lambda^* & \lambda^* & 0 \\ \lambda^* & 2G^* + \lambda^*, & \lambda^* & 0 \\ \lambda^* & \lambda^* & 2G^* + \lambda^*, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^* \end{array}\right] \tag{3.7}$$

Macierz sprężystości łatwo przedstawić w postaci sumy części liniowej i nieliniowej

$$[D] = [D]^L + [D]^N$$

$$[D]^L = \begin{bmatrix} 2G+\lambda, & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda, & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$[D]^N = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -2G_\lambda-\lambda\psi, & -\lambda\psi & -\lambda\psi & 0 \\ -\lambda\psi & -2G_\lambda-\lambda\psi, & -\lambda\psi & 0 \\ -\lambda\psi & -\lambda\psi & -2G_\lambda-\lambda\psi, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_\lambda \end{array}\right] \tag{3.9}$$

Wykorzystując równości (2.7) oraz wykonując całkowanie względem zmiennej znajdujemy:

$$[K]^a = 2\pi \int [B]^T [D] [B] \, r dr dz \tag{3.10}$$

Siły węzłowe, wywołane obciążeniem zewnętrznym i wpływem temperatury - mają postać:

$$\begin{aligned} \{F\}^a_x &= -2\pi \int [C]^T \{X\} r dr dz \\ \{F\}^a_{\varkappa} &= -2\pi \int [C]^T \{\varkappa\} r dl \\ \{F\}^a_{\varepsilon_0} &= -2\pi \int [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} r dr dz \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dla wyznaczenia powyższych macierzy należy przeprowadzić całkowanie numeryczne. Najprostsze przybliżone postępowanie polega na wyznaczeniu macierzy dla środka ciężkości elementu

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_m}{3}, \quad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_m}{3}$$

W tym przypadku jako pierwsze przybliżenie równości (3.10) otrzymujemy:

$$[K]^a = 2\bar{\pi}[\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \, \bar{r} \cdot \Delta \ .$$

Z równości (2.12) wyznaczamy poszukiwany wektor przemieszczeń węzłowych.

Numeryczne problemy związane z rozpatrywanymi tutaj zadaniami będą przedmiotem dalszych prac.

LITERATURA

[1] BORKOWSKI Sz.: The finite element method of solving the boundary problems in nonlinear physical media, Bull. Acad. Polon. Sci.,Sci., Ser. Sci. Techn., 9, 24, (1976), [183]-[188].

[2] WILSON E.: Structural analysis of axi-symmetric solids AIAA Journ.,12, 3 (1965), [2269]-[2274].

[3] ZIENKIEWICZ O.: Metoda elementów skończonych."Arkady", Warszawa 1972.

[4] LEWICKI A.: Nieliniowe fizykalnie problemy termosprężystości ośrodków obrotowych I. Równania przemieszczeniowe, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz.,z.39.

[5] LEWICKI A.: Nieliniowe fizykalnie problemy termosprężystości ośrodków obrotowych II. Zasady wariacyjne, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz. z. 39.

УРАВНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СРЕД

Р е з ю м е

Представлено общие уравнения метода конечных элементов для физически нелинейных термоупругих вращательных сред и рассмотрено их вид для осесимметрического состояния.

THE EQUATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR PHYSICALLY NONLINEAR THERMOELASTIC ROTATIONAL MEDIA

S u m m a r y

The general equations of the finite elements method are given for physically nonlinear thermoelastic rotational media and a special case of axi-symmetric state is also considered.

Wpłynęło do Redakcji 18.VII.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski