ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Jadwiga JĘDRZEJCZYK

PRZESTRZENNE ZADANIE BRZEGOWE OŚRODKÓW FIZYKALNIE NIELINIOWYCH

Streszczenie. W pracy sformułowano problem brzegowy przestrzennego zadania nieliniowej teorii sprężystości. Równolegle do ujęcia operatorowego podano równoważne sformułowanie wariancyjne i wykazano istnienie jego rozwiązania.

1. Wstęp

W pracy analizuje się pierwszy problem brzegowy dla ośrodków fizykalnie nieliniowych, określony przez operator równań przemieszczeniowych podany w pracy [1]; w szczególności bada się podstawowa własności nieliniowego operatora równań przemieszczeniowych, równoważne z jego potencjalnością.

Następnie, korzystając z metod podanych w pracach [4, 6], sformułowano problem wariacyjnie. W oparciu o twierdzenia z [6] wykazano istnienie rozwiązania i zbieżność metody Ritza.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy pierwszy problem brzegowy nieliniowej teorii sprężystości, por. [3], w obszarze Ω

$$K[\psi(\varepsilon^2)\operatorname{div}\bar{u}]_{,i} - \frac{2}{3}G[\chi(e^2)\operatorname{div}\bar{u}]_{,i} + $$
$$+ G[\chi(e^2)(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + X_i = 0 \qquad (2.1)$$
$$i,j = 1,2,3$$

z warunkami brzegowymi

$$u_i(x_k) = 0, \qquad x_k = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega \qquad (2.2)$$

W równaniu (2.1) $\bar{u} = \bar{u}(x_i) = (u_1(x_i), u_2(x_i), u_3(x_i))$ jest szukanym przemieszczeniem punktu $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, K, G - stałymi materiałowymi

$X_i = X_i(x_k)$ - znaną funkcją wektorową, określającą wpływ obciążenia i pola temperatury działających na ośrodek, $\partial\Omega$ - brzegiem obszaru Ω.

W (2.1) wielkości ε^2, e^2 określone są następującymi zależnościami, por. [3]:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^2(\bar{u}) = (\tfrac{1}{3}\,\mathrm{div}\,\bar{u})^2 = (\tfrac{1}{3}\,u_{i,i})^2,$$

$$e^2 = e^2(\bar{u}) = \tfrac{3}{4}(u_{i,j}u_{i,j} + u_{i,j}u_{j,i} - \tfrac{2}{3}\,u_{i,i}u_{j,j}) \tag{2.3}$$

Funkcje $\psi(\varepsilon^2)$ oraz $\chi(e^2)$, określające nieliniowość układu (2.1), otrzymywane są na podstawie badań doświadczalnych. Zakładamy, że spełniają one następujące warunki, por. [4]:

1) $\psi, \chi \in C^2(R^+)$;

2) $\frac{d}{d\varepsilon}[\psi(\varepsilon^2)\varepsilon] = \psi(\varepsilon^2) + 2\psi'(\varepsilon^2)\varepsilon^2 \geqslant \varkappa_1 > 0$;

$$\frac{d}{de}[\chi(e^2)e] = \chi(e^2) + 2\chi'(e^2)e^2 \geqslant \varkappa_2 > 0; \tag{2.4}$$

3) $\psi(0) = 1, \quad \chi(0) = 1$;

4) funkcje $\psi(\varepsilon^2)\varepsilon$ oraz $\chi(e^2)e$ są wklęsłe.

Z warunków (2.4) wynikają, por. [4], następujące ograniczenia, nałożone na funkcje ψ oraz χ:

$$\begin{aligned} &\psi(0) \geqslant \psi(\varepsilon^2) \geqslant \varkappa_1, \qquad \psi'(\varepsilon^2) \leqslant 0, \\ &\chi(0) \geqslant \chi(e^2) \geqslant \varkappa_2, \qquad \psi(e^2) \leqslant 0, \\ &|\psi'(\varepsilon^2)| \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon^2} \\ &|\chi'(e^2)| \leqslant \frac{C_2}{e^2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Własności operatora układu

Oznaczmy przez P operator układu (2.1), czyli

$$Pu = -\Big\{K[\psi(\varepsilon^2)\mathrm{div}\,\bar{u}]_{,i} - \tfrac{2}{3}\,G[\chi(e^2)\mathrm{div}\,\bar{u}]_{,i} + G[\chi(e^2)(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}\Big\}. \tag{3.1}$$

Niech $D(P)$ będzie zbiorem określonym następująco:

$$D(P) = \Big\{\bar{u} = (u_1, u_2, u_3); \qquad u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$u_i \text{ spełnia (2.2)}, \quad i = 1,2,3\Big\}.$$

Przez $(\cdot,\cdot)$ oznaczmy iloczyn skalarny elementów $u, v \in D(P)$

$$(\bar{u},\bar{v}) = \int_\Omega u_i v_i \, d\Omega$$

a przez $\|\cdot\|$ normę elementów $D(P)$, czyli:

$$\|\bar{u}\|^2 = \int_\Omega u_i u_i \, d\Omega$$

<u>Twierdzenie</u>

Pochodna Gâuteaux $P'_{\bar{u}}\bar{h}$ operatora P ma następujące własności:

i) liniowość ze względu na h,

ii) symetrię

$$(P'_{\bar{u}}\bar{h}, \bar{v}) = (P'_{\bar{u}}\bar{v}, \bar{h}) \quad \forall\, \bar{u}, \bar{h} \in D(P) \tag{3.2}$$

iii) dodatnią określoność

$$(P'_{\bar{u}}\bar{h}, \bar{h}) \geqslant \gamma \|\bar{h}\|^2, \quad \gamma > 0 \quad \forall\, \bar{u}, \bar{h} \in D(P) \tag{3.3}$$

DOWOD: Obliczmy pochodną Gâteaux, operatora P, zdefiniowaną następująco (por. 4,5):

$$P'_{\bar{u}}\bar{h} = \frac{d}{dt}[P(\bar{u} + t\bar{h})]\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{P(\bar{u} + t\bar{h}) - P\bar{u}}{t}$$
$$t \in R, \qquad \bar{u}, \bar{h} \in D(P) \tag{3.4}$$

Pochodna ta ma postać:

$$P'_{\bar{u}}\bar{h} = -\Big\{K[\psi(\varepsilon^2(\bar{u}))\operatorname{div}\bar{h} + 2\psi'(\varepsilon^2(\bar{u}))\varepsilon(\bar{u},\bar{h}) \,.$$
$$.\ \operatorname{div}\bar{u}]_{,i} - \frac{2}{3} G[\chi(e^2(\bar{u}))\operatorname{div}\bar{h} + 2\chi'(e^2(\bar{u})) \,.$$
$$.\ e(\bar{u},\bar{h})\operatorname{div}\bar{u}]_{,i} + G[\chi(e^2(\bar{u}))(\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{j,i}) +$$
$$+ 2\chi'(e^2(\bar{u}))e(\bar{u},\bar{h})(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}\Big\} \qquad i,j = 1,2,3 \tag{3.5}$$

gdzie

$$\varepsilon(\bar{u},\bar{h}) = \frac{1}{9} u_{j,j} h_{i,i},$$

$$e(\bar{u},\bar{h}) = \frac{3}{2}(u_{i,j}h_{i,j} + u_{i,j}h_{j,i} - \frac{2}{3} u_{i,i}h_{j,j}) \tag{3.6}$$

oraz

$$\varepsilon(\bar{u},\bar{u}) = \varepsilon^2(\bar{u}),$$

$$e(\bar{u},\bar{u}) = e^2(\bar{u}) \qquad \text{(por. [2,3])}.$$

Jak widać, $P'_{\bar{u}}\bar{h}$ jest liniowa ze względu na $\bar{h}$. Obliczamy $(P'_{\bar{u}}\bar{h}, \bar{v})$ dla $\bar{u},\bar{h},\bar{v} \in D(P)$.

Korzystając z definicji iloczynu $(\cdot,\cdot)$ otrzymamy:

$$(P'_{\bar{u}}\bar{h}, \bar{v}) = - \int_{\Omega} \Big\{K[\psi(\varepsilon^2(\bar{u}))\operatorname{div} \bar{h} + 2\psi'(\varepsilon^2(\bar{u})) \cdot$$

$$\varepsilon(\bar{u},\bar{h})\operatorname{div} \bar{u}]_{,i} v_i - \frac{2}{3} G[\chi(e^2(\bar{u}))\operatorname{div} \bar{h} +$$

$$+ 2\chi'(e^2(\bar{u}))e(\bar{u},\bar{h})\operatorname{div} \bar{u}]_{,i} v_i + G[\chi(e^2(\bar{u})) \cdot$$

$$(h_{i,j} + h_{j,i}) + 2\chi'(e^2(\bar{u}))e(\bar{u},\bar{h}) \cdot$$

$$(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} v_i\Big\} d\Omega \tag{3.7}$$

Całkując wyrażenie (3.7) przez części z uwzględnieniem warunków brzegowych (2.2) dla h, v oraz wykorzystując związki (3.6), uzyskamy:

$$(P'_{\bar{u}}\bar{h}, \bar{v}) = \int_{\Omega} \Big\{9K[\psi(\varepsilon^2(\bar{u}))\varepsilon(\bar{h},\bar{v}) +$$

$$+ 2\psi'(\varepsilon^2(u))\varepsilon(\bar{u},\bar{h})\varepsilon(\bar{v},\bar{h}) + \frac{4}{3} G[\chi(e^2(\bar{u})e(\bar{h},\bar{v}) +$$

$$+ 2\chi'(e^2(\bar{u}))e(\bar{u},\bar{h})e(\bar{u},\bar{v})]\Big\} d\Omega \tag{3.8}$$

Jak widać $(P'_{\bar{u}}\bar{h}, \bar{v}) = (P_{\bar{u}}\bar{v}, \bar{h})$.

Podstawiając w (3.8) $h = v$ otrzymamy:

$$(P'_{\bar{u}}\bar{h},\bar{h}) = \int_{\Omega} \Big\{9K[\psi(\varepsilon^2(\bar{u}))\varepsilon^2(\bar{h}) + 2\psi'(\varepsilon^2(\bar{u}))[\varepsilon(\bar{u},\bar{h})]^2] +$$

$$+ \frac{4}{3} G[\chi(e^2(\bar{u}))e(\bar{h},\bar{h}) + 2G\,\chi'(e^2(\bar{u}))[e(\bar{u},\bar{h})]^2]\Big\}\, d\Omega \qquad (3.9)$$

Z nierówności Schwarza dla form $\varepsilon(\bar{u},\bar{h})$, $e(\bar{u},\bar{h})$ oraz z warunków (2.5) wynika, że

$$(P'_{\bar{u}}\bar{h},\bar{h}) \geqslant \int_{\Omega} \{9K[\psi(\varepsilon^2(\bar{u}) + 2\psi'(\varepsilon^2(\bar{u})) \,.$$

$$.\ \varepsilon(\bar{u},\bar{h})]\ \varepsilon(\bar{h},\bar{h}) + \frac{4}{3} G[\chi(e^2(\bar{u})) +$$

$$+ 2G\,\chi'(e^2(\bar{u}))e(\bar{u},\bar{u})e(\bar{h},\bar{h})\}\}\, d\Omega \geqslant$$

$$\mu \int_{\Omega} [(\operatorname{div} \bar{h})^2 + 2e(\bar{h},\bar{h})]\, d\Omega \qquad (3.10)$$

gdzie

$$\mu = \min[K\varkappa_1,\ \frac{2}{3} G\varkappa_2]$$

Uwzględniając w oszacowaniu (3.10) nierówność Korna [2] oraz Friedrichsa [6] otrzymamy

$$(P'_{\bar{u}}\bar{h},\bar{h}) \geqslant \frac{3}{4}\ \mu \int_{\Omega} (h_{i,j} + h_{j,i})(h_{i,j} + h_{j,i})\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant c \int_{\Omega} (h_{i,j}h_{i,j} + h_i h_i)\, d\Omega \geqslant c \int_{\Omega} h_i h_i\, d\Omega = c\|h\|^2 \qquad (3.11)$$

Równość (3.5), (3.8) oraz nierówność (3.11) dowodzą słuszności twierdzenia 1.

4. Wariacyjne sformułowanie problemu

Z własności operatora P oraz z twierdzeń przytoczonych w [4] wynika, że jeżeli istnieje rozwiązanie równania $P\bar{u} = \bar{X}$, gdzie $X = (X_1, X_2, X_3)$, to

i) jest jedyne

ii) minimalizujące funkcjonał

$$\Phi(\bar{u}) = \int_0^1 (Pt\bar{u},\bar{u})\, dt - (\bar{X},\ \bar{u}) \quad \text{w} \quad D(P) \qquad (4.1)$$

iii) element $u_0 \in D(P)$ minimalizujący funkcjonał (4.1) w $D(P)$ spełnia równanie $P\bar{u} = \bar{X}$.

Korzystając z definicji operatora P możemy funkcjonał (4.1) zapisać w postaci:

$$\Phi(\bar{u}) = \int_{\Omega} d\Omega \left[\frac{9}{2} K \int_{0}^{\varepsilon^2(\bar{u})} \psi(\eta) d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} G \int_{0}^{e^2(\bar{u})} \chi(\eta) d\eta \right] - (\bar{X}, \bar{u}) \tag{4.2}$$

Funkcjonał (4.2) z punktu widzenia mechaniki ośrodków ciągłych określa całkowitą energię potencjalną rozpatrywanego ośrodka, zajmującego obszar Ω, por. [1, 3].

Rozpatrzmy funkcjonał (4.2) w przestrzeni V:

$$V = \{\bar{u};\ \bar{u} = (u_1, u_2, u_3),\ u_i \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega),\ i = 1,2,3$$

z normą

$$\|u\|_V^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \|D_i u_j\|^2$$

gdzie

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{(por. [5])}.$$

Minimum funkcjonału (4.2) w V nazwiemy rozwiązaniem uogólnionym problemu (2.1)-(2.2).

Twierdzenie

Jeżeli X należy do przestrzeni sprzężonej z V, to funkcjonał (4.2) osiąga w V jednoznacznie określone minimum.

Dowód twierdzenia wynika bezpośrednio z twierdzeń w [4,6] oraz z warunków (2.4).

Twierdzenie

Przybliżony ciąg rozwiązań otrzymany metodą Ritza jest ciągiem minimalizującym funkcjonał Φ.

Dowód twierdzenia wynika z twierdzeń z [4, 6] oraz z warunków (2.4).

LITERATURA

[1] BORKOWSKI Sz.: Variational Principles in Physically Nonlinear Thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. 9, 25, 1976.

[2] FICHERA G.: Existence Theorems in Linear and Semi - Linear Elasticity, ZAMM 54, 4, 1974.

[3] KAUDERER H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.

[4] LANGENBACH A.: Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977.

[5] YOSIDA K.: Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York 1965.

[6] МИХЛИН С.Г.: Численная реализация вариационных методов, Изд. "Наука", Москва 1966.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

Р е з ю м е

Представлено формулировку краевой задачи для пространственных задач нелинейной теории упругости. Кроме операторного подхода приведено вариационную формулировку и доказано существование и однозначность решения.

SPATIAL BOUNDARY PROBLEM FOR PHYSICALLY NONLINEAR MEDIA

S u m m a r y

The paper defines the boundary problem of a space task in non-linear elasticity theory. Together with the operational formulation, the paper presents an equivalent variational formulation, showing the existance and uniqueness of its solution.

Wpłynęło do Redakcji 12.IX.1980 r. Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski