ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Jadwiga JĘDRZEJCZYK

WARIACYJNE UJĘCIE NIELINIOWEGO, NAPRĘŻENIOWEGO ZADANIA TARCZOWEGO

Streszczenie. W pracy sformułowano wariacyjnie płaski stan naprężenia dla ośrodków fizykalnie nieliniowych. W analizowanym przypadku wykazano istnienie i jednoznaczność minimum funkcjonału, a także zbieżność metody Ritza.

1. Wstęp

W pracy analizuje się problem brzegowy tzw. płaskiego stanu naprężenia, w którym rozwiązania szuka się w naprężeniach. W przypadkach najczęściej spotykanych w zastosowaniach można pominąć siły masowe i wówczas, po wprowadzeniu funkcji naprężeń Airy'ego problem opisany jest jednorodnym nieliniowym równaniem rzędu czwartego z niejednorodnymi, liniowymi warunkami brzegowymi.

W pracy, równolegle do ujęcia operatorowego, podano równoważne sformułowanie wariacyjne i wykazano istnienie, jednoznaczność jego rozwiązania.

2. Sformułowanie problemu brzegowego płaskiego stanu naprężenia w naprężeniach

Równanie opisujące płaskie stany naprężenia w teorii sprężystości przy nieuwzględnieniu sił masowych, wyprowadza się (por.[3,5]) korzystając z:

a) równań równowagi

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \qquad i,j = 1,2, \ (x,y) \in \Omega \tag{2.1}$$

b) naprężeniowych warunków brzegowych

$$\sigma_{ij}n_j = p_i \qquad (x,y) \in S; \tag{2.2}$$

c) warunków ciągłości odkształceń

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} \qquad (x,y) \in \Omega \ ; \tag{2.3}$$

d) związków konstytutywnych [3]

$$\varepsilon_{ij} = [k(s_o^2)s_o - \frac{1}{2G} g(t_o^2)\sigma]\delta_{ij} + \frac{1}{2G} g(t_o^2)\sigma_{ij}, \tag{2.4}$$

$$s_o = \frac{1}{3K}\sigma, \qquad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \tag{2.5}$$

$$t_o^2 = \frac{1}{G^2}\left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2\right] \tag{2.6}$$

W powyższych związkach Ω jest powierzchnią środkową obszaru walcowego $\Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, zajmowanego przez ośrodek, S - brzegiem Ω, $\bar{n}$ - normalną zewnętrzną obszaru, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,y)$ - składowymi tensora naprężenia $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x,y)$ - składowymi tensora odkształcenia, $u = (u_1,u_2)$ - wektorem przemieszczenia, $G^2t_o^2$ - intensywnością tensora naprężenia, σ - wartością średnią tensora naprężenia, $k(s_o^2)$, $g(t_o^2)$ - funkcjami charakteryzującymi materiał, G, K - stałymi materiałowymi.

Wprowadźmy funkcję naprężeń Airy'ego $F(x,y)$ wg zależności (por.[2,4]).

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{2.7}$$

Pozwala to, po uwzględnieniu (2.1), (2.3) i (2.4), na następujące sformułowanie równania zagadnienia:

$$PF(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{9K} k(s^2)\,\Delta F + \frac{1}{2G} g(t^2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{3}\Delta F\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{9K} k(s^2)\,\Delta F + \frac{1}{2G} g(t^2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{3}\Delta F\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{1}{G} g(t^2)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right] = 0, \quad (x,y) \in \Omega \tag{2.8}$$

W równaniu tym s i t określone są związkami:

$$s = \frac{1}{9K}\Delta F \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$t^2 = \frac{1}{G}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \tag{2.9}$$

Warunki brzegowe dla funkcji $F(x,y)$ otrzymamy z zależności (2.2) po uwzględnieniu w niej związków (2.7).

Przyjmą one postać [5]:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \varphi_1(x,y) \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial n} &= \varphi_2(x,y) \qquad (x,y) \in S, \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdzie funkcje $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ zależą od obciążeń p_i i są dla każdego rozpatrywanego problemu funkcjami zadanymi, por. [5]. Funkcje $k(s^2)$ oraz $g(t^2)$, określające nieliniowość równania (2.8), otrzymywane są na podstawie badań doświadczalnych. Analiza wyników tych badań pozwala sformułować niżej wymienione warunki, które winny być spełnione przez rozpatrywane funkcje $k(s^2)$ i $g(t^2)$ w analizowanych dalej problemach:

$$\begin{aligned} &1)\ k,\ g \in C^2(R^+); \\ &2)\ \frac{dk}{d\eta}\,[k(\eta^2)\eta] > \varkappa_1 > 0; \\ & \frac{dg}{d\eta}\,[g(\eta^2)\eta] \geqslant \varkappa_2 > 0; \\ &3)\ k(0) = g(0) = 1; \\ &4)\ k(\eta^2)\eta,\quad g(\eta^2)\eta \text{ są wklęsłe.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Z warunków (2.11) wynikają następujące ograniczenia nałożone na funkcje k,g:

$$\begin{aligned} c_1 &\geqslant k(\eta^2) \geqslant \varkappa_1, \\ c_2 &\geqslant g(\eta^2) \geqslant \varkappa_2, \\ \eta^2\, &|k'(\eta^2)| \leqslant c_1, \\ \eta^2\, &|g'(\eta^2)| \leqslant c_2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

3. Wariacyjne sformułowanie zadania

Rozpatrzmy równanie operatorowe

$$PF = 0, \quad (x,y) \in \Omega \tag{3.1}$$

z liniowymi warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \varphi_1(x,y), \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial n} &= \varphi_2(x,y) \qquad (x,y) \in S \end{aligned} \tag{3.2}$$

Niech $v = v(x,y)$ będzie funkcją, należącą do pola określoności operatora P i spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \varphi_1(x,y), \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial n} &= \varphi_2(x,y), \qquad (x,y) \in S \end{aligned} \tag{3.3}$$

Połóżmy $F = v + w$ i wprowadźmy operator

$$Qw \overset{df}{=} P(w + v) - Pv \tag{3.4}$$

Zadanie (3.1), (3.2) można wówczas zapisać w formie:

$$Qw = p \qquad (x,y) \in \Omega \tag{3.5}$$

$$w(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial n} = 0, \quad (x,y) \in S \tag{3.6}$$

gdzie $p = -Pv$.

Niech V (por. [6]) oznacza następującą przestrzeń:

$$V = \left\{ w = w(x,y); \quad w \in \mathring{H}^2(\Omega) \right\} \tag{3.7}$$

z normą

$$\|w\|^2 = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=2}}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 d\Omega \tag{3.8}$$

Rozpatrzmy następującą formę A: $V \times V \longrightarrow R$

$$A(w,h) = \int_{\Omega} \Big[9K\, k(M(w+v,\, w+v))M(h,\, w+v) +$$

$$+ \frac{1}{3} G\, g(H(w+v,\, w+v))H(w+v,\, h)\Big]\, d\Omega \tag{3.9}$$

gdzie

$$M(h_1,h_2) = \frac{1}{(9K)^2} \Delta h_1 \Delta h_2$$

$$H(h_1,h_2) = \frac{1}{G^2}\Bigg[\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}\right)\Bigg] \tag{3.10}$$

Formę tę otrzymaliśmy w sposób formalny; mnożymy mianowicie równanie (3.5) przez funkcję h spełniającą (3.6), a następnie całkujemy otrzymane wyrażenie przez części i wykorzystujemy warunki (3.6).

Funkcję w będziemy nazywać uogólnionym rozwiązaniem problemu (3.5), (3.6) jeżeli

$$A(w,h) = (p,h) \qquad \forall\, h \in V, \tag{3.11}$$

gdzie $(\cdot,\cdot)$ jest iloczynem skalarnym w $L_2(\Omega)$.

Forma $A(w,h)$ ma następujące własności:

1) $A(w,h)$ jest liniowa iograniczona ze względu na h;

2) istnieje pochodna Gâteaux $(A'_w h_1, h_2)$ mająca własności:

$$(A'_w h_1, h_2) = (A'_w h_2, h_1),$$

$$(A'_w h, h) \geqslant c\, \|h\|^2 \qquad c > 0.$$

Przejdźmy do uzasadnienia własności 1 i 2. Łatwo sprawdzić biorąc pod uwagę (3.8), (3.10) i (2.11), że

$$(A(w,h) \leqslant \varkappa_1 \frac{1}{9K}\left[\int_{\Omega} [\Delta(w+v)]^2\, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\int_\Omega (\Delta h)^2 d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} G \mathcal{H}_2 \left[\int_\Omega H(w+v,w+v)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left[\int_\Omega H(h,h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant c \, \|h\| \tag{3.12}$$

Obliczmy $(A'_w h_1, h_2)$

$$(A'_w h_1, h_2) = \frac{d}{dt}[A(w+th_1,h_2)]\Big|_{t=0} =$$

$$\int_\Omega \Big\{ 9K[k(M(w+v,w+v))M(h_1,h_2) +$$

$$+ 2k'(M(w+v,w+v))M(w+v,h)M(w+v,h)] +$$

$$+ \frac{1}{3} G[g(H(w+v,w+v))H(h_1,h_2) +$$

$$+ 2g'(H(w+v,w+v))H(w+v,h_1)H(w+v,h_2)]\Big\} d\Omega \tag{3.13}$$

Z równości (3.13) wynika

$$(A'_w h_1, h_2) = (A'_w h_2, h_1) \tag{3.14}$$

oraz

$$|(A'_w h_1, h_2)| \leqslant c \left[\int_\Omega (\Delta h_1)^2 d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega (\Delta h_2)^2 d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ c \left[\int_\Omega H(h_1,h_2)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega H(h_2,h_1)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c \, \|h_1\| \, \|h_2\| \tag{3.15}$$

Koercywność $(A'_w h_1, h_2)$ sprawdzimy, podstawiając w (3.13) $h_1 = h_2 = h$ oraz uwzględniając (2.11).

Mamy wówczas:

$$(A'_w h, h) = \int_\Omega \Big\{ 9K[k(M(w+v,w+v))M(h,h) +$$

$$+ 2k'(M(w+v,w+v))M(w+v,h)M(w+v,h) +$$

$$+ \frac{1}{3} G[g(H(w+v,w+v))H(h,h) + 2g'(H(w+v,w+v)).$$

$$H(w+v,h)H(w+v,h)]\Big\} d\Omega \geqslant 9K \varkappa_1 \int_\Omega F(h,h)d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{3} G \varkappa_2 \int_\Omega H(h,h)d\Omega \geqslant c \|h\|^2 \tag{3.16}$$

Zgodnie z [4] A(w,h) jest gradientem pewnego funkcjonału. Funkcjonał ten posiada jednoznacznie określone minimum, por. [1].

LITERATURA

[1] CÉA Jea: Optymalizacja. Teoria i algorytmy. PWN, Warszawa 1976.

[2] JĘDRZEJCZYK J.: Równoważność wariacyjnego i operatorowego ujęcia płyt fizykalnie nieliniowych, ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 29, 1979, ss. 101-110.

[3] KAUDERER H.: Nichtlineare Mechanik. Springer-Verlag 1958.

[4] LANGENBACH A.: Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung, Springer-Verlag 1977.

[5] NOWACKI W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970.

[6] YOSIDA K.: Functional analysis, Springer-Verlag 1965.

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

Р е з ю м е

В работе представлено вариационную формулировку плоской задачи для физически нелинейных сред. В рассматриваемом случае доказано существование и однозначность минимума функционала и сходимость метода Рица.

VARIATIONAL FORMULATION OF NONLINEAR PLANE STATE OF STRESS

S u m m a r y

The paper presents a variational formulation of plane state of stress for physically nonlinear media. The existence and the uniqueness of minimum of the functional and the convergence of the Ritz method are proved.

Wpłynęło do Redakcji 12.IX.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski