ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Jadwiga JĘDRZEJCZYK

WARIACYJNE SFORMUŁOWANIE NIELINIOWEGO ZAGADNIENIA W PRZEMIESZCZENIACH, ZWIĄZANEGO Z PŁASKIM STANEM NAPRĘŻENIA

Streszczenie. W pracy sformułowano problem brzegowy płaskiego stanu naprężenia dla ośrodków fizykalnie nieliniowych. Równolegle do ujęcia operatorowego podano równoważne sformułowanie wariancyjne i wykazano istnienie jego rozwiązania.

1. Wstęp

W pracy rozważa się wariacyjne sformułowanie płaskiego stanu naprężenia dla ośrodków fizykalnie nieliniowych. Skupiając uwagę na matematycznych aspektach zagadnienia, przyjęto przy ich rozwiązywaniu takie ograniczenia, które wynikają bądź to z praktycznej strony problemu, bądź z właściwości modelowych ośrodka.

Analizując funkcjonał energii potencjalnej płaskiego zadania przemieszczeniowego nieliniowej teorii sprężystości wykazano istnienie i jednoznaczność minimum tego funkcjonału, a także zbieżność ciągu rozwiązań przybliżonych, stosowanej tutaj metody Ritza.

2. Płaski stan naprężenia

Jeżeli różne od zera współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} ośrodka określone są przy wskaźnikach $i,j = 1,2$, czyli gdy

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

to mówimy, że ośrodek zajmujący obszar $\Omega \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ znajduje się w płaskim stanie naprężenia. Wektor sił masowych i powierzchniowych określony jest wówczas kolejno przez dwie składowe, tj. $X = (X_1, X_2)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

Przy powyższych założeniach wartość średnia ε tensora odkształcenia ε_{ij} oraz intensywność e_1 wynoszą odpowiednio, por. [4]:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{3}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,u_{i,i}$$

$$e^2(\mathbf{u}) = \frac{3}{4}\left\{u_{i,j}u_{j,i} + u_{i,j}u_{i,j} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\left[1 - \frac{2\nu}{(1-\nu)^2}\right]u_{i,i}u_{j,j}\right\}$$

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \qquad i,j = 1,2 \tag{2.2}$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_1(x,y),\ u_2(x,y))$ jest wektorem przemieszczenia dowolnego punktu powierzchni środkowej ośrodka, ν jest stałą Poissona. Minimum funkcjonału energii całkowitej, por. [1,4],

$$\Phi_1(\mathbf{u}) = \int_\Omega \left[\frac{9}{2}K\int_0^{\varepsilon^2}\psi(\eta)d\eta + \frac{2}{3}G\int_0^{e^2}\chi(\eta)d\eta\right]d\Omega$$

$$- \int_\Omega \mathbf{X}\mathbf{u}\,d\Omega - \int_S \boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}\,dS = J(\mathbf{u}) - \int_\Omega \mathbf{X}\mathbf{u}\,d\Omega - \int_S \boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}\,dS \tag{2.3}$$

w klasie funkcji odpowiedniej regularności i spełniających warunki:

$$\int_\Omega \mathbf{u}\,d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \mathbf{X}\,d\Omega + \int_S \boldsymbol{\sigma}dS = 0, \tag{2.4}$$

$$\int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{X}\,d\Omega + \int_S \mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}\,dS = 0$$

jest szukanym przemieszczeniem punktu (x,y) rozpatrywanego obszaru Ω.

W (2.3) K, G są stałymi materiałowymi ($K>0$, $G>0$). Funkcje $\chi(\eta)$ oraz $\psi(\eta)$ występujące w (3.2) charakteryzują własności fizyczne materiału. Otrzymano je na podstawie badań doświadczalnych. Analiza wyników takich badań pozwala sformułować niżej wymienione warunki, które powinny spełniać funkcje materiałowe:

(i) $\psi,\ \chi \in C^2(R_+)$;

(ii) $$\frac{d\psi}{d\eta}\left[\psi(\eta^2)\,\eta\right] \geq \varkappa_1 > 0;$$

$$\frac{d\chi}{d\eta}\left[\chi(\eta^2)\,\eta\right] \geq \varkappa_2 > 0; \qquad (2.5)$$

(iii) $\psi(0) = \lambda(0) = 1;$

(iv) $\psi(\eta^2)\eta, \quad \chi(\eta^2)\eta$ są wklęsłe.

Z warunków (2.5) wynikają następujące ograniczenia nałożone na funkcje χ, ψ:

$$\begin{aligned} c_1 &\geq \psi(\eta^2) \geq \varkappa_1, \\ c_2 &\geq \chi(\eta^2) \geq \varkappa_2, \\ \eta^2 &|\psi'(\eta^2)| \leq c_1, \\ \eta^2 &|\chi'(\eta^2)| \leq c_2. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

3. Własności funkcjonału

Rozpatrzmy funkcjonał (2.3) w przestrzeni V, por. [5], określonej następująco:

$$V = \Big\{ \mathbf{u} = (u_1(x,y),\ u_2(x,y));\quad u_i \in H^1(\Omega), \qquad i = 1,2,$$

$$\int_\Omega \mathbf{u}\, d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{r} \times \mathbf{u}\, d\Omega = 0 \Big\}$$

z normą

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_\Omega (u_i u_i + u_{i,j} u_{i,j})\, d\Omega, \qquad i,j = 1,2 \qquad (3.1)$$

Przyjmijmy ponadto, że funkcje X, σ spełniają warunki $(2.4)_2$ oraz

$$X \in L_2(\Omega), \quad \sigma \in L_2(\Omega), \qquad \text{por. [7].} \qquad (3.2)$$

Funkcjonał $J(\mathbf{u})$ ma w przestrzeni, V następujące własności:

1. Istnieje gradient T - funkcjonału $J(\mathbf{u})$

Rzeczywiście, proste przekształcenia dają nam

$$J'_{u}\mathbf{h} = \left.\frac{d(J(\mathbf{u} + t\mathbf{h}))}{dt}\right|_{t=0} =$$

$$= \int_{\Omega} 9K\psi(\varepsilon^{2}(\mathbf{u}))\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{h})$$

$$+ \frac{4}{3} G\chi(e^{2}(\mathbf{u}))e(\mathbf{u},\mathbf{h})d\Omega \tag{3.3}$$

gdzie

$$\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{h}) = \frac{1}{9}\left(\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}\right)^{2} u_{i,i}h_{j,j},$$

$$e(\mathbf{u},\mathbf{h}) = \frac{3}{4}\,[u_{i,j}h_{i,j} + u_{i,j}h_{j,i} -$$

$$- \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2\nu}{(1 - \nu)^{2}}\right) u_{i,i}h_{j,j}] \tag{3.4}$$

Wyrażenie (3.4) jest liniowe ze względu na $\mathbf{h}$.

Pokażemy, że prawa strona (3.3) jest funkcjonałem ograniczonym ze względu na $\mathbf{h}$, przy dowolnym $\mathbf{u} \in V$.

Korzystając bowiem z (2.5), (3.4) i nierówności Höldera otrzymamy:

$$|J'_{u}\mathbf{h}| \leqslant \int_{\Omega} \{9K\,(\varepsilon^{2}(\mathbf{u}))\left[\varepsilon^{2}(\mathbf{u})\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varepsilon^{2}(\mathbf{u})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{4}{3}\,G\chi(e^{2}(\mathbf{u}))\left[e^{2}(\mathbf{u})\right]^{\frac{1}{2}}\left[e^{2}(\mathbf{u})\right]^{\frac{1}{2}} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 9K\,\varkappa_{1}\left[\int_{\Omega} \varepsilon^{2}(\mathbf{u})d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\Omega} \varepsilon^{2}(\mathbf{h})d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{4}{3}\,G\,\varkappa_{2}\left[\int_{\Omega} e^{2}(\mathbf{u})d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\Omega} e^{2}(\mathbf{h})d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{h}\| + c\left[\int_{\Omega}(u_{i,j}u_{i,j} + u_{i,j}u_{j,i} -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2\nu}{(1-\nu)^{2}}\right)u_{i,i}u_{j,j})d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\Omega}(h_{i,j}h_{i,j} + h_{i,j}h_{j,i} -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2\nu}{(1-\nu)^{2}}\right)h_{i,i}h_{j,j})d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant c\,\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{h}\| +$$

$$+ c\left[\int_\Omega \left(2u_{i,j}u_{i,j} - \frac{2}{3}u_{i,i}u_{j,j} + \frac{4\nu}{(1-\nu)^2}u_{i,i}u_{j,j}\right)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left[\int_\Omega \left(2h_{i,j}h_{i,j} - \frac{2}{3}h_{i,i}h_{j,j} + \frac{4\nu}{(1-\nu)^2}h_{i,i}h_{j,j}\right)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{h}\|, \tag{3.5}$$

gdyż dla $\nu \in (0, \frac{1}{2})$, $\frac{4\nu}{(1-\nu)^2} > 0$ oraz $\int_\Omega u_{i,u}u_{j,j}\, d\Omega \leqslant 2^4\,\|\mathbf{u}\|^2$.

Istnieje więc grad $J = T$ i wynosi:

$$(T\mathbf{u},\mathbf{h}) = \int_\Omega [9K\psi(\varepsilon^2)\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{h}) +$$

$$+ \frac{4}{3}G\chi(e^2(\mathbf{u}))e(\mathbf{u},\mathbf{h})]\, d\Omega \tag{3.6}$$

Z własności tej i z twierdzenia z [2] wynika, że Φ jest słabo półciągłe z dołu

2. Dla dowolnego $\mathbf{u} \in V$ istnieje $(T_u'\mathbf{V},\mathbf{h})$, spełniające relację:

$$(T_u'\mathbf{h},\mathbf{h}) \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|^2 \qquad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{h} \in V,\quad c > 0$$

Z (3.6) wynika:

$$\frac{d}{dt}[(T(\mathbf{u} + t\mathbf{v}),\mathbf{h})]\Big|_{t=0} = \int_\Omega \{9K[\chi(\varepsilon^2(\mathbf{u}))\varepsilon(\mathbf{h},\mathbf{v})$$

$$+ 2\psi'(\varepsilon^2(\mathbf{u}))\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{v})\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{h})] + \frac{4}{3}G\,[\chi(e^2(\mathbf{u}))e(\mathbf{h},\mathbf{v})$$

$$+ 2\,\chi(e^2(\mathbf{u}))e(\mathbf{u},\mathbf{h})e(\mathbf{u},\mathbf{v})]\}\, d\Omega \tag{3.7}$$

Prawa strona (3.7) jest przy dowolnym $\mathbf{u} \in V$ określoma i ograniczona ze względu na $\mathbf{v},\mathbf{h}$.

Na podstawie (2.5) mamy bowiem oszacowanie

$$\left|\frac{d}{dt}(T(\mathbf{u} + t\mathbf{v}),\mathbf{h})\right|\Big|_{t=0} \leqslant \int_\Omega \{9K[\psi(\varepsilon^2(\mathbf{u}))\varepsilon(\mathbf{h},\mathbf{v}) +$$

$$+ |2\psi^2(\varepsilon^2(\mathbf{u}))|\,|\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{h})|\,|\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{v})|] + \frac{4}{3}G\cdot$$

$$[\chi(e^2(u)) \times |e(v,h)| + 2|\chi'(e^2(u))||e(u,h)e(u,v)|]\} \, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant c\|h\|\|v\| + \int_\Omega \{18K|\psi'(\varepsilon^2(u))|\varepsilon^2(u)\left[\varepsilon^2(v)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\varepsilon^2(h)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{8}{3} G \, |\chi'(e^2(u))|e^2(u)\left[e^2(u)\right]^{\frac{1}{2}} \left[e^2(v)\right]^{\frac{1}{2}} \} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant c\|h\|\|v\| + \int_\Omega \left[18K \, \varkappa_1 \left[\varepsilon^2(h)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\varepsilon^2(v)\right]^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left. + \frac{8}{3} G \, \varkappa_2 \left[e^2(h)\right]^{\frac{1}{2}} \left[e^2(v)\right]^{\frac{1}{2}}\right] d\Omega \leqslant c \, \|h\|\|v\| \tag{3.8}$$

Oszacujmy teraz wielkość $(T'_u h, h)$, równą

$$(T'_u h, h) = \frac{d}{dt}(T(u + th), \, h)\Big|_{t=0}$$

zgodnie z (3.7) mamy:

$$(T'_u h, h) = \int_\Omega \{9K[\psi(\varepsilon^2(u))\varepsilon(h,h) + 2\psi'(\varepsilon^2(u)).$$

$$(\varepsilon(u,h))^2] + \frac{1}{3} G[\chi(e^2(u))e(h,h) + 2\chi'(e^2(u)).$$

$$(e(u,h))^2]\} \, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \{9K[\psi(\varepsilon^2(u)) + 2\psi'(\varepsilon^2(u)) \times \varepsilon^2(u)]\varepsilon^2(h)$$

$$+ \frac{4}{3} G[\chi(e^2(u)) + 2\chi'(e^2(u))e^2(u)] e^2(h)\Big\} d\Omega$$

$$\geqslant \int_\Omega [9K \, \varkappa_1 \, \varepsilon^2(h) + \frac{4}{3} G \, \varkappa_2 \, e^2(h)] d\Omega. \tag{3.9}$$

Uwzględniając w oszacowaniu (3.9) zależność (2.2) i drugą nierówność Korna [3] otrzymamy:

$$(T'_u h, h) \geqslant c \int_{\Omega} \left[h_{i,j} h_{i,j} + h_{i,i} h_{j,j} \left[\left(\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right)^2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{2\nu}{(1 - \nu)^2} \right] \right] d\Omega \geqslant c \| h \|^2 \tag{3.10}$$

Z własności 2 wynika, że funkcjonał Φ jest ściśle wypukły;

3. Funkcjonał Φ jest rosnący

Zgodnie z (2.2), (2.4), nierównością Korna i z twierdzeniem o zanurzaniu [8] mamy:

$$\Phi(u) \geqslant c\|u\|^2 - \|u\|_{L_2(\Omega)} \|X\|_{L_2(\Omega)} - \|6\|_{L_2(s)} \|u\|_{L_2(s)} \geqslant$$

$$\geqslant c\|u\|^2 - \|u\| \|X\|_{L_2(\Omega)} - \|u\| \|6\|_{L_2(s)} \tag{3.11}$$

co pociąga za sobą

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \Phi(u) = \infty$$

Dla funkcjonału Φ istnieje więc w przestrzeni V jednoznacznie określone minimum globalne, por. [2].

Z własności 1 i 3 oraz z twierdzenia z [9] wynika, że jeżeli skonstruujemy przybliżony ciąg rozwiązań metody Ritza, to będzie on ciągiem minimalizującym funkcjonał Φ w przestrzni V.

LITERATURA

[1] BORKOWSKI Sz.: Variational Principles in Physically Nonlinear Thermoelasticity; Bull. Acad. Pol. Scien., Serie scien-techn. XXV, 9, 1977, 769-774.

[2] CÉA Jean: Optymalizacja. Teoria i algorytmy. PWN, Warszawa 1976.

[3] FICHERA G.: Existence Theorems in Elasticity. Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints; Handbuch der Physik, Band 6a/2, Springer-Verlag 1972.

[4] JĘDRZEJCZYK J.: Równoważność wariacyjnego i operatorowego ujęcia płyt fizykalnie nieliniowych. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 29, 1979, ss. 101-110.

[5] KAUDERER H.: Nichtlineare Mechanik, Springer-Verlag, 1958.

[6] YOSIDA K.: Functional analysis, Springer-Verlag 1965.

[7] БЫКОВ Д.Л.: О некоторых соотношениях между инвариантами напряжений и деформаций в физически нелинейных средах. Упругость и неупругость. Выпуск 2, Изд. Москов. Унив. 1971.

[8] МИХЛИН С.Г.: Проблема минимума квадратного функционала. Москва 1966.

[9] МИХЛИН С.Г.: Численная реализация вариационных методов. Москва 1972.

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Р е з ю м е

В работе сформулировано краевую задачу для плоского состояния напряжения в физически нелинейных средах. В месте с операторным подходом представлено вариационную задачу и доказано существование решения этой задачи.

VARIATIONAL FORMULATION OF DISPLACEMENT-NONLINEAR PROBLEM CONNECTED WITH PLANE STATE OF STRESS

S u m m a r y

The paper defines the boundary problem of a plane stress for physically non-linear media. The operational formulation is accompanied by an equivalent variational formulation There is also shown the existence of its solution.

Wpłynęło do Redakcji 12.IX.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski