

Bogdan WILK

## NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZADANIA OPTIMALIZACJI

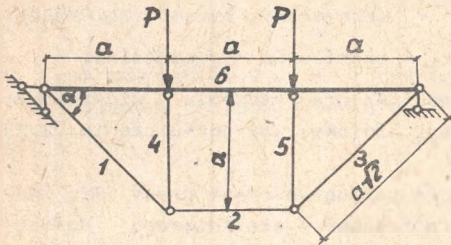
## UKŁADU KARTOWO-BELKOWEGO

## I. ALGORYTM METODY ROZWIĄZANIA

**Streszczenie.** W niniejszej pracy zajmować się będziemy zagadnieniem optymalizacji, odnoszącym się do tzw. układu kratowo-belkowego. Jako funkcję celu przyjmować będziemy objętość takiego układu. Z funkcji ograniczających uwzględnić będziemy naprężenie w prętach i w belce. Tak postawiony problem prowadzi do zagadnienia programowania nieliniowego.

1. Wstęp

Jako przykład optymalizacji rozpatrzono układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1.  $E_1 = E = 2,1 \cdot 10^5 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$ ,

$i = 1, \dots, 6$   $P = 90000$  [N];  $a = 2$  m;

$\alpha = 45^\circ$ ;  $F_1 = F = 19,64$  cm<sup>2</sup>,  
 $i = 1, \dots, 5$  (przekrój kołowy o średnicy  $d = 5$  cm);  $k_r = 160 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$ ;

$\delta_6 = 8 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$ . Belkę przyjęto w

kształcie dwuteownika o wysokości  $h = 38$  cm i polu przekroju  $F_6 = 107$  cm<sup>2</sup>

Przedstawiony w pracy algorytm rozwiązywania danego zadania jest oparty na metodzie tzw. kierunków dopuszczalnych [1]. Algorytm rozwiązania oparty na powyższej metodzie został przedstawiony w pracy [2].

W punkcie drugim pracy sformułowano zadanie, natomiast w trzecim przytoczono metodę rozwiązywania danego problemu.

2. Sformułowanie zadania

W układzie przedstawionym na rys. 1 należy tak dobrać pola przekrojów prętów, oznaczonych numerami 1, 2, 3, 4, 5 oraz pole przekroju belki 6, aby:

- 1<sup>o</sup> objętość tego układu była najmniejsza;  
 2<sup>o</sup> naprężenia występujące we wszystkich prętach i belce nie przekraczały wartości dopuszczalnych "k<sub>r</sub>".

Należy zatem znaleźć:

$$\min f(\mathbf{F}) = \min \left( \sum_{i=1}^6 F_i \cdot l_i \right), \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_6), \quad (2.1)$$

przy ograniczeniach

$$\psi_j(\mathbf{F}) \equiv \frac{|N_j|}{\beta_j F_j} - k_r \leq 0, \quad (j = 1, \dots, 5) \quad (2.2)$$

$$\psi_6(\mathbf{F}) \equiv \frac{|M_{g \max}|}{W_x} + \frac{|N_1 \cos \alpha|}{\beta_1 F_1} - k_r \leq 0 \quad (2.3)$$

Funkcja  $f(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^6 F_i \cdot l_i$  określa objętość układu, natomiast symbole  $F_i$ ,  $l_i$ ,  $\beta_j$ ,  $N_j$  określają odpowiednio: pole przekroju, długość, współczynnik wyboczenia, siłę podłużną,  $M_{g \max}$  - maksymalny moment zginający;  $W_x$  - wskaźnik przekroju na zginanie;  $k_r$  - naprężenie dopuszczalne.

Tak sformułowane zagadnienie jest zadaniem programowania nieliniowego, gdzie funkcja celu (2.1) jest funkcją liniową, zaś ograniczenia (2.2) i (2.3) są funkcjami nieliniowymi.

Powyższe zagadnienie rozwiążemy metodą przedstawioną w pracy [2]; metoda ta pozwoli nam dane zagadnienie programowania nieliniowego sprowadzić do zagadnienia programowania liniowego.

### 3. Metoda rozwiązywania

Jak już wspomnieliśmy, dany układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (wewnętrznie).

Kanoniczne równanie metody sił dla takiego układu jest postaci:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $X_1$  jest siłą nadliczbową. Rozwiązując dany układ metodą sił otrzymamy wielkości  $N_{1P}$  i  $N_{11}$ , gdzie kolejno  $N_{1P}$  są siłami podłużnymi w prętach - wywołanymi działaniem siły  $P$ , zaś  $N_{11}$  działaniem siły  $X_1 = 1$ .



Obliczenia wynikające z algorytmu metody sił przedstawimy w tabeli 1.

Tabela 1

Numer pręta	Długość $l$	$N_{1P}$	$\bar{N}_{11}$	$\bar{N}_{11}^2 \cdot l$	$\bar{N}_{11} \cdot N_{1P} \cdot l$
1	$a\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}a$	0
2	$a$	0	1	$a$	0
3	$a\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}a$	0
4	$a$	0	-1	$a$	0
5	$a$	0	-1	$a$	0

Wyznaczając  $\delta_{11}$  i  $\Delta_{1P}$  od zginania i rozciągania otrzymamy

$$\delta_{11} = \frac{5a^3}{3EJ} + \frac{1}{E} \left[ \frac{2\sqrt{2}a}{F_1} + \frac{a}{F_2} + \frac{2\sqrt{2}a}{F_3} + \frac{a}{F_4} + \frac{a}{F_5} \right], \quad (3.2)$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{3} \frac{Pa^3}{EJ} \quad (3.3)$$

We wzorach (3.2), (3.3) przyjęto  $E_i = E$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Z równania (3.1) otrzymamy siłę nadliczbową

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad (3.4)$$

Siły wewnętrzne w prętach wyznaczamy z równania

$$N_i = N_{1P} + X_1 \bar{N}_{11} \quad (i = 1, \dots, 5)$$

W iteracji zerowej należy tak wyznaczyć przekroje  $F_i^{(0)}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), aby co najmniej jedno z naprężeń występujących w rozpatrywanych prętach czy belce znajdowało się w przedziale  $[k_r - \delta_\sigma, k_r + \delta_\sigma]$ , gdzie  $\delta_\sigma$  jest zadaną dodatnią liczbą (np.  $\delta_\sigma \leq 0,05 \cdot k_r$ , por. [2]). Dla przyjętych wymiarów jak na rys. 1 otrzymano następujące siły podłużne i naprężenia, które przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

$N_1^{(0)}, \quad i = 1, \dots, 5$	$\sigma_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, 6$
$N_1^{(0)} = 109590 \text{ [N]}$	$\sigma_1^{(0)} = \frac{N_1}{F_1} = 55,8 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$
$N_2^{(0)} = 77720 \text{ [N]}$	$\sigma_2^{(0)} = \frac{N_2}{F_2} = 39,57 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$
$N_3^{(0)} = 109590 \text{ [N]}$	$\sigma_3^{(0)} = \frac{N_3}{F_3} = 55,8 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$
$N_4^{(0)} = - 77720 \text{ [N]}$	$\sigma_4^{(0)} = \frac{N_4}{\beta_4 F_4} = - 158,6 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$
$N_5^{(0)} = - 77720 \text{ [N]}$	$\sigma_5^{(0)} = \frac{N_5}{\beta_5 F_5} = - 158,6 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$
	$\sigma_6^{(0)} = \frac{ M_{\alpha \text{ max}} }{W_x} + \frac{ N_1 \cdot \cos \alpha }{\beta_1 F_1} =$ $= 27,6 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$

Objętość całego układu wynosi  $V = 87060,96 \text{ cm}^3$ .

Wstawiając wielkości z tablicy 2 do ograniczeń (2.2) i (2.3) otrzymamy:

$$\psi_1^{(0)} = |\sigma_1^{(0)}| - k_r = - 104,2 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right] \notin [- 8, 8]$$

$$\psi_2^{(0)} = |\sigma_2^{(0)}| - k_r = - 120,4 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right] \notin [- 8, 8]$$

$$\psi_3^{(0)} = \psi_1^{(0)} \quad (3.5)$$

$$\psi_4^{(0)} = |\sigma_4^{(0)}| - k_r = - 1,4 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right] \in [- 8, 8]$$

$$\psi_5^{(0)} = \psi_4^{(0)} \in [- 8, 8]$$

$$\psi_6^{(0)} = |\sigma_6^{(0)}| - k_r = - 132,4 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right] \notin [- 8, 8]$$

Postępując w dalszym ciągu zgodnie z metodą podaną w pracy [2], należy obliczyć pochodne cząstkowe  $\frac{\partial \psi_j}{\partial F_i}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) dla takich  $j$ , dla których spełniony jest warunek  $\psi_j \in [-8, 8]$ .

W naszym przypadku  $j = 4, 5$ . Należy zatem obliczyć  $\frac{\partial \psi_4}{\partial F_i}$  oraz  $\frac{\partial \psi_5}{\partial F_i}$  dla  $i = 1, \dots, 6$ .

Funkcje  $\psi_j$  są funkcjami uwikłanymi, toteż pochodne cząstkowe  $\frac{\partial \psi_j}{\partial F_i}$  zostały zastąpione ilorazami różnicowymi  $\frac{\Delta \psi_j}{\Delta F_i}$ .

Przyjmując odpowiednio małe przyrosty  $\Delta F_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), otrzymamy pochodne cząstkowe, które przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3

1	1	2	3	4	5	6
$\frac{\partial \psi_4}{\partial F_i}$	11,6	2,6	11,6	-210	-210	4

Ze względu na symetrię danego układu pominięte zostały pochodne  $\frac{\partial \psi_5}{\partial F_i}$ .

Dla określenia kierunku poprawiającego z punktu  $F^{(0)}$  (19,64; 19,64; 19,64; 19,64; 19,64; 107) do punktu  $F^{(1)}$  (19,64 +  $s_1^{(0)} t^{(1)}$ ; ...; 19,64 +  $s_5^{(0)} t^{(1)}$ ; 107 +  $s_6^{(0)} t^{(1)}$ ) należy rozwiązać następujące zagadnienia:

$$\min \{r: (1, s^{(0)}) \leq r, (\nabla \psi_4, s^{(0)}) \leq r, |s^{(0)}| \leq 1\}, \quad (3.6)$$

gdzie  $(1, s^{(0)})$  oznacza iloczyn skalarny wektorów  $1(1_1, \dots, 1_6)$  oraz  $s^{(0)}(s_1^{(0)}, \dots, s_6^{(0)})$ , zaś  $(\nabla \psi_4, s^{(0)})$  oznacza iloczyn skalarny gradientu funkcji  $\psi_4(F^{(0)})$  i wektora  $s^{(0)}(s_1^{(0)}, \dots, s_6^{(0)})$ .

W ten sposób sformułowane zagadnienie jest zadaniem programowania liniowego, które możemy rozwiązać stosując zrewidowaną metodę sympleksów, tzw. metodę revsimplex [3]. Stosując tę metodę, otrzymamy kierunek poprawiający  $s^{(0)}(-1, -1, -1, 0, 0, -1)$ . Otrzymujemy zatem punkt

$$F^{(1)}(19,64 - t^{(1)}; 19,64 - t^{(1)}; 19,64 - t^{(1)}; 19,64; 19,64; 107 - t^{(1)}),$$

gdzie  $t^{(1)}$  jest najmniejszą dodatnią pierwiastkiem równań

$$\psi_1(F_1^{(0)} + s_1^{(0)} t^{(1)}; \dots; F_6^{(0)} + s_6^{(0)} t^{(1)}) = 0, \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (3.7)$$



Po rozwiązaniu równań (3.7) otrzymamy  $t^{(1)} = 12,3$ , co kończy pierwszą iterację. Otrzymaliśmy zatem nowy punkt  $F^{(1)}$  (7,34; 7,34; 7,34; 19,64; 19,64; 97,1).

Objętość danego układu przy nowych przekrojach wynosi  $V^{(1)} = 71736 \text{ cm}^3$ , czyli jest o 17,6% mniejsza niż objętość układu w zerowej iteracji.

W następnej pracy zostanie podany schemat blokowy programu na maszynie cyfrowej oraz przytoczone będą wyniki kolejnych iteracji tego algorytmu.

#### LITERATURA

- [1] DUBNICKI W.: ZORYCHTA K.: Metody programowania wypukłego, Wyd. Uniw. Warsz. 1972, s. 171.
- [2] WILK B.: Optymalne kształtowanie układów kratowo-belkowych, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, s. Matematyka-Fizyka, z. 28, Gliwice 1977, s. 225.
- [3] GASS S.I.: Programowanie liniowe. PWN, Warszawa 1973.

#### НУМЕРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕТОЧНО-БАЛОЧНОЙ СИСТЕМЫ.

##### I. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ

#### Р е з ю м е

В работе представлено задачу оптимизации так называемой решетоchno-балочной системы. В качестве функции цели принимают объем системы. Из ограничивающих функций учитывают только напряжения в стержнях и в балке. Так сформулированная задача ведет к задаче нелинейного программирования.

#### NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMIZATION PROBLEM OF THE BEAM-TRUSS SYSTEM

##### I. THE ALGORITHM OF THE SOLUTION

#### S u m m a r y

An optimization problem of the so called beam-truss system is discussed. As a goal function we take the volume of this system. As a limiting function we account only for the stress in truss members and in beam. Such a problem leads us to the problem of nonlinear programming.

Wpłynęło do Redakcji 20.X.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski