ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Serii: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Tomasz JĘKOT

RÓWNANIA WARIACYJNE NIELINIOWYCH PROBLEMÓW TERMOSPRĘŻYSTOŚCI SPRZĘŻONEJ POWŁOK GRUBYCH
I. ZAGADNIENIA OGÓLNE

Streszczenie. W pracy przeanalizowano zagadnienie powłoki grubej pod kątem zastosowania metody momentów (wielomiany Legendrte'a) w równaniach wariacyjnych nieliniowej termosprężystości sprzężonej powłok grubych. Przedstawiono procedurę pozwalającą na uwzględnienie nieliniowości w metodzie momentów oraz na znaczne uproszczenie zapisu.

1. Wstęp

Metoda momentów, z wykorzystaniem wielomianów Legendre'a, proponowana w [7],[8][x)], stosowana jest z powodzeniem w liniowej termosprężystości powłok grubych, por. [6], [9], [10]. Jednakże mimo ograniczenia do przypadku liniowości geometrycznej i fizycznej równania przedstawione w ww. pracach są bardzo złożone i trudne do algorytmizacji.

Celem niniejszej pracy było m.in. znalezienie takich niezmiennych operatorów, które umożliwiają uwzględnianie nieliniowości w metodzie momentów, a szczególnie stosują się do geometrycznie i fizycznie nieliniowych problemów termosprężystości sprzężonej powłok grubych. Przedstawione operatory mają dogodną interpretację macierzową. Umożliwia to łatwe wprowadzanie ich w algorytmy rozwiązujące układy nieliniowych równań algebraicznych na przykład metodami Newtona-Raphsona.

2. Wprowadzenie

Przyjmijmy oznaczenia, opis konfiguracji powłoki, warunki brzegowe oraz równania wyjściowe zgodnie z ujęciem przedstawionym w pracach [1],[2].

Oznaczmy przez L powierzchnię brzegu obszaru, tzn. $L = S\ (S^{+} \cup S^{-})$. Załóżmy, że obszary brzegowe $\Omega_{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,5$ można rozłożyć na składniki $\Omega_{(i)} = \Omega^{s}_{(i)} \cup \Omega^{L}_{(i)}$, $\Omega^{s}_{(i)} \quad \Omega^{L}_{(i)} = \Phi$, gdzie $\Omega_{(i)} \in S^{\pm}$, $\Omega^{L}_{(i)} \subset L$.

---

x) Literatura tutaj przytaczana umieszczona jest w II części artykułu.

Przypuśćmy, że L jest powierzchnią "prostopadłą" do powierzchni S_o, tzn., $\forall$ punktu $A \in L \cap S_o$, $\forall \alpha \in [-h;h]$, $\alpha \vec{n}_A \in L$, gdzie $\vec{n}_A$ jest wektorem normalnym do powierzchni S_o w punkcie A.

Metrykę $\hat{g}_{\alpha\beta}$ obszaru V można wyrazić przez metrykę $\mathring{g}_{\alpha\beta}$ powierzchni S_o oraz współczynniki b - drugiej formy kwadratowej powierzchni S_o.

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \mathring{g}_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta}\, x^3 + b_{\alpha\gamma}\, b^{\gamma}_{\beta}\, (x^3)^2 \tag{2.1}$$

$$\hat{g}_{32} = \hat{g}_{23} = 0,\ \hat{g}_{33} = 1,\quad x^3 \in [-h;h],$$

podstawiając w (2.1)

$$a^{(0)}_{\alpha\beta} = \mathring{g}_{\alpha\beta},\ a^{(1)}_{\alpha\beta} = -2b_{\alpha\beta},\ a^{(2)}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\gamma}\, b^{\gamma}_{\beta},$$

$$a^{(k)}_{32} = a^{(k)}_{23} = a^{(2)}_{33} = a^{(3)}_{33} = 0,\ \text{dla } k = 0,1,2,$$

$$a^{(0)}_{33} = 1,$$

możemy zapisać

$$\hat{g}_{kl} = \sum_{j=0}^{2} a^{(j)}_{kl} (x^3)^j \text{ x)} \tag{2.2}$$

Przyjmujemy dalej oznaczenia

$$G = \det\,[g_{kl}],$$

$$\sqrt{G} = \sqrt{G_o}\,[1 - 2H\,x^3 + K(x^3)^2],$$

gdzie (2.3)

$$G_o = \mathrm{def}([\mathring{g}_{\alpha\beta}]),\quad G^o = \mathrm{def}([\mathring{g}^{\alpha\beta}])$$

$$H = b^1_1 + b^2_2,\ K = b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2,$$

w których H jest krzywizną średnią powierzchni S_o, a K - krzywizną Gaussa. Uwzględniając powyższe zależności stwierdzamy, że element objętości dV określony jest wzorem:

$$dV = \sqrt{G}\, dx^1 dx^2 dx^3 = [1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2]\, dx^3 dS_o, \tag{2.4}$$

x) Dla odróżnienia wskaźników niemych od bieżących te ostatnie będą ujęte w nawiasy.

gdzie przez dS_o oznaczono element powierzchni środkowej powłoki $dS_o = \sqrt{G_o}\, dx^1 dx^2$.

Składowe tensora $\hat{g}^{ij}$ są określone wzorami

$$\hat{g}^{\alpha\beta} = \frac{G^{\alpha\beta}}{G}, \quad \hat{g}^{13} = \hat{g}^{23} = 0, \quad \hat{g}^{33} = 1, \tag{2.5}$$

gdzie $G^{\alpha\beta}$ jest dopełnianiem algebraicznym elementu $\hat{g}^{\alpha\beta}$ w macierzy g.

Rozkładając $\hat{g}^{\alpha\beta}$ w szereg Maclaurina względem x^3 otrzymamy

$$\hat{g}^{\alpha\beta} = \overset{0}{g}{}^{\alpha\beta} + 2b^{\alpha\beta} x^3 + 3b^{\alpha\gamma} b^{\beta}_{\gamma}(x^3)^2 + \ldots \tag{2.6}$$

Przyjmując

$$a^{13}_{(i)} = a^{23}_{(i)} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 0,1,2,3,\ldots$$

$$a^{33}_{(0)} = 1, \quad a^{33}_{(i)} = 0, \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3,\ldots$$

$$a^{\alpha\beta}_{(0)} = \overset{0}{g}{}^{\alpha\beta}, \quad a^{\alpha\beta}_{(1)} = 2b^{\alpha\beta}, \quad a^{\alpha\beta}_{(2)} = 3b^{\alpha\gamma} b^{\beta}_{\gamma}, \ldots,$$

możemy zapisać

$$\hat{g}^{kl} = \sum_{j=0} a^{kl}_{(j)} (x^3)^j. \tag{2.7}$$

Rozwijając w szereg Maclaurina $I^{-1/2}$ względem ε_{ij} oraz G^{-1} względem x^3 wyrażenie

$$I^{1/2} B^{ij} = I^{1/2} \frac{([2\varepsilon_{kl} + g_{kl}])^{ij}}{IG} \tag{2.8}$$

możemy zapisać

$$I^{1/2} B^{ij} = (2\varepsilon + g)^{ij}(1 + I_{(1)} + \ldots)(G^o + 4HG^o x^3 + \ldots) \tag{2.9}$$

We wzorze (2.9) przez $(2\varepsilon + g)^{ij}$ oznaczono dopełnienie algebraiczne elementu $2\varepsilon_{ij} + g_{ij}$ w macierzy $2\varepsilon + g$. Znając pierwszy i drugi tensor metryczny powierzchni S_o, możemy tensory metryczne, symbole Christoffela oraz iloczyny tych wielkości, określone w całym obszarze V, zapisać w postaci wielomianów zmiennej x^3, o współczynnikach zależnych od zmiennych x^1, x^2.

Przyjmujemy następujące oznaczenia na współczynniki wielomianów

$$g^{ki}g^{lj} = \sum_{d=0} a^{kilj}_{(d)}(x^3)^d,$$

$$g^{ij}g^{jl}g^{mn} = \sum_{d=0} a^{ijklmn}_{(d)}(x^3)^d \tag{2.10}$$

$$\sqrt{G} = \sqrt{G_o}\sum_{i=0}^{2} G(i)x^3)^i$$

We wzorze $(2.10)_3$ współczynniki $G(i)$ są określone następująco:

$$G(i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ -2H, & i = 1 \\ K, & i = 2 \end{cases}$$

$$g_{kl}\sqrt{G} = \sqrt{G_o}\sum_{j=0} G_{kl}(j)(x^3)^j, \tag{2.11}$$

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \sum_{l=0} \binom{k}{ij}_{(l)} (x^3)^l$$

3. Postać funkcji poszukiwanych i wielomiany Legendre'a

Rozwiązanie problemu polega na znalezieniu czterech funkcji u^1, u^2, u^3, Θ, określonych w przestrzeni trójwymiarowej i w czasie. Wykorzystując pewne własności wielomianów Legendre'a sprowadzimy problem czterowymiarowy do poszukiwania funkcji określonych na powierzchni środkowej powłoki.

Nieznane funkcje będą poszukiwane w postaci:

$$\Theta = \sum_{k=0} \overset{(k)}{\Theta} P_{(k)}\left(\frac{x^3}{h}\right), \quad \overset{(k)}{\Theta} = \overset{(k)}{\Theta}(x^1, x^2, t),$$

$$u^i = \sum_{k=0} \overset{(k)}{u^i} P_{(k)}\left(\frac{x^3}{h}\right), \quad \overset{(k)}{u^i} = \overset{(k)}{u^i}(x^1, x^2, t) \tag{3.1}$$

W powyższych wzorach $P_{(k)}(x)$ jest wielomianem Legendre'a,

$$P_{(k)}(x) = \frac{1}{2^k\, k!} \frac{d^k[(x^2-1)]^k}{dx^k} \qquad k = 0,1,\ldots \tag{3.2}$$

Zakładamy, że inne wielkości występujące w równaniu (2.6) (literatura p. [2]) są analogicznej postaci, np.:

$$I^{1/2}B^{kl} = \sum_{k=0} \frac{{}^{(k)}}{I^{1/2}B^{kl}} P_{(k)}\left(\frac{x^3}{h}\right). \tag{3.3}$$

Dalej będziemy pisali krótko $P_{(k)}$ zamiast $P_{(k)}\left(\frac{x^3}{h}\right)$.

Wielomiany Legendre'a są ortogonalne,

$$\int_{-h}^{h} P_{(m)}P_{(n)}dx^3 = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ C(n), & m = n, \end{cases} \tag{3.4}$$

gdzie $C(n) = \frac{2h}{2n+1}$.

Dalej wszędzie przyjmujemy, że $P_{(n)} = 0$ dla $n < 0$.

Stosując kolejno (por. np. [11]) znany wzór

$$x\, P_{(n)}(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{(n+1)}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{(n-1)}(x), \tag{3.5}$$

otrzymamy:

$$(x)^k P_{(n)} = \sum_{i=1}^{k+1} A_{(i)}^{(k)}(n)\, P_{(n-k+2i-2)}, \tag{3.6}$$

gdzie współczynniki $A_{(i)}^{(k)}(n)$ zależą od n oraz h i wyrażają się wzorami:

$$A_{(1)}^{(k)}(n) = h\, A_{(1)}^{(k-1)}(n) \frac{n-k+1}{2n-2k+3}$$

$$A_{(i)}^{(k)}(n) = h\, A_{(i-1)}^{(k-1)}(n) \frac{n-k+2i-2}{2n-2k+4i-5} +$$

$$+ h\, A^{(k-1)}_{(i)}(n)\, \frac{n-k+2i-1}{2n-2k+4i-1}$$

$$A^{(k)}_{(k+1)}(n) = h\, A^{(k-1)}_{(k)}(n)\, \frac{n+k}{2n+2k-1}\,. \tag{3.7}$$

Mamy dalej (por. [11]):

$$\frac{d}{dx^3} P_{(n)} = 1/h \sum_{k=0} (2n-4k-1)\, P_{(n-2k-1)}\,. \tag{3.8}$$

Jeżeli $u = \sum_{k=0} \overset{(k)}{u}\, P_{(k)}$, to

$$\int_{-h}^{h} uP_{(n)}dx^3 = \int_{-h}^{h} \Big(\sum_{k=0} \overset{(k)}{u}\, P_{(k)}P_{(n)}\Big)dx^3 = C(n)\, \overset{(n)}{u} \tag{3.9}$$

Stosując wzór (3.8), po dokonaniu łatwych przekształceń, otrzymamy

$$\int_{-h}^{h} \frac{\partial}{\partial x^3}\Big[\sum_{k=0} \overset{(k)}{u}\, P_{(k)}\Big]P_{(n)}dx^3 = (2n+1)C(n) \sum_{i=0} \frac{(n+2i+1)}{u} \tag{3.10}$$

Wielomina $P_{(n)}$ można zapisać również w postaci:

$$P_{(n)} = \sum_{i=0}^{n} B^{\{i\}}_{(n)} (x^3)^i \tag{3.11}$$

Współczynniki $B^{\{i\}}_{(n)}$ zależę od n oraz h i wyrażają się wzorami

$$B^{(n-2k)}_{(n)} = (h)^{(2k-n)}\, \frac{(-1)^k}{2^n} \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n-2k},$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{dla } n \text{ parzystego}\\ \text{dla } n \text{ nieparzystego}\end{array}\right\} k = 0,1,\ldots,\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{2}\\ \frac{n-1}{2}\end{array}\right. \tag{3.12}$$

$$B^{\{i\}}_{(n)} = 0, \text{ dla } i = n-2k$$

Wielkości liniowe oraz nieliniowe występujące w równaniu wariacyjnym (2.6) w pracy [2] będą przekształcane przy wykorzystaniu następujących wzorów:

$$\int_{-h}^{h} (x^3)^k \, u \, P_{(n)} dx^3 = L^{(k)}_{(n)} [u],$$

gdzie:

$$L^{(k)}_{(n)} [u] = \int_{-h}^{h} (x^3)(\sum_{i=0}^{(i)} u \; P_{(i)}) P_{(n)} \; dx^3 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} A^{(k)}_{(i)}(n) \cdot C(n-k+2i-2) \; \frac{(n-k+2i-2)}{u}$$

oraz

$$\int_{-h}^{h} (x^3)^k \; u \cdot v \cdot P_{(n)} dx^3 = L^{(k)}_{(n)} [u,v], \tag{3.13}$$

gdzie

$$L^{(k)}_{(n)} [u,v] = \sum_{i,k=0} \sum_{p=1}^{i+j+1} A^{(i+j}_{(p)}(k) B^{(i)}_{(u)} \; C(k-i+2p-j-2)$$

$$\frac{(k)}{u} \; \frac{(k-i+2p-j-2)}{v}$$

Operatory $L^{(i)}_{(j)} [u,v]$ są symetryczne oraz zachodzi oczywisty związek

$$L^{(i)}_{(j)}[u] = L^{(i)}_{(j)}[u,1] \tag{3.14}$$

Zapisując funkcje u, v ($u = \sum_{i=0}^{N} \frac{(i)}{u} P_{(i)}$) w postaci wektorowej $\vec{u}$, $\vec{v}$ ($\vec{u} = \frac{0}{u}, \frac{1}{u}, \ldots, \frac{N}{u}$), operatory $L^{(i)}_{(j)}$ można zapisać w wygodnej do obliczeń numerycznych postaci macierzowej

$$L^{(i)}_{(j)}[u, v] = \vec{u}\, L^{i}_{j}\, \vec{v}^{T} \tag{3.15}$$

Powyżej L^{i}_{j} jest macierzą typu $(N + 1)\times(N + 1)$.
Rozpisując wzór $(3.13)_4$ macierze L^{i}_{j} można zapisać w postaci:

$$L^{i}_{j} = \sum_{k=0}^{i} B^{(k)}_{(j)}\, D(k+i) \tag{3.16}$$

Wielkości $B^{(k)}_{(j)}$ są współczynnikami rozwinięcia wielomianu $P_{(j)}$, wzór (3.11), natomiast D i to macierze symetryczne o wymiarach $(N+1)\ (N+1)$, o wyrazach określonych wzorami:
dla k parzystego

$$[D(k)]_{ij} = \begin{cases} C(j-1)\, A^{(k)}_{(k/2-1)}(i-1), \text{ dla } |i-j| = 2l,\ l = 0,1,\ldots k/2 \\ 0 \text{ dla pozostałych } i, j. \end{cases} \tag{3.17}$$

dla k nieparzystego

$$[D(k)]_{ij} = \begin{cases} C(j-1)\, A^{(k)}_{(k/2+1/2-1)}(i-1), \text{dla } |i-j| = 2l-1,\ l=1,\ldots \frac{k+1}{2} \\ 0, \text{ dla pozostałych } i, j. \end{cases}$$

We wzorach (3.17) przez $[\cdot]_{ij}$ oznaczono element ij macierzy ujętej w nawiasy.

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
СОПРЯЖЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОЛСТЫХ ОБОЛОЧЕК
I. ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ

Р е з ю м е

В работе проанализировано задачу толстой оболочки имея в виду применение метода моментов к уравнениям нелинейной сопряженной термоупругости толстых оболочек. Представлено подход который делает возможным учёт нелинейности в методе моментов при одновременным значительным упрощении записи.

VARIATIONAL EQUATIONS OF THE COUPLED NONLINEAR THERMOELASTICITY OF THICK SHELLS
I. GENERAL PROBLEMS

S u m m a r y

The paper presents an analysis of the problem of thick shell in connection with the application of the method of moments to the bariational equations of coupled nonlinear thermoelasticity of thick shell. The procedure which is presented in this paper enables to account for the nonlinearity in the method of moments and leads to significant simplification of notation.

Wpłynęło do Redakcji 9.X.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski