ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 39 Nr kol. 686

Tomasz JĘKOT

RÓWNANIA WARIACYJNE NIELINIOWYCH PROBLEMÓW TERMOSPRĘŻYSTOŚCI SPRZĘŻONEJ POWŁOK GRUBYCH
II. RÓWNANIA ITERACYJNE

Streszczenie. W pracy wyprowadzono równania iteracyjne sprowadzające problem przestrzenny powłoki grubej, poddanej wpływom termicznym, do zagadnienia dwuwymiarowego. Uwzględniono ogólne sprzężone równania przewodnictwa i równowagi, nieliniowość geometryczną oraz fizyczną.

1. Wstęp

Stan powłoki grubej w niestacjonarnym polu termicznym określony jest przez pole temperatur Θ oraz przez pole przemieszczeń. Wielkości te zależne są od trzech zmiennych przestrzennych oraz czwartej - czasu. Zastosowanie metody elementów skończonych bądź różnic skończonych - przy wykorzystaniu ogólnych równań wariacyjnych lub cząstkowych, dla funkcji określonych w przestrzeni i czasie - prowadzi do bardzo złożonych algorytmów i w rezultacie uzyskujemy układy algebraiczne o dość znacznej ilości równań. Wspomniane zadania omawiane są np. w publikacji [5]. W pracach [9], [10], omawiających problemy powłok grubych, stosowana jest metoda momentów podana w [7], [8]. W opracowaniach tych wyprowadzono iteracyjne równania cząstkowe pozwalające na obniżenie wymiaru przestrzeni określoności poszukiwanych funkcji. Przyjęto równania przewodnictwa cieplnego i równowagi dynamicznej, lecz ograniczono się do przypadków geometrycznie liniowych. W pracy [10] przytoczono pewne propozycje uogólniania zastosowanych metod na przypadki zlinearyzowane geometrycznej nieliniowości.Konkretnych algorymtów jednak tam nie zbudowano.

W niniejszej pracy wykorzystano metody momentów stosowane w [6], [9], [10] oraz pewną dodatkową procedurę, wyprowadzoną w pracy [3], pozwalającą na uwzględnienie nieliniowości geometrycznej oraz nieliniowości fizycznej. W pracy tej stosujemy postać równań konstytutywnych zaproponowanych przez Murnaghana, a stosowanych już przez nas w pracy [1]. Przekształcone w ten sposób równania wariacyjne mają pewne zalety w porównaniu z rekurencyjnymi równaniami cząstkowymi, np. łatwo w nich uwzględnić warunki brzegowe; dodatkowo stanowią one dogodną postać do zastosowania metody elementów skończonych. Dzięki zastosowaniu operatorów zaproponowanych w [3] znacznie uproszczono zapis równań, ułatwiając przy tym algorytmizację zagadnienia.

2. Iteracyjne równania wariacyjne

W równaniu (2.6), przedstawionym w [2], przyjmujemy następującą postac funkcji mnożnikowej:

$$v(x^1,x^2,x^3,t) = \bar{v}^{(n)}(x^1,x^2,x^3,t) = v(x^1,x^2,t)P_{(n)}(\frac{x^3}{h}) = v\,P_{(n)}$$

$$w_i(x^1,x^2,x^3,t) = w_i^{(n)}(x^1,x^2,x^3,t) = w_i(x^1,x^2,t)P_{(n)}(\frac{x^3}{h}) = w_i\,P_{(n)} \tag{2.1}$$

$$i = 1,2,3, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots .$$

Wykorzystując wzory p. 2.3, cz. I, otrzymamy przekształcenie pierwszej całki objętościowej wzory (2.6) (lireratura p. [2])

$$\int_V q^i[v(x^1,x^2,x^3,t)]_{,i}\,dV = \int_V q^i[v\,P_{(n)},_i]\,dV = \int_{S_o}\int_{-h}^{h}\Big\{q^{\alpha}v_{,\alpha}P_{(n)} +$$

$$+ \bar{q}^3\,v[P_{(n)}]_{,3}\sqrt{G}\Big\}dx^3dx^1dx^2 = \int_{S_o}\int_{-h}^{h}\Big\{(\sum_{k=0}\frac{(k)}{q^{\alpha}}P_{(k_y)})v_{,\alpha}P_{(n)} +$$

$$+ \sum_{k=0}\frac{(k)}{q^3}P_{(k)})\,v\Big[1/h\sum_{l=0}(2n-4l-1)P_{(n-2l-1)}\Big]\Big\}[1-2Hx^3+k(x^3)^{(2)}]dx^3dS_o =$$

$$= \int_{S_o}\Big\{\sum_{i=0}^{2}G(i)L_{(n)}^{(i)}[q^{\alpha}]v_{,\alpha} + 1/h\sum_{l=0}(2n-4l-1)L_{(n-2l-1)}^{(i)}[q^3]\,v\Big\}dS_o =$$

$$= C(1) \tag{2.2}$$

Stosując analogiczne przekształcenia dla trzeciej całki objętościowej wyżej przytoczonego równania (2.6), otrzymamy:

$$\int_V [u^i q_{ik}(I^{1/2}B^{jl}v)_{;l} - 1/2\; I^{1/2}\; g_{ij}B^{kl}\; \frac{\partial}{\partial t}(u^i_{;k}\; u^j_{;l})v]\, dV =$$

$$= \int_{S_o}\int_{-h}^{h} \Big\{\sum_{k=0} \overset{(k)}{\dot{u}^i}\; P_{(k)}g_{ik} \sum_{l=0} \Big[\overset{(l)}{\overline{(I^{1/2}B^{kl})}}_{;l}\; v\; P_{(n)} + \overset{(l)}{\overline{I^{1/2}B^{k\alpha}}}\; v_{,\alpha}\; P_{(n)} +$$

$$+ \overset{(l)}{\overline{I^{1/2}B^{k3}}}\Big(P_{(n)}\Big)_{,3}\; v\Big]P_{(l)} + 1/2\; g_{ij}\Big(\sum_{l=0} \overset{(l)}{\overline{I^{1/2}B^{kl}}}\; P_{(l)}\Big)\Big[\sum_{k=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\; \overset{(k)}{\overline{(u^i_{;k}\; u^j_{;l})}}\quad P_{(k)}\Big]v\; P_{(n)}\Big\}\; \sqrt{G}\; dx^1dx^2dx^3 =$$

$$= \int_{S_o}\Big\{\sum_{i=0} G_{ik}(i)(L^{(i)}_{(j)}\Big[\dot{u}^i, (I^{1/2}B^{kl})_{;l}\Big]v + L^{(i)}_{(n)}\Big[u^i,\; I^{1/2}B^{kl}\Big]\; v_{\alpha} +$$

$$+ 1/h \sum_{i=0} (2n - 4l - 1)\; L^{(i)}_{(n-2l-1)}\; [u^i,\; I^{1/2}B^{k3}]\; v) +$$

$$+ 1/2 \sum_{i=0} G_{ij}(i)\; L^{(i)}_{(n)}\Big[I^{1/2}B^{kl},\; \frac{\partial}{\partial t}\; u^i_{;k}\; u^j_{;l}\Big]\; v\Big\}\; dS_o = C(2) \qquad (2.3)'$$

Dla czwartej całki objętościowej równania (2.6) pracy [2] otrzymamy:

$$\int_V T^{ji}w_{i,j}dV = \int_{S_o}\int_{-h}^{h}\sum_{k=0} (\overset{(k)}{T^{\alpha i}}\; P_{(k)}w_{i,\alpha}P_{(n)} + \overset{(k)}{\bar{\bar{T}}^{3i}}\; P_{(k)}w_iP_{(n),3})$$

$$\sqrt{G}\; dx^1dx^2dx^3 = \int_{S_o}\Big\{\sum_{i=0}^{2} G(i)(L^{(i)}_{(n)}\; [T^{\alpha i}]\, w_{i,\alpha} + w_i\; 1/h \sum_{i=0}$$

$$(2n - 4l - 1)\; L^{(i)}_{(n-2l-1)}[T^{3i}]\Big\}\; d\; S_o = C(3) \qquad (2.4)$$

Pozostałe całki objętościowe występujące w równaniu (2.6) przekształcają się nieco prościej, dlatego zostały zapisane od razu w ostatecznej postaci w iteracyjnych równaniach wariacyjnych.

$$\int_{t_o}^{t_1} \Big\{ -\lambda_o \Big[\int_{S}\limits_{\Omega(1)} (I^{1/2}B^{ij}n_i f^1_{,j})\Big|_{x^3=+h} v\left(\frac{+h}{h}\right)^n dS +$$

$$+ \int_{\Omega(1)L} I^{1/2}B^{ij}n_i f^{(1)}_{,j} v\,P_{(n)}dL + \int_{S}\limits_{\Omega(2)} (f^{(2)}I^{1/2})\Big|_{x^3=+h} v\left(\frac{+h}{h}\right)^n dS +$$

$$+ \int_{L}\limits_{\Omega(2)} I^{1/2}f^{(2)} v\,P_{(n)}dL + \varkappa \int_{S}\limits_{\Omega(3)} (f^{(3)} - \Theta)\Big|_{x^3=+h} v\left(\frac{\pm h}{h}\right)^n dS +$$

$$+ \varkappa \int_{L}\limits_{\Omega(3)} (f^{(3)} - \Theta) v\,P_{(n)}dL \Big] + \dot{C}(1) + \dot{C}\,v \sum_{i=0} G(i)\,L^{(i)}_{(n)}[0] +$$

$$+ T_o\gamma \int_{S}\limits_{\Omega(4)} (I^{1/2}B^{kl}g_{ik}n_l\varphi^i)\Big|_{x^3=+h} v\left(\frac{\pm h}{h}\right)^n dS +$$

$$+ \int_{L}\limits_{\Omega(4)} I^{1/2}B^{kl}g_{ik}n_l\varphi^i v\,P_{(n)}dL + \int_{S/\Omega(4)} I^{1/2}B^{kl}g_{ik}u^i n_l v\,P_{(n)}dS +$$

$$- C(2)\Big| + \int_{S}\limits_{\Omega(5)} \Big[N^i\Big|_{x^3=\pm h} w_i\left(\frac{+h}{h}\right)^n dS + \int_{L}\limits_{\Omega(5)} N^i w_i P_{(n)}\Big]dL +$$

$$+ \int_{S\setminus\Omega(5)} T^{ji}n_j w_i P_{(n)}dS - C(3) + w_i \sum_{l=0}^{2} G(l)(L^{(i)}_{(n)}[f^i] - L^{(l)}_{(n)}[\dot{u}^i]\Big\}dt = 0 \tag{2.5}$$

W powyższych równaniach poszukiwane funkcje nie występują wszędzie w sposób jawny. W dalszej części winny być podane kolejne wzory iteracyjne, które stopniowo "ujawniają" szukane funkcje. Ze względu na to, że procedura jest analogiczna we wszystkich przypadkach, zostaną zapisane jedynie wybrane przykłady dotyczące wyznaczania momentów wielkości związanych z tensorem naprężenia i odkształcenia. Wzory $(3.7)_2$, (4.16) przedstawione w [1] zapisujemy w postaci:

$$T^{ij} = \bar{\sigma}^{il}A^j_l = \bar{\sigma}^{ij} + \bar{\sigma}^{il}u^j_{;l} \tag{2.6}$$

gdzie $\bar{\sigma}^{il}$ są elementami macierzy $\bar{\sigma}$ (p. 3 w [1]). Korzystając z zapisu przedstawionego w p. 3 cz. I możemy (2.6) zapisać następująco:

$$\overset{(n)}{T^{ij}} = \overset{(n)}{\bar{\sigma}^{ij}} + \frac{1}{C(n)} L^{(o)}_{(n)} [\bar{\sigma}^{il}, u^j_{,l}]$$

Momenty tensora $\bar{\sigma}^{il}$ uzyskamy po jawnym napisaniu elementów macierzy $\bar{\sigma}$. Poniżej symbolem $[\cdot]_{ij}$ oznaczać będziemy element ij macierzy ujętej w nawiasy.

$$\begin{aligned}
[\Theta g]_{ij} &= \Theta g^{ij}, \\
[I_{(1)}g]_{ij} &= g^{ij}g^{kl}\varepsilon_{kl}, \\
[g\varepsilon g]_{ij} &= g^{il}g^{jk}\varepsilon_{lk}, \\
[(I_{(1)})^2\, g]_{ij} &= g^{kl}g^{mn}g^{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Niezmiennik $I_{(2)}$ zapiszemy w postaci:

$$I_{(2)} = \operatorname{Tr} Co(\varepsilon g) = \sum_{l=1}^{3} [g^{kl}g^{jn}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{nj} - g^{ki}g^{jn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{nk}] \begin{bmatrix} kj \\ l \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

We wzorze (2.8) symbol $\begin{bmatrix} kj \\ l \end{bmatrix}$ oznacza priorytetową operację na wskaźnikach,

$$\begin{bmatrix} kj \\ l \end{bmatrix} \Longleftrightarrow (k \neq l,\ k = 1 \veebar 2,\ j \neq k \wedge j \neq l),$$

symbol $\veebar$ oznacza najmniejszą, dopuszczalną liczbę. Mamy dalej

$$\begin{aligned}
[I_{(2)}g]_{ij} &= g^{ij}I_{(2)} \\
[I_{(1)}g\varepsilon g]_{ij} &= g^{il}g^{jk}g^{mn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$[CO(\varepsilon)\det(g)]_{ij} = \in_{lmn} g^{1l} g^{2m} g^{3n} (-1)^{(i+j)} \Big[\varepsilon_{kl}\varepsilon_{np} +$$

$$- \varepsilon_{kp}\varepsilon_{nl}\Big]\begin{bmatrix} kn \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lp \\ j \end{bmatrix}$$

W celu wyliczenia momentów wyrażeń (2.7), (2.9) stosujemy operatory przedstawione w części I, (3.13). Ze względu na podobieństwo przekształceń napiszemy jedynie wzór na moment ostatniego wyrażenia $(2.9)_3$. Korzystamy przy tym z oznaczenia $(2.10)_2$ cz. I

$$\overset{n}{\overline{[Co(\varepsilon)\det(g)]_{ij}}} = \frac{(-1)^{(i+j)}}{C(n)} \in lmn \sum_{k=0} \overset{1L\ 2m\ 3n}{\underset{(k)}{a}} \left\{\left[L\left\{{(k) \atop (n)}\right\}\left[\varepsilon_{kl},\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\varepsilon_{np}\right]\right]\begin{bmatrix} kn \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lp \\ j \end{bmatrix} - \left[L\left\{{(k) \atop (n)}\right\}\left[\varepsilon_{kp},\varepsilon_{nl}\right]\right]\begin{bmatrix} kn \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lp \\ j \end{bmatrix}\right\}$$

Zależność momentów tensora odkształcenia Greena (3.1), [1] od poszukiwanych momentów przemieszczenia jest następująca:

$$\overset{(n)}{\overline{\varepsilon_{ij}}} = \frac{1}{2C(n)} \sum_{l=0}^{2} \Big(L\left\{{(l) \atop (n)}\right\}\left[u^k_{;j}\right] \underset{ik}{\overset{(l)}{a}} + L\left\{{(l) \atop (n)}\right\}\left[u^k_{;i}\right] \underset{kj}{\overset{(l)}{a}} +$$

$$+ L\left\{{(l) \atop (n)}\right\}\left[u^k_{;i}\ u^p_{;j}\right] \underset{kp}{\overset{(l)}{a}}\Big)$$

Korzystając ze wzorów $(2.11)_3$, (3.10) część I zapiszemy:

$$\overset{(n)}{\overline{u^k_{;i}}} = \overset{(n)}{\overline{u^k_{,i}}} + \frac{1}{C(n)} \sum_{l=0} \left({k \atop ij}\right)_{(l)} L\left\{{(l) \atop (n)}\right\}[u^j],$$

$$u^k_{;i} = (2n+1) \sum_{i=0} \frac{(n+2i+1)}{u^k}$$

Wniosek końcowy

Zastosowanie wielomianów Legendre'a pozwala uwzględnić nieliniowości wyższych rzędów.

LITERATURA

[1] JĘKOT T.: Nieliniowe geometrycznie problemy termosprężystości sprzężonej powłok grubych. I. Sformułowanie warunków brzegowych. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[2] JĘKOT T.: Nieliniowe geometrycznie problemy termosprężystości sprzęrzonej powłok grubych. II. Równania wariacyjne i rozwiązania uogólnione. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[3] JĘKOT T.: Równania wariacyjne nieliniowych problemów termosprężystości sprzężonej powłok grubych. I. Zagadnienia ogólne. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 39.

[4] WOŹNIAK C.: Nieliniowa teoria powłok. PWN, Warszawa 1966.

[5] ZIENKIEWICZ O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.

[6] БАЖЕНОВ В.Н., ГУЛЯЕВ В.И., ЛИЗУНОВА П.П.: Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек с быстро изменяющейся толщиной на основе теории И.И. Векуа, Теор. и Прикл. Мех., вып. 10, 1979, 43-51.

[7] ВЕКУА И.И.: Об одном направлении построения теории оболочек, Механика в СССР за 50 лет, Наука 1972, 267-290.

[8] ВЕКУА И.И.: Теория тонких и пологих оболочек переменной толщины. Тбилиси, 439-60, "Мецниереба", 1965.

[9] ГОЦУЛЯК Е.А., ГУЛЯЕВ В.И., ЧИБИРЯКОВ В.К.: Дифференциальные уравнения термоупругого состояния оболочек при тепловом ураре по поверхности, Прикл. Мех. 1973, т. 9, № 2.

[10] ГУЛЯЕВ В.И., БАЖЕНОВ В.А., ЛИЗУНОВ П.П.: Неклассическая теория оболочек. "Высшая Школа", 1978.

[11] СУЕТИН П.К.: Классические ортогональные многочлены, "Наука" 1979.

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОЛСТЫХ ОБОЛОЧЕК II. ИТЕРАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Р е з ю м е

Выведено итерационные уравнения для приведения пространственной задачи термоупругости толстых оболочек подверженных термическим эффектам к двумерной задачи. Выведены уравнения учитывают общие сопряженные уравнения теплопроводности и равновесия и физическую и геометрическую нелинейность.

VARIATIONAL EQUATIONS OF THE COUPLED NONLINEAR THERMOELASTICITY
OF THICK SHELLS
II. ITERATIONAL EQUATIONS

S u m m a r y

The iterational equations have been derived which reduce the threedimensional problem of the thick shell subjected to thermal effects to the twodimensional case. This approach accounts for general coupled equations of heat conduction and equilibrium as well as for geometrical and physical nonlinearity.

Wpłynęło do Redakcji 9.X.1980 r.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski