

Adam WALANUS

Instytut Fizyki Politechniki Śląskiej  
w GliwicachOBIEKTYWIZACJA SUBIEKTYWNYCH ELEMENTÓW INTERPRETACJI WYNIKÓW  
POMIARÓW FIZYCZNYCH NA PRZYKŁADZIE DATOWAŃ METODĄ  $^{14}\text{C}$ 

**Streszczenie.** Logicznym uzasadnieniem wnioskowania o rzeczywistym wieku próbki na podstawie wyniku pomiaru tego wieku jest twierdzenie Bayesa. Występujące w tym twierdzeniu prawdopodobieństwa a priori, zawierające niepewne informacje o wieku próbki posiadane przed pomiarem mogą być traktowane jak prawdopodobieństwa subiektywne. Wyniki stosowania twierdzenia Bayesa z subiektywnymi rozkładami prawdopodobieństwa a priori wydają się być zgodne z intuicją. Zaproponowane podejście umożliwia wykorzystanie wszystkich dostępnych informacji o wieku próbki przy zachowaniu kontroli wpływu tych subiektywnych danych na wynik końcowy.

Rzeczywisty wiek próbki  $T_R$  jest wielkością dość dobrze intuicyjnie określona. Wynik pomiaru rzeczywistego wieku próbki, determinowany jest przez ten wiek i metodę pomiarową. W pomiarze fizycznym zawsze obecny jest czynnik losowości. Na przykład przy wyznaczaniu wieku klasycznymi metodami  $^{14}\text{C}$  dokładność wyniku zależy przede wszystkim od losowego procesu rozpadów  $^{14}\text{C}$ . Jeżeli metoda pomiarowa jest dokładnie znana i w pełni kontrolowana, to występujące w niej przyczyny rozmycia wyniku końcowego można dość dokładnie opisać. Opis taki można sformułować w postaci rozkładu prawdopodobieństwa wyniku. Tak więc wynik pomiaru  $T$  wieku próbki o wieku rzeczywistym  $T_R$ , pewną metodą pomiarową, jest określony przez rozkład prawdopodobieństwa  $f(T)$ . Postać i parametry tego rozkładu zależą od metody pomiarowej i od  $T_R$ . Najczęściej jest to rozkład normalny:

$$f(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta T} \exp \left[ -\frac{(T - T_R)^2}{2 \Delta T^2} \right]. \quad (1)$$

Przed pomiarem wynik pomiaru  $T$  jest zmienną losową opisywaną rozkładem prawdopodobieństwa o nieznanym parametrze  $T_R$ . Natomiast po pomiarze jest do dyspozycji konkretna realizacja zmiennej losowej  $T$ , która jest już liczbą.  $T_R$  jednak pozostaje dalej nieznaną.

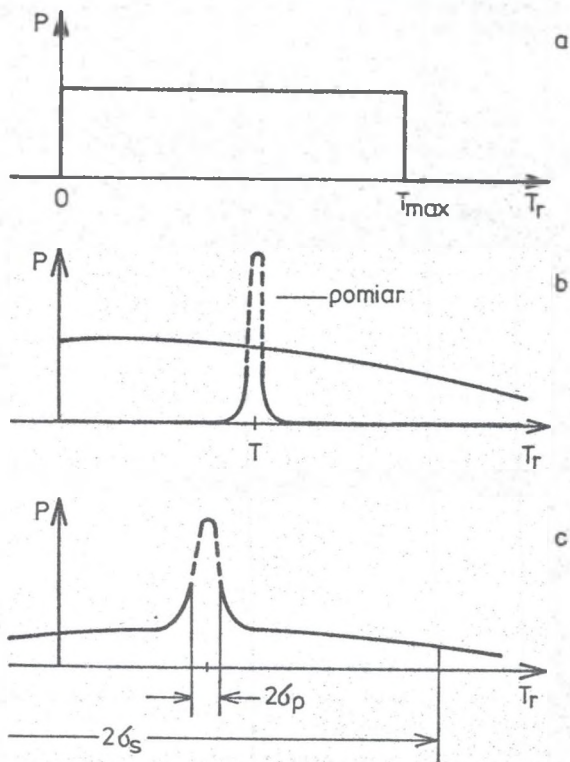
Nie ma podstaw logicznych, aby bezpośrednio utożsamiać  $T_R$  z wynikiem pomiaru  $T$ , a rozkład prawdopodobieństwa  $f(T)$  traktować jak rozkład zmien-

nej  $T_R$  z parametrem  $T$ . Co w takim razie i na jakiej podstawie można powiedzieć o  $T_R$  po pomiarze? Sposobem na obliczenie prawdopodobieństwa przyczyn jest twierdzenie Bayesa. W tym przypadku  $T_R$  jest przyczyną a  $T$  skutkiem. Twierdzenie Bayesa jest elementarną regułą związaną z pojęciem prawdopodobieństwa warunkowego, można zapisać je w następujący sposób:

$$P(T_R|T) \sim P(T|T_R) \cdot P(T_R). \quad (2)$$

$P$  oznacza tu prawdopodobieństwo lub funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Zmienną wielkością jest  $T_R$  i jej dotyczy proporcjonalność,  $T$  jest stałą. Odczytać regułę Bayesa można następująco: prawdopodobieństwo, że rzeczywisty wiek próbki wynosi  $T_R$ , pod warunkiem, że wynik pomiaru wynosi  $T$  jest proporcjonalne do iloczynu prawdopodobieństw, że wynik pomiaru będzie  $T$ , pod warunkiem, że rzeczywisty wiek wynosi  $T_R$  i prawdopodobieństwa a priori, że rzeczywisty wiek wynosi  $T_R$ . Rozkład  $P(T|T_R)$  jest związany z pomiarem, jest on tym rozkładem, który w wzorze 1 jest oznaczony przez  $f(T)$ .

Największe wątpliwości budził zawsze rozkład prawdopodobieństwa a priori. Jest to rozkład rzeczywistego wieku próbki dla stanu wiedzy sprzed po-



Rys. 1. Przykłady rozkładów gęstości prawdopodobieństwa a priori

miaru. Sposób wyznaczenia tego rozkładu był przedmiotem sporów od początków twierdzenia Bayesa. Sam Bayes postulował, by, ponieważ przed pomiarem przecież nic nie wiadomo o  $T_R$ , przyjąć, że jednakowo prawdopodobne są wszystkie możliwe wartości  $T_R$ . Ilustruje to rysunek 1a. Które jednak wartości  $T_R$  są możliwe, a które nie? Próbką nie może być starsza niż 5 mld lat ale czy oznacza to, że wiek 4,9 mld lat jest tak samo prawdopodobny jak 1000 lat? Nie można znaleźć takiej wartości  $T_{max}$ , dla której sensownie można by przyjąć, że Prawdopodobieństwo ( $T_R > T_{max} = 0$  i jednocześnie wiek dowolnie bliski  $T_{max}$  jest tak samo prawdopodobny jak każdy wiek, np. 10 lat.

Rozkład prawdopodobieństwa a priori powinien zawierać w sobie informacje o wieku  $T_R$  posiadane przed pomiarem. Informacje takie mogą mieć najróżniejszy charakter, od bardziej obiektywnych, np. wyników datowania innymi metodami do zupełnie subiektywnych opinii badacza. Wymaganie absolutnej obiektywności prowadzi zwykle do absurdu. Z drugiej strony coraz szerzej w statystyce matematycznej wykorzystywane jest obecnie pojęcie prawdopodobieństwa subiektywnego. Twierdzi się nawet czasami, że każde prawdopodobieństwo ma charakter subiektywny. Przyjęcie, iż rozkład prawdopodobieństwa a priori jest rozkładem subiektywnym, wydaje się być zgodne z duchem twierdzenia Bayesa.

Najczęściej występującym przypadkiem stosunku pomiaru do przedpomiarowych przewidywań jest sytuacja, gdy przed pomiarem o wieku próbki "nic nie wiadomo", określana też jako przypadek pomiaru precyzyjnego. Stwierdzenie że o wieku nic nie wiadomo, oznacza, że przedział, w którym z prawdopodobieństwem np. 0,9 znajduje się wiek rzeczywisty, jest szeroki w porównaniu z dokładnością określenia wieku w pomiarze. Ilustruje to rysunek 1b, na którym przedstawiony jest przykład rozkładu prawdopodobieństwa a priori i wynik pomiaru. Rozkład a posteriori jest tu prawie identyczny z rozkładem prawdopodobieństwa otrzymanym z pomiaru, gdyż rozkład a priori  $P(T_R)$  jest praktycznie stały w przedziale, na którym skupione jest prawie całe prawdopodobieństwo rozkładu  $P(T|T_R)$ . Nad rozkładem a priori w tym najczęstszym przypadku nie trzeba się więc w ogóle zastanawiać.

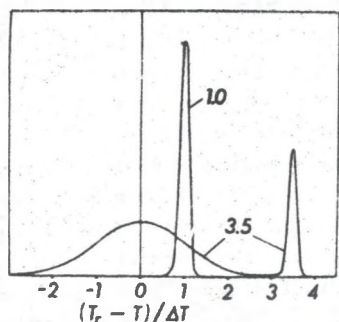
Następny przypadek to "szkła hipoteza zerowa". W formę subiektywnego rozkładu prawdopodobieństwa a priori mogą być ujęte przekonania badacza o wieku próbki, potwierdzenia których szuka on w pomiarze. Sformułowania typu: "wiek najprawdopodobniej wynosi  $T_p$ , ale nie wykluczone, że jest zupełnie inny", można przetłumaczyć na język rozkładów prawdopodobieństwa na przykład w następujący sposób:

$$P = (1 - \lambda) \cdot N(T_p, \sigma_p) + \lambda \cdot N(T_p, \sigma_a). \quad (3)$$

Rozkład a priori jest tu sumą dwóch rozkładów normalnych o tej samej wartości oczekiwanej, lecz różnych dyspersjach. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem  $1 - \lambda$  równym na przykład 0,7 przewiduje się iż próbka ma wiek  $T_p$ , przy czym dokładność określenia  $T_p$  jest rzędu  $\sigma_p$  (rys. 1c). Natomiast z prawdopodobieństwem  $\lambda = 0,3$  wiek jest praktycznie jakikolwiek,



gdyż podlega rozkładowi normalnemu z bardzo dużą dyspersją  $\sigma_a \gg \sigma_p$ . Na rysunku 2 pokazane są dwa rozkłady gęstości prawdopodobieństwa a posteriori otrzymane dla rozkładu a priori (3). Jeden z nich odpowiada przypadkowi, gdy przewidywany wiek  $T_p$  różni się od wyniku pomiaru o wartość jednego błędu pomiarowego  $\Delta T$ , co oznacza potwierdzenie hipotezy, że  $T_r = T_p$ . Drugi rozkład opisuje sytuację, gdy wiek przewidywany  $T_p$  różni się od wyniku pomiaru  $T$  o  $3,5\Delta T$ , czyli o wielkość nie pozwalającą na jednoznaczne przyjęcie lub odrzucenie hipotezy  $T_r = T_p$ .



Rys. 2. Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa a posteriori dla rozkładów a priori o postaci (3), gdzie  $\chi = 0,5$ ,  $\sigma_p = 0,1 \Delta T$ ,  $\sigma_a = 100 \Delta T$ . Wiek przewidywany  $T_p$  różni się od wyniku pomiaru  $T$  odpowiednio o  $1,0 \Delta T$  i  $3,5 \Delta T$

Modelu (3) rozkładu a priori można użyć w słabo jak dotąd teoretycznie opracowanych sytuacjach, gdy badacz odrzuca zupełnie wynik pomiaru. Wielkość  $\chi$  może być interpretowana jako poziom nieufności do wyniku pomiaru. Wielkość taka jest z gruntu subiektywna, co jednak nie wyklucza stosowania ścisłych reguł interpretacji wyniku.

Na rysunku 3 zilustrowany jest konkretny przykład próbki Gd-698, węgli drzewnych ze stanowiska w Radzikowie. Na podstawie znalezionych w sąsiedztwie próbki wczesnośredniowiecznych naczyń ceramicznych spodziewano się, iż próbka pochodzi z VI-VII wieku. Wynik pomiaru natomiast wynosi  $795 \pm 55$  lat AD. Jeżeli przyjąć nierealistycznie, że rozkład a priori ma być rozkładem równomiernym (wykres a na rys. 3), to rozkład a posteriori ma wtedy postać uciętego rozkładu normalnego (wykres c). Bardziej sensowne założenie rozkładu normalnego (b) jako rozkładu opisującego przewidywanie wieku daje w iloczynie z wynikiem pomiaru (wykres p), zgodnie z (2) rozkład a posteriori również normalny (d). Wartość oczekiwana rozkładu a posteriori wynosi 750 lat AD i jest różna od wyniku pomiaru.

Rys. 3. Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa a priori (a, b), wynik pomiaru (p) i rozkłady a posteriori (c, d) dla próbki Gd-698

Ogólną cechą metody subiektywnych rozkładów prawdopodobieństwa a priori jest to, że pozwala ona wykorzystać wszystkie posiadane informacje o próbce przy zachowaniu kontroli ich wpływu na ostateczną interpretację wyniku datowania, czyli na rozkład a posteriori. Ponadto formułowanie przewidywań o wieku próbki w postaci rozkładów prawdopodobieństwa jest komunikatywne.

## LITERATURA

- Barnard G.A., 1958, Thomas Bayes's essay towards solving a problem in the doctrine of chances; *Biometrika* 45, 293.
- Carnap R., 1950, Logical foundations of probability; Univ. Chicago press, Chicago.
- DeFinetti B., 1974, Theory of probability (A critical introductory treatment); vol. 1, Wiley, London - New York - Sydney.
- DeGroot M.H., 1981, Optymalne decyzje statystyczne; PWN, Warszawa.
- Hacking I., 1965, Logic of statistical inference; Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Hampton J.M., Moore P.G., Thomas H., 1973, Subjective probability and its measurement; *J.R. Statist. Soc.*, A136. 21.
- Kozielecki J., 1977, Psychologiczna teoria decyzji; PWN, Warszawa.
- Savage L.J., 1962, The foundations of statistical inference; Methuen London.
- Walanus A., 1983, Zagadnienia podstawowe interpretacji wyników pomiarów fizycznych na przykładzie datowań metodą  $^{14}\text{C}$ ; *Archeologia Polski*, 28. 7-17.

## ОБЪЕКТИВИЗАЦИЯ СУБЪЕКТИВНЫХ АСПЕКТОВ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ РАДИОУГЛЕРОДНОГО ДАТИРОВАНИЯ

## Р е з ю м е

Логической основой для делания выводов о действительном возрасте образца из результатов измерения этого возраста является теорема Байеса. Вероятность априори в этой теореме содержит неполную информацию о возрасте образца перед измерением и может быть считана субъективной вероятностью. Результаты применения теоремы Байеса содержащей субъективные распределения вероятности априори согласны с интуицией. Предложенный подход делает возможным использование всей доступной информации о возрасте образца при одновременном сохранении контроля влияния этих субъективных данных на конечный результат.

## OBJECTIVIZATION OF THE SUBJECTIVE ELEMENTS OF THE INTERPRETATION OF RESULTS OF PHYSICAL MEASUREMENTS ON THE EXAMPLE OF RADIOCARBON AGE MEASUREMENTS

## S u m m a r y

The Bayes theorem forms the logical basis for the inference on the real age of a sample from results of measurements of this age. The a priori probability occurring in the Bayes theorem and containing unreliable information on the age of sample prior to the measurement could be regarded

as subjective probability. The results of application of the Bayes theorem with the subjective a priori probability distribution seem to be consistent with intuition. Proposed approach enables usage of all available information on age of sample providing the influence of those subjective data on final results remain controlled.