ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 51 Nr kol. 874

Barbara BIŁY

Instytut Matematyki
Politechnika Śląska

# STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ PEWNYM UKŁADEM DYNAMICZNYM TYPU 2-D

Streszczenie. W pracy podano metodę wyznaczania sterowań optymalnych w problemie minimalno-energetycznym dla pewnego układu dwuwymiarowego, liniowego, stacjonarnego, opisanego modelem Fornasiniego-Marchesiniego.

## 1. Wprowadzenie

Układy dynamiczne typu 2-D są to układy dyskretne o dwu zmiennych niezależnych, czyli układy określone w dyskretnych punktach płaszczyzny. Rozwój teorii tych układów w ostatnich latach wiąże się ściśle z coraz szerszym ich zastosowaniem w praktyce [7].

Znanych jest kilka modeli systemów 2-D. W niniejszej pracy rozważany będzie jeden z nich, który podali Fornasini i Marchesini w 1976 r. [1].

Zagadnienie tu rozważane zostało po raz pierwszy postawione i rozwiązane w pracy J. Klamki [4], przy czym dotyczyło ono innego modelu, tzw. modelu Roessera [7]. Celem tej pracy jest podanie innej metody opartej na programowaniu dynamicznym. Specyfika samego układu i związanych z nim warunków brzegowych (odmiennych niż w pracy [4]) pozwoliła na zastosowanie tej formy rozwiązania zadania.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Dla dowolnego punktu $(r,s) \in Z^+ \times Z^+$
($Z$ - zbiór liczb całkowitych) definiujemy zbiory punktów $D_{r,s}$ i $C_k^{r,s}$ w sposób następujący [5]:

$$D_{r,s} = \left\{(i,j) \in Z \times Z;\ -s < i \leq r,\ -r \leq j < s,\ (i+j) \geq 0\right\}$$

$$C_k^{r,s} = \left\{(i,j) \in D_{r,s} : 0 \leq k = (i+j) \leq (r+s)\right\} =$$

$$= \left\{(r,-r+k),\ (r-1,-r+k-1),\ \ldots,\ (-s+1+k,s-1),\ (-s+k,s)\right\}$$

Rozważmy układ dwuwymiarowy, liniowy, stacjonarny opisany następującym równaniem [1]:

$$x(i+1,j+1) = A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1) \tag{2.1}$$

przy warunkach początkowych

$$x(h,-h) = x_0(h), \tag{2.2}$$

gdzie:

$h \in Z$, $(i,j) \in Z \times Z$, $A_1,A_2 \in R^{n\times n}$, $B_1,B_2 \in R^{n\times m}$,
$u(i,j) \in R^m$ – wektor sterowań,
$x(i,j) \in R^n$ – wektor stanu.

Niech będzie również dany wskaźnik jakości, będący formą kwadratową ze względu na sterowanie u, postaci następującej:

$$J_{r,s}(\{u(i,j)\}) = \sum_{(i,j)\in D_{r,s}-C^{r,s}_{r+s}} u^T(i,j)P(i,j)u(i,j), \tag{2.3}$$

gdzie: $P(i,j) \in R^{m\times m}$ – macierz symetryczna, dodatnio określona.
Ponadto niech

$$x(r+s) = C \in R^n \tag{2.4}$$

będzie zadanym wektorem stanu w punkcie (r,s).

Problem sterowania z minimalną energią układem (2.1) polega na wyznaczeniu sekwencji sterowań $u(i,j),(i,j) \in D_{r,s}-C^{r,s}_{r+s}$, tak, aby wektor stanu dla ustalonego punktu (r,s) osiągał zadaną wartość c, a funkcjonał jakości (2.3) przyjmował wartość minimalną.

Przy założeniu, że rozpatrywany układ dynamiczny jest lokalnie sterowalny [3], [6] można rozwiązać powyższy problem podając wzory rekurencyjne wyznaczające postać sterowania u(i,j) oraz obliczając minimalną wartość funkcjonału jakości odpowiadającą temu sterowaniu.

Problem sterowania z minimalną energią układem typu 2-D oraz 3-D w modelach typu Roessera był rozpatrywany odpowiednio w pracach [4] oraz [2].

## 3. Transformacja układu (2.1)

Dla rozwiązania problemu sterowania z minimalną energią przekształcamy układ (2.1) typu 2-D do pewnego równoważnego mu układu 1-D liniowego, niestacjonarnego, dyskretnego o zmieniających się wymiarach macierzy.

W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenia [5]:

dla dowolnego punktu $(r,s) \in Z^+ \times Z^+$ definiuje się:

$$x_{r,s}(k) = \begin{bmatrix} x(r,-r+k) \\ x(r-1,-r+k+1) \\ \vdots \\ x(-s+k,s) \end{bmatrix} \in R^{n(r+s-k+1)} \qquad k = 0,1,\dots,(r+s) \tag{3.1}$$

$$u_{r,s}(k) = \begin{bmatrix} u(r,-r+k) \\ u(r-1,-r+k+1) \\ \vdots \\ u(-s+k,s) \end{bmatrix} \in R^{m(r+s-k+1)} \qquad k = 0,1,\dots,(r+s) \tag{3.2}$$

i odpowiednio:

$$A_{r,s}(k) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,\dots,(r+s-1) \tag{3.3}$$

$A_{r,s}(k)$ jest macierzą prostokątną o wymiarach $n(r+s-k) * n(r+s-k+1)$ zależnych od zmiennej $k$.

$$B_{r,s}(k) = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & B_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,\dots,(r+s-1) \tag{3.4}$$

$B_{r,s}(k)$ jest macierzą prostokątną o wymiarach $n(r+s-k) * m(r+s-k+1)$ zależnych od zmiennej $k$.

Używając oznaczeń (3.1) - (3.4) można równanie (2.1) przekształcić w równoważną mu formę [5]:

$$x_{r,s}(k+1) = A_{r,s}(k)x_{r,s}(k) + B_{r,s}(k)u_{r,s}(k) \tag{3.5}$$

z danym warunkiem początkowym $x_{r,s}(0)$.

Podobnie można transformować postać funkcjonału jakości (2.3) otrzymując następujący wzór [5]:

$$J_{r,s}(u(i,j)) = J_{r,s}(u_{r,s}(k)) = \sum_{k=0}^{k=r+s-1} u^T_{r,s}(k)P_{r,s}(k)u_{r,s}(k), \quad (3.6)$$

gdzie:

$$P_{r,s}(k) = \mathrm{diag}(P(r,-r+k),\ P(r-1,-r+k+1),\dots,\ P(-s+k,s)) \quad (3.7)$$

$$(k = 0,1,\dots,(r+s-1))$$

jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną, wymiaru:

$$m(r+s-k+1) * m(r+s-k+1).$$

Ponadto warunek (2.4) przyjmie postać

$$x_{r,s}(r+s) = c. \quad (3.8)$$

Zatem cały problem został sprowadzony do sterowanie optymalnego układu niestacjonarnego typu 1-D o zmiennej strukturze. Transformacja taka zosta-ła zaproponowana po raz pierwszy przez J. Klamkę w pracy [5].

## 4. Sterowanie z minimalną energią

Rozwiązanie zagadnienia sterowania z minimalną energią układem dyskretnym (3.5) zostało przeprowadzone przy zastosowaniu programowania dynamicznego oraz przy wykorzystaniu następującego lematu:

LEMAT 1 [6]

Jeżeli $V$ - jest skalarnym wskaźnikiem jakości postaci:

$$V = u^TAu + 2x^TBu$$

gdzie $A$ - macierz symetryczna, dodatnio określona),
to $u^*$ minimalizuje $V \Longleftrightarrow u^* = -A^{-1}B^Tx$. □

Definicja 1

Dla układu (3.5) definiujemy macierze tranzycji w sposób następujący [5]:

$A_{r,s}(k) = I_{n(r+s-k+1)}$ macierz jednostkowa $n(r+s-k+1)$ - wymiarowa

$$A_{r,s}(k,l) = A_{r,s}(k-1)A_{r,s}(k-2)\dots A_{r,s}(l+1)A_{r,s}(l)$$

dla $k > l \geq 0$

$A_{r,s}(k,l)$ są macierzami prostokątnymi o wymiarach:

$$n(r+s-k+1) * n(r+s-l+1)$$

$A_{r,s}(k,l)$ nie są definiowane dla $k < l \in Z$. □

Istotne dla rozwiązania problemu sterowania z minimalną energią jest założenie tzw, lokalnej sterowalności układu w przedziale $[0,r+s]$, czyli możliwości osiągnięcia z dowolnego stanu $x_{r,s}(0)$ dowolnego stanu końcowego $x_{r,s}(r+s)$ poprzez odpowiedni dobór sekwencji sterującej $u_{r,s}(k)$ dla $k = 0,1,\dots,(r+s-1)$ [3], [6].

Korzystając z zasady optymalności Bellmana można sformułować następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE

Przy założeniu lokalnej sterowalności układu (3.5) w przedziale $[0,r+s]$ optymalny ciąg sterowań $u_{r,s}(k)$, który minimalizuje kryterium jakości (3.6), jest określony następującymi równaniami rekurencyjnymi:

$$u^*_{r,s}(r+s-k-1) = -\Lambda(r+s-k)\left[A_{r,s}(r+s,r+s-k-1)x_{r,s}(r+s-k-1)-c\right]$$

$$k = 0,1,\dots,(r+s-1),$$

gdzie:

$$\Lambda(r+s) = P^{-1}_{r,s}(r+s-1)B^T_{r,s}(r+s-1)\ \Pi(r+s)$$

$$\Pi(r+s) = \left[B_{r,s}(r+s-1)P^{-1}_{r,s}(r+s-1)B^T_{r,s}(r+s)\right]^{-1}$$

a dla $k = 1,\dots,(r+s-1)$

$$\Lambda(r+s-k) = \left[P_{r,s}(r+s-k-1) + B^T_{r,s}(r+s-k-1)\ \Pi'(r+s-k)A_{r,s}(r+s,r+s-k)\cdot B_{r,s}(r+s-k-1)\right]^{-1} B^T_{r,s}(r+s-k-1)\ \Pi'(r+s-k)$$

$$\Pi'(r+s-k) = A^T_{r,s}(r+s,r+s-k)\ \Pi(r+s-k+1)$$

$$\Pi(r+s-k) = \Pi(r+s-k+1) - \Pi'^T(r+s-k)B_{r,s}(r+s-k-1)\ \Lambda(r+s-k)$$

$$V^*_k = \left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)x_{r,s}(r+s-k) - c\right]^T \Pi(r+s-k+1)\cdot \left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)x_{r,s}(r+s-k) - c\right]$$

Ponadto optymalna wartość kryterium jest określona wzorem:

$$J^{*}_{r,s} = V^{*}_{r+s} = \left[A_{r,s}(r+s,0)x_{r,s}(0) - c\right]^{T} \Pi(1)$$
$$\left[A_{r,s}(r+s,0)x_{r,s}(0) - c\right]$$

Dowód

Zgodnie z ideą programowania dynamicznego zdefiniujemy wartość skalarną $Z_1$ w sposób następujący:

$$Z_1 = V_1 + \mu^{T}(x_{r,s}(r+s) - c), \tag{4.1}$$

gdzie $\mu$ jest wektorem $\in R^{n}$, tzw. mnożnikiem Lagrange'a oraz

$$V_1 = \sum_{k=r+s-1}^{k=r+s-1} u^{T}_{r,s}(k)P_{r,s}(k)u_{r,s}(k) \tag{4.2}$$

Rozważmy jeden przedział sterowania:

$$Z_1 = V_1 + \mu^{T}(x_{r,s}(r+s) - c),$$

zatem zgodnie z definicją możemy zapisać, że:

$$Z_1 = u^{T}_{r,s}(r+s-1)P_{r,s}(r+s-1)u_{r,s}(r+s-1) + \mu^{T}(x_{r,s}(r+s) - c).$$

Podstawiając ze wzoru (3.5) za $x_{r,s}(r+s)$ mamy:

$$Z_1 = u^{T}_{r,s}(r+s-1)P_{r,s}(r+s-1)u_{r,s}(r+s-1) + \mu^{T}\left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) -\right.$$
$$\left. - c\right] + \mu^{T}B_{r,s}(r+s-1)u_{r,s}(r+s-1).$$

Szukając minimum $Z_1$ ze względu na $u(r+s-1)$ korzystamy z zamieszczonego lematu 1, na mocy którego optymalne sterowanie $u^{*}_{r,s}(r+s-1)$ wynosi:

$$u^{*}_{r,s}(r+s-1) = -\frac{1}{2}P^{-1}_{r,s}(r+s-1)B^{T}_{r,s}(r+s-1)\mu. \tag{4.3}$$

Jak widać, wartość wyrażenia (4.3) zależy od parametru $\mu$, który należy wyeliminować.

Ponieważ prawdziwa jest tożsamość:

$$x_{r,s}(r+s) = c = A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) + B_{r,s}(r+s-1)u_{r,s}(r+s-1),$$

więc

$$B_{r,s}(r+s-1)u^{*}_{r,s}(r+s-1) = c - A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1),$$

co przy równaniu (4.3) daje tożsamość następującą:

$$c - A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) = -\frac{1}{2}B_{r,s}(r+s-1)P^{-1}_{r,s}(r+s-1)$$

$$\cdot B^{T}_{r,s}(r+s-1)\mu$$

Z równania tego wyznaczamy wartość $\mu$:

$$\mu = 2\left[B_{r,s}(r+s-1)P^{-1}_{r,s}(r+s-1)B^{T}_{r,s}(r+s-1)\right]^{-1}\cdot\left[A_{r,s}(r+s-1)\right.$$

$$\left.\cdot x_{r,s}(r+s-1) - c\right],$$

możemy zatem zapisać:

$$u^{*}_{r,s}(r+s-1) = -P^{-1}_{r,s}(r+s-1)B^{T}_{r,s}(r+s-1)\left[B_{r,s}(r+s-1)P^{-1}_{r,s}(r+s-1).\right.$$

$$\left.\cdot B^{T}_{r,s}(r+s-1)\right]^{-1}\cdot\left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) - c\right] \tag{4.4}$$

Oznaczmy:

$$\Pi(r+s) = \left[B_{r,s}(r+s-1)P^{-1}_{r,s}(r+s-1)B^{T}_{r,s}(r+s-1)\right]^{-1} \tag{4.5}$$

($\Pi(r+s)$ jest macierzą symetryczną, wymiaru $n \times n$)
oraz

$$\Lambda(r+s) = P^{-1}_{r,s}(r+s-1)B^{T}_{r,s}(r+s-1)\,\Pi(r+s)$$

($\Lambda(r+s)$ jest macierzą o wymiarze $2m * n$).

Przy tych oznaczeniach wzór (4.4) przyjmie postać:

$$u^{*}_{r,s}(r+s-1) = -\Lambda(r+s)\left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) - c\right] \tag{4.6}$$

Obliczmy wartość $V_1^*$:

$$V_1^* = u_{r,s}^{*T}(r+s-1)P_{r,s}(r+s-1)u_{r,s}^*(r+s-1) =$$

$$= \left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) - c\right]^T \Lambda^T(r+s)P_{r,s}(r+s-1)\Lambda(r+s) \cdot$$

$$\cdot \left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) - c\right]$$

Uwzględniając, że prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$\Lambda^T(r+s)P_{r,s}(r+s-1)\Lambda(r+s) = \Pi^T(r+s)B_{r,s}(r+s-1)P_{r,s}^{-1T}(r+s-1) \cdot$$

$$\cdot P_{r,s}(r+s-1)P_{r,s}^{-1}(r+s-1)B_{r,s}^T(r+s-1) \cdot \Pi(r+s) = \Pi(r+s),$$

można $V_1^*$ zapisać jako:

$$V_1^* = \left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1) - c\right]^T \Pi(r+s)\left[A_{r,s}(r+s-1) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot\; x_{r,s}(r+s-1) - c\right] \tag{4.7}$$

Rozważmy obecnie dwa ostatnie przedziały sterowania. Stąd mamy:

$$Z_2 = V_2 + \mu^T(x_{r,s}(r+s) - c) = u_{r,s}^T(r+s-2)P_{r,s}(r+s-2)u_{r,s}(r+s-2)+Z_1$$

Z zasady optymalności wynika, że:

$$Z_2 = u_{r,s}^T(r+s-2)P_{r,s}(r+s-2)u_{r,s}(r+s-2) +$$

$$+ \left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1)-c\right]^T \Pi(r+s)\left[A_{r,s}(r+s-1)x_{r,s}(r+s-1)-c\right]$$

Zatem wstawiając za wartość $x_{r,s}(r+s-1)$ ze wzoru (3.5) otrzymujemy po odpowiednich przekształceniach zależność następującą:

$$Z_2 = u_{r,s}^T(r+s-2)\left[P_{r,s}(r+s-2) + B_{r,s}^T(r+s-2)A_{r,s}^T(r+s-1)\Pi(r+s) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot\; A_{r,s}(r+s-1)B_{r,s}(r+s-2)\right] u_{r,s}(r+s-2) +$$

$$+ \left[A_{r,s}(r+s-1)A_{r,s}(r+s-2) \cdot x_{r,s}(r+s-2) - c\right]^T$$

$$. \Pi(r+s)\left[A_{r,s}(r+s-1)A_{r,s}(r+s-2)x_{r,s}(r+s-2) - c\right] +$$

$$+ 2\left[A_{r,s}(r+s-1)A_{r,s}(r+s-2)x_{r,s}(r+s-2) - c\right]^T \Pi(r+s) \, .$$

$$. A_{r,s}(r+s-1)B_{r,s}(r+s-2)u_{r,s}(r+s-2) \tag{4.8}$$

Korzystając ponownie z lematu 1 wyznaczamy sterowanie optymalne $u^*_{r,s}(r+s-2)$ w postaci:

$$u^*_{r,s}(r+s-1) = -\left[P_{r,s}(r+s-2) + B^T_{r,s}(r+s-2)A^T_{r,s}(r+s-1)\Pi(r+s) \, .\right.$$

$$\left. . A_{r,s}(r+s-1)B_{r,s}(r+s-2)\right]^{-1} B^T_{r,s}(r+s-2)A^T_{r,s}(r+s-1) \, .$$

$$. \Pi(r+s)\left[A_{r,s}(r+s-1)A_{r,s}(r+s-2)x_{r,s}(r+s-2) - c\right] \tag{4.9}$$

Oznaczając wyrażenia:

$$\Pi'(r+s-1) = A^T_{r,s}(r+s-1)\Pi(r+s)$$

$$\Lambda(r+s-1) = \left[P_{r,s}(r+s-2) + B^T_{r,s}(r+s-2)A^T_{r,s}(r+s-1)\Pi(r+s)\right.$$

$$\left. A_{rs}(r+s-1)B_{r,s}(r+e-2)\right]^{-1} B^T_{r,s}(r+s-2)\,\Pi'(r+s-1) \tag{4.10}$$

oraz wprowadzając zdefiniowane wcześniej macierze tranzycji, można na podstawie (4.9) i (4.10) zapisać:

$$u^*_{r,s}(r+s-2) = -\Lambda(r+s-1)\left[A_{r,s}(r+s-1)A_{r,s}(r+s-2)x_{r,s}(r+s-2) - c\right] =$$

$$= -\Lambda(r+s-1)\left[A_{r,s}(r+s,r+s-2)x_{r,s}(r+s-2) - c\right] \tag{4.11}$$

Obliczamy wartość $V^*_2$:

$$V^*_2 = \left[A_{r,s}(r+s,r+s-2)x_{r,s}(r+s-2) - c\right]^T \Pi(r+s-1)\left[A_{r,s}(r+s,r+s-2) \, .\right.$$

$$\left. . x_{r,s}(r+s-2) - c\right],$$

gdzie:

$$\Pi(r+s-1) = \Pi(r+s) - \Pi'^T(r+s-1)B_{r,s}(r+s-2)\Lambda(r+s-1) \tag{4.12}$$

Prawdziwość rekurencji określonych w tezie twierdzenia dla dalszych kroków (tzn. $k \geqslant 2$) sprawdzić można w oparciu o zasadę indukcji matematycznej.

Słuszność wzorów dla $k = 0,1$ została sprawdzona.

Przy założeniu, że dla dowolnego $k \in N$ takiego, że $2 \leqslant k \leqslant (r+s-1)$, prawdziwe są następujące rekurencje:

$$u^*_{r,s}(r+s-k) = -\Lambda(r+s-k+1)\left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)x_{r,s}(r+s-k) - c\right],$$

gdzie:

$$\Lambda(r+s-k+1) = \left[P_{r,s}(r+s-k) + B^T_{r,s}(r+s-k)\Pi'(r+s-k+1)A_{r,s}(r+s,r+s-k+1)\right.$$
$$\left.B_{r,s}(r+s-k)\right]^{-1} \cdot B^T_{r,s}(r+s-k)\Pi'(r+s-k+1)$$

$$\Pi'(r+s-k+1) = A^T_{r,s}(r+s,r+s-k+1)\Pi(r+s-k+2)$$

$$\Pi(r+s-k+1) = \Pi(r+s-k+2) - \Pi'^T(r+s-k+1)B_{r,s}(r+s-k)\Lambda(r+s-k+1)$$

$$V^*_k = \left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)x_{r,s}(r+s-k) - c\right]^T\Pi(r+s-k+1)$$
$$\left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)x_{r,s}(r+s-k) - c\right],$$

dowodzimy prawdziwość tych zależności dla $(k+1)$.

Uzasadnienie

Rozważmy wyrażenie $V_{k+1}$, zdefiniowana wzorem (4.2)

$$V_{k+1} = \sum_{i=r+s-k-1}^{i=r+s-1} u^T_{r,s}(i)P_{r,s}(i)u_{r,s}(i)$$

oraz

$$Z_{k+1} = V_{k+1} + \mu^T(x_{r,s}(r+s) - c)$$

Wartość $Z_{k+1}$ można zapisać w postaci następującej:

$$Z_{k+1} = u^T_{r,s}(r+s-k-1)P_{r,s}(r+s-k-1)u_{r,s}(r+s-k-1) + V_k +$$
$$+ \mu^T(x_{r,s}(r+s) - c).$$

Stosując zasadę optymalności Bellmana oraz korzystając z założeń indukcyjnych możemy zapisać, że:

$$Z_{k+1} = u^T_{r,s}(r+s-k-1)P_{r,s}(r+s-k-1)u_{r,s}(r+s-k-1) +$$
$$+ \left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)x_{r,s}(r+s-k) - c\right]^T \Pi(r+s-k+1) \cdot$$
$$\left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)x_{r,s}(r+s-k) - c\right] \tag{4.13}$$

Ze wzoru (3.5) wstawiamy do powyższego równania za $x_{r,s}(r+s-k)$. Wówczas po odpowiednich przekształceniach wskaźnik skalarny $Z_{k+1}$ można wyrazić w nieco innej postaci, analogicznej do tej, którą otrzymano w (4.8) Postać ta pozwala na bezpośrednie skorzystanie z lematu 1. Można zatem stwierdzić, że sterowanie optymalne $u^*_{r,s}(r+s-k-1)$, które minimalizuje $Z_{k+1}$, ma postać:

$$u^*_{r,s}(r+s-k-1) = -\Big[P_{r,s}(r+s-k-1) + B^T_{r,s}(r+s-k-1)A^T_{r,s}(r+s,r+s-k)$$
$$\cdot \Pi(r+s-k+1)A_{r,s}(r+s,r+s-k)B_{r,s}(r+s-k-1\Big]^{-1}$$
$$\cdot B^T_{r,s}(r+s-k-1)A^T_{r,s}(r+s,r+s-k)\Pi(r+s-k-1) \tag{4.14}$$
$$\cdot \left[A_{r,s}(r+s,r+s-k)A_{r,s}(r+s-k-1)x_{r,s}(r+s-k-1) - c\right]$$

Definiujemy wartość $\Lambda(r+s-k)$ oraz $\Pi'(r+s-k)$:

$$\Pi'(r+s-k) = A^T_{r,s}(r+s,r+s-k)\Pi(r+s-k+1)$$

$$\Lambda(r+s-k) = \Big[P_{r,s}(r+s-k-1) + B^T_{r,s}(r+s-k-1)\Pi'(r+s-k)A_{r,s}(r+s,r+s-k)$$
$$\cdot B_{r,s}(r+s-k-1)\Big]^{-1} B^T_{r,s}(r+s-k-1)\Pi'(r+s-k)$$

Wówczas używając zdefiniowanych uprzednio macierzy tranzycji przepiszmy (4.14) w innej, interesującej nas formie:

$$u^*_{r,s}(r+s-k-1) = -\Lambda(r+s-k)\left[A_{r,s}(r+s,r+s-k-1)x_{r,s}(r+s-k-1) - c\right]$$

Wstawiając sterowanie optymalne $u^*_{r,s}(r+s-k-1)$ do wyrażenia (4.13) określającego $Z_{k+1}$ obliczamy wartość:

$$z^*_{k+1} = v^*_{k+1}$$

Po przekształceniach, prezentowanych w pierwszej części dowodu, otrzymujemy wartość minimalną $v^*_{k+1}$ daną wzorem:

$$v^*_{k+1} = \left[A_{r,s}(r+s,r+s-k-1)x_{r,s}(r+s-k-1) - c\right]^T \Pi(r+s-k)$$
$$\left[A_{r,s}(r+s,r+s-k-1)x_{r,s}(r+s-k-1) - c\right],$$

gdzie:

$$\Pi(r+s-k) = \Pi(r+s-k+1) - \Pi^T(r+s-k)B_{r,s}(r+s-k-1)\Lambda(r+s-k).$$

W myśl zasady optymalności wartość minimalna

$$J^*_{r,s} = v^*_{r+s} = \left[A_{r,s}(r+s,0)x_{r,s}(0) - c\right]^T \Pi(1)\left[A_{r,s}(r+s,0)\right.$$
$$\left.x_{r,s}(0) - c\right]$$

Twierdzenie wskazuje, że postać sterowania w rozważanym problemie z minimalną energią, jak również wartość funkcjonału jakości zależy od zadanych stanów lokalnych: początkowego i końcowego oraz znanych parametrów układu. Ponadto optymalne sterowanie jest liniową funkcją stanu lokalnego układu.

## 5. Przykład

Niech będzie dany układ postaci (2.1) o macierzach:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$x_{1,2}(0) = \begin{bmatrix} x(1, -1) \\ x(0, 0) \\ x(-1, 1) \\ x(-1, 2) \end{bmatrix} = 0,$$

dla którego

$$(r,s) = (1,2), \quad n = 2, \quad m = 1,$$

$$x(1,2) = c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ponadto dany jest wskaźnik jakości postaci (2.3) o macierzy $P(i,j) = 1$ dla każdej pary $(i,j)$, $P^{-1}(i,j) = 1$.

Zgodnie z przytoczonym twierdzeniem zachodzą następujące zależności:

$$u^*_{1,2}(2) = -\Lambda(3)\left[A_{1,2}(3,2)x_{1,2}(2) - c\right]$$

$$\Lambda(3) = \left[P^{-1}_{1,2}(2)B^T_{1,2}(2)\Pi(3)\right]$$

$$\Pi(3) = \left[B_{1,2}(2)P^{-1}_{1,2}(2)B^T_{1,2}(2)\right]^{-1},$$

gdzie:

$$P_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

stąd

$$\Pi(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \Lambda(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,2}(3,2) = A_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zatem

$$u^*_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{1,2}(2),$$

gdzie wektor $x_{1,2}(2)$ zostanie wyliczony później.
Kolejno mamy:

$$u^*_{1,2}(1) = -\Lambda(2)\left[A_{1,2}(3,1)x_{1,2}(1) - c\right]$$

$$\Lambda(2) = \left[P_{1,2}(1) + B^T_{1,2}(1)\Pi'(2)A_{1,2}(3,2)B_{1,2}(1)\right]^{-1} \cdot B^T_{1,2}(1)\Pi'(2)$$

$$\Pi'(2) = A^T_{1,2}(3,2)\Pi(3) = A^T_{1,2}(2)\Pi(3)$$

$$\Pi'(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{1,2}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{1,2}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po odpowiednich obliczeniach macierz $\Lambda(2)$ wynosi:

$$\Lambda(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_{1,2}(3,1) = A_{1,2}(2)A_{1,2}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie otrzymuje się zależność następującą:

$$u^*_{1,2}(1) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x_{1,2}(2)$$

Kontynuując obliczenie, wartość $u^*_{1,2}(0)$ wynosi:

$$u^*_{1,2}(0) = -\Lambda(1)\left[A_{1,2}(3,0)x_{1,2}(0) - c\right]$$

ponieważ $x_{1,2}(0) = (0)$, zatem

$$u^*_{1,2}(0) = \Lambda(1)c,$$

gdzie:

$$\Lambda(1) = \left[P_{1,2}(0) + B^T_{1,2}(0)\Pi'(1)A_{1,2}(3,1)B_{1,2}(0)\right]^{-1} B^T_{1,2}(0)\Pi'(1)$$

$$\Pi'(1) = A^T_{1,2}(3,1)\Pi(2)$$

$$\Pi(2) = \Pi(3) - \Pi'^{T}(2)B_{1,2}(1)\Lambda(2)$$

Po obliczeniach uzyskujemy:

$$\Pi(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \Pi'(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Zatem

$$u^*_{1,2}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^*(+1,-1) \\ u^*(0,\ 0) \\ u^*(-1,\ 1) \\ u^*(-2,\ 2) \end{bmatrix}$$

Korzystając z równań opisujących dany układ możemy wyznaczyć wektory stanu odpowiednio:

$$x_{1,2}(1) = A_{1,2}(0)\, x_{1,2}(0) + B_{1,2}(0)\, u^*_{1,2}(0) = B_{1,2}(0)\, u^*_{1,2}(0)$$

Po wymnożeniu znanych macierzy otrzymuje się

$$x_{1,2}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad u^*_{1,2}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^*(1,\ 0) \\ u^*(0,\ 1) \\ u^*(-1,2) \end{bmatrix}$$

Analogicznie postępujemy przy obliczeniu wektora $x_{1,2}(2)$, otrzymując wówczas:

$$x_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad u^*_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^*(1,1) \\ u^*(0,2) \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że dobór sekwencji wektorów sterowania zapewnia nam osiągnięcie przez układ żądanego stanu $x(r+s) = c$, mianowicie:

$$x_{1,2}(3) = A_{1,2}(2)x_{1,2}(2) + B_{1,2}(2)u_{1,2}(2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wartość minimalna wskaźnika jakości $J^*_{1,2}$ wynosi:

$$J^*_{1,2}(u) = 3\,\frac{1}{3} = u^{*T}_{1,2}(2)u^*_{1,2}(2) + u^{*T}_{1,2}(1)u^*_{1,2}(1) + u^{*T}_{1,2}(0)u^*_{1,2}(0)$$

Można tę wartość obliczyć również ze wzoru:

$$J^*_{1,2} = \left[A_{1,2}(3,0)x_{1,2}(0) - c\right]^T \Pi(1)\left[A_{1,2}(3,0)x_{1,2}(0) - c\right],$$

gdzie:

$$\Pi(1) = \Pi(2) - \Pi'^T(1)B_{1,2}(0)\Lambda(1)$$

$$\Pi(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

więc

$$J^*_{1,2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\frac{1}{3}$$

## 6. Podsumowanie

Rozwiązanie problemu sterowania z minimalną energię za pomocą metody programowania dynamicznego było możliwe ze względu na specyficzną postać modelu 2-D, szczególną formę funkcjonału jakości (niezależności od wektora stanu) oraz brak ograniczeń na wielkości sterujące i współrzędne stanu.

## LITERATURA

[1] Fornasini E., Marchesini C.: "State space realization theory of two dimensional filters". IEEE Transations on Automatic Control, vol. AC-21, no 1 484-492 (1976).

[2] Kaczorek T.: Minimum energy control fo 3-D linear systems.

[3] Klamka J.: Sterowalność układami typu 2-D. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Zeszyt Automatyka nr 63, ss. 51-68 (1982).

[4] Klamka J.: Minimum energy control for 2-D systems.

[5] Klamka J.: Controllability and optimal control 2-D linear systems". Foundations of Control Engineering, vol. 9(1984) no 1.

[6] Klamka J.: Controllability of M-dimensional linear systems. Foundations of Control Engineering, vol. 8, no 2(1983).

[7] Roesser R.P.: A discrete state space model for linear image processing. IEEE Trans., vol. AC-20, no 1, s. 1-10 (1975).

[8] Sorenson H.W.: Controllability and observability of linear, stochastic, time discrete control systems. C.T. Leondes, Advances in Control Theory Academic Press, New York, 95-158 (1968).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek

Wpłynęło do Redakcji w listopadzie 1984 r.

МИНИМАЛЬНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
СИСТЕМОЙ ТИПА 2-D

Р е з ю м е

В статье рассматривается проблема оптимального управления с использованием минимально-энергетического критерия для некоторой системы типа 2-D Система (2.1) превращается в соответствующую форму типа 1-D а затем применяется динамическое программирование.

MINIMAL ENERGY CONTROL OF 2-D LINEAR SYSTEM

S u m m a r y

In this paper minimum energy control of linear, discrete stationary 2-D system is considered. System (2.1) is transformed into equivalent 1-D system and next Bellman's "principle of optimality" is used.