ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria MATEMATYKA-FIZYKA z. 51 Nr kol. 874

Barbara BIŁY

Instytut Matematyki
Politechnika Śląska

WYZNACZANIE STEROWANIA OPTYMALNEGO DYSKRETNEGO UKŁADU 2-D PRZY ZASTOSOWANIU TEORII MNOŻNIKÓW LAGRANGE'A

Streszczenie. W pracy podano metodę wyznaczania sterowania optymalnego przy kwadratowym wskaźniku jakości dla układu dyskretnego, dwuwymiarowego, liniowego, stacjonarnego opisanego modelem Fornasiniego, przy ograniczeniach równościowych na końcowy wektor stanu. W proponowanej metodzie wykorzystuje się teorię nieoznaczonych mnożników Lagrange'a.

1. Wprowadzenie

Układy typu 2-D są to układy dyskretne dwóch zmiennych, opisane równaniem bądź układem równań różnicowych. Szersze zainteresowanie nimi datuje się od kilku lat, kiedy to Roesser zaproponował model odtąd związany z jego nazwiskiem [8]. Dla tego modelu rozpatrywano problem minimalizacji wskaźnika jakości szczególnej postaci, mianowicie tzw. zagadnienie minimalnoenergetyczne. Zostało ono postawione i rozwiązane w pracy J. Klamki [5], a następnie rozważano go już dla modelu typu 3-D w pracy T. Kaczorka [4]. W obu rozwiązaniach wykorzystywano tzw. macierz lokalnej sterowalności.

W pracy [1] powtórnie rozpatrywano to zagadnienie, ale dla innego modelu, typu Fornasiniego-Marchesiniego [3]. Podano w niej metodę opartą na programowaniu dynamicznym.

W niniejszej pracy rozważa się również powyższy model, przy czym wskaźnik jakości ma postać ogólną. Ponadto podano ograniczenie na wektor końcowy stanu oraz zastosowano do rozwiązania tego zadania nie stosowaną dotychczas przy układach 2-D teorię mnożników Lagrange'a.

2. Sformułowanie zagadnienia

Dla dowolnego punktu $(r,s) \in Z^+ \times Z^+$ (Z - zbiór liczb całkowitych) definiujemy zbiory punktów $D_{r,s}$ i $C_k^{r,s}$ w sposób następujący [7] :

$$D_{r,s} = \left\{(i,j)\in Z\times Z;\ -s \leqslant i \leqslant r, -r \leqslant j \leqslant s,\ (i+j) \geqslant 0\right\}$$

$$C_k^{r,s} = \left\{(i,j)\in D_{r,s};\ 0\leqslant k = (i+j) \leqslant r+s\right\} =$$

$$= \left\{(r,-r+k),(r-1,r+k-1),\dots,(-s+k+1,s-1),(-s+k,s)\right\}$$

Rozważmy układ dwuwymiarowy, liniowy, stacjonarny opisany następującym równaniem różnicowym [3] :

$$x(i+1,j+1) = A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1) \tag{2.1}$$

z warunkami początkowymi: $(i,j)\in Z\times Z$

$$x(h,-h) = x_0(h), \quad h\in Z \tag{2.2}$$

oraz warunkiem końcowym postaci:

$$\varphi(x(r,s)) = 0, \tag{2.3}$$

gdzie:

φ jest funkcją o wartościach w przestrzeni $R^q (q \leqslant n)$

$A_1, A_2 \in R^{n\ n}$, $B_1, B_2 \in R^{n\times m}$

$u(i,j)\in R^m$ - wektor sterowania,

$x(i,j)\in R^n$ - wektor stanu.

Dane jest również wskaźnik jakości w postaci ogólnej:

$$J_{r,s}\left\{x(i,j),\ u(i,j)\right\} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in D_{r,s}-C_{r+s}^{r,s}} \left\{x^T(i,j)Q(i,j)x(i,j) + \right.$$

$$\left. + u^T(i,j)P(i,j)u(i,j)\right\} + \frac{1}{2}\, x^T(r,s)F(r,s)x(r,s), \tag{2.4}$$

w którym macierze $Q(i,j)$, $P(i,j)$ dla $(i,j)\in D_{r,s}-C_{r+s}^{r,s}$ oraz $F(r,s)$ są z założenia symetryczne i dodatnio określone. Zadanie nasze polega na wyznaczeniu ciągu sterowań $u(i,j)$, $(i,j)\in D_{r,s}-C_{r+s}^{r,s}$, który minimalizuje kryterium jakości (2.4), przy uwzględnieniu równań (2.1) oraz ograniczeń (2.2), (2.3).

Przy założeniu, że rozpatrywany układ jest lokalnie sterowalny w obszarze $D_{r,s}-C_{r+s}^{r,s}$, można w pełni rozwiązać powyższe zagadnienia, podając analityczną postać sterowania optymalnego.

3. Transformacja układu (2.1)

Jako pierwszy etap rozwiązania dokonujemy przekształcenia układu (2.1) typu 2-D do pewnego równoważnego mu układu typu 1-D, liniowego, dyskretnego, o zmieniających się wymiarach macierzy w każdym kroku.

W tym celu wprowaźmy następujące oznaczenia, zaproponowane w pracy [7] : dla dowolnego punktu $(r,s) \in Z^{+} \times Z^{+}$ definiuje się wektory i macierze zależne od dyskretnego parametru k i ściśle związane z wyborem punktu (r,s), a mianowicie:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x(r,-r+k) \\ x(r-1,-r+k+1) \\ \vdots \\ x(-s+k,s) \end{bmatrix} \in R^{n(r+s-k+1)} \qquad k = 0,1,\dots,(r+s) \tag{3.1}$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} u(r,-r+k) \\ u(r-1,-r+k+1) \\ \vdots \\ u(-s+k,s) \end{bmatrix} \quad R^{m(r+s-k+1)} \tag{3.2}$$

$$A(k) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,\dots,(r+s-1) \tag{3.3}$$

$A(k)$ jest macierzą prostokątną o wymiarach $n(r+s-k) \times n(r+s-k+1)$ zależnych od parametru k,

$$B(k) = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,\dots,(r+s-1) \tag{3.4}$$

$B(k)$ jest macierzą prostokątną o ywymiarach $n(r+s-k) \times m(r+s-k+1)$ zależnych od parametru k.

Używając oznaczeń (3.1) - (3.4) można równanie (2.1) przekształcić w równoważną mu postać:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k = 0,1,2,\dots,(r+s-1) \tag{3.5}$$

z danymi warunkami granicznymi: $x(0)$

$$\varphi(x(r+s)) = 0$$

Podobnie można transformować funkcjonał (2.4) otrzymując następującą jego postać:

$$J\left\{x(k),u(k)\right\} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=r+s-1}\left\{x^T(x)Q(k)x(k) + u^T(k)P(k)u(k)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}x^T(r+s)F(r+s)x(r+s), \tag{3.6}$$

gdzie:

$$P(k) = \mathrm{diag}\left[P(r,-r+k),P(r-1,r+k+1),\ldots,P(-s+k,s)\right] \tag{3.7}$$

$$k = 0,1,\ldots,(r+s-1)$$

Macierze $P(i,j)$ dla $(i,j) \in D_{r,s} - C^{r,s}_{r+s}$ są z założenia symetryczne i dodatnio określone, a więc $P(k)$ jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną, o wymiarze $m(r+s-k+1) \times m(r+s-k+1)$.

$$Q(k) = \mathrm{diag}\left[Q(r,-r+k),Q(r-1,-r+k+1),\ldots,Q(-s+k,s)\right], \tag{3.8}$$

$$k = 0,1,\ldots,(r+s-1)$$

Macierze $Q(i,j)$, dla $(i,j) \in D_{r,s} - C^{r,s}_{r+s}$ są z założenia symetryczne i określone dodatnio, więc $Q(k)$ jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną o wymiarze $n(r+s-k+1) \times n(r+s-k+1)$.

$$F(r+s) = F(r,s) \in R^{n \times n} \tag{3.9}$$

Zatem przy zastosowaniu powyższej transformacji problem postawiony w paragrafie 2 został sprowadzony do wyznaczenia sterowania optymalnego, układu niestacjonarnego typu 1-D, o zmiennej strukturze postaci (3.5), przy wskaźniku jakości (3.6).

4. Wyznaczenie sterowań optymalnych przy zastosowaniu mnożników Lagrange'a

Zauważmy, że wskaźnik jakości (3.6) $J\{x,u\}$ jest pewną funkcją skalarną $2(r+s)$ zmiennych:

$x(1),\ x(2),\dots,x(r+s-1),\ x(r+s)$ ($x(0)$ - dane)

$u(0),\ u(1),\dots,u(r+s-1).$

Każde z $r+s+2$ równań (3.5) jest równaniem wektorowym, stanowiącym ograniczenia dla funkcji (3.6).
Na podstawie [2] hamiltonian dla rozważanego zagadnienia ma zatem postać:

$$H\Big[x(1),\ x(2),\dots,x(r+s),\ u(0),\ u(1),\dots,u(r+s-1),$$

$$\lambda(1),\lambda(2),\dots,\lambda(r+s),\vartheta\Big] = \frac{1}{2}\,x^T(r+s)F(r+s)x(r+s) + \vartheta^T\varphi(x(r+s)) +$$

$$+\sum_{k=0}^{k=r+s-1}\Big\{\frac{1}{2}\,x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2}\,u^T(k)P(k)u(k) + \tag{4.1}$$

$$+\lambda^T(k+1)\Big[A(k)x(k) + B(k)u(k) - x(k+1)\Big]\Big\}\ ,$$

gdzie $\lambda(k)$, $k = 0,1,\dots,(r+s-1)$ są $n(r+s-k+1)$ wymiarowymi wektorami, ϑ jest q-wymiarowym wektorem.

Dla prostoty zapisu definiujemy funkcje skalarne $H(k)$ oraz Φ w sposób następujący:

$$H(k) = \frac{1}{2}\,x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2}\,u^T(k)P(k)u(k) + \lambda^T(k+1)\Big[A(k)x(k) +$$

$$+ B(k)u(k)\Big] \tag{4.2}$$

$$k = 0,1,\dots,(r+s-1)$$

$$\Phi\,(x(r+s)) = \frac{1}{2}\,x^T(r+s)F(r+s)x(r+s) + \vartheta^T\,\varphi(x(r+s)) \tag{4.3}$$

Wówczas hamiltonian H można napisać w postaci:

$$H = \Phi\,(x(r+s)) - \lambda^T(r+s)x(r+s) + \sum_{k=1}^{k=r+s-1}\Big[H(k)-\lambda^T(k(x(k)\Big] + H(0) \tag{4.4}$$

Różniczka zupełna dH ma zatem postać:

$$dH = \left[\frac{\partial\Phi(x(r+s))}{\partial x(r+s)} - \lambda^T(r+s)\right]dx(r+s) + \sum_{k=1}^{k=r+s-1}\left[\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} - \lambda^T(k)\right]dx(k) +$$

$$+\sum_{k=1}^{k=r+s-1}\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}\,du(k) + \frac{\partial H(0)}{\partial x(0)}\,dx(0) + \frac{\partial H(0)}{\partial u(0)}\,du(0) \tag{4.5}$$

Warunkiem koniecznym minimalizacji jest zerowanie się pochodnych cząstkowych $H_{x(k)} = 0$ i $H_{u(k)} = 0$, zatem mamy:

$$\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = \lambda^T(k), \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\dots,(r+s-1) \tag{4.6}$$

(jeżeli $x(0)$ - dane, wówczas $dx(0) = 0$)

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = 0, \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\dots,(r+s-1) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \Phi(x(r+s))}{\partial x(r+s)} - \lambda^T(r+s) = 0 \tag{4.8}$$

Rozpisując powyższe warunki otrzymamy:

$$x^T(k)Q(k) + \lambda^T(k+1)A(k) = \lambda^T(k) \quad k = 1,2,\dots,(r+s-1) \tag{4.6a}$$

$$u^T(k)P(k) + \lambda^T(k+1)B(k) = 0 \quad k = 0,1,\dots,(r+s-1) \tag{4.7a}$$

$$x^T(r+s)F(r+s) + \vartheta^T \frac{\partial \varphi}{x(r+s)} = \lambda^T(r+s) \tag{4.8a}$$

Wyznaczając sterowanie optymalne $u(k)$ w funkcji $\lambda(k+1)$ z równania (4.7a) otrzymamy:

$$u(k) = -P^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \quad k = 0,1,\dots,(r+s-1) \tag{4.7b}$$

(z założeń wynika, że macierze $P(k)$ są odwracalne)

$(k = 0,1,\dots,(r+s-1))$.

Zatem układ (4.6a), (4.7a), (4.8a) wraz z warunkami (3.5) daje rozwiązanie zagadnienia minimalizacji funkcjonału (3.6) ze względu na sterowanie $u(k)$.

Ten układ zamknięty można opisać w sposób następujący:

$$x(k+1) = A(k)x(k) - B(k)P^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\varphi(x(r+s))_T = 0$$

$$\lambda(k) = A^T(k)\lambda(k+1) + Q(k)x(k) \quad (k = 1,2,\dots,(r+s-1)) \tag{4.9}$$

$$\lambda(r+s) = F(r+s)x(r+s) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(r+s)}\right]^T \vartheta$$

$$u(k) = -P^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \qquad (k = 0,1,\ldots,(r+s-1) \tag{4.9}$$

Sekwencja sterowań optymalnych nie występuje w sposób jawny, lecz jako funkcja mnożników Lagrange'a, które z kolei same są rozwiązeniami sprzężonych równań rekurencyjnych danych w (4.9), przy czym część warunków granicznych jest dana dla k=0, część dla $k = r+s$.
Mamy zatem do czynienia z typowym "zagadnieniem dwugranicznym", które należy rozwiązać dla każdej chwili czasu, aby otrzymać strukturę sterowania w układzie zamkniętym.
Dla pełnego stwierdzenia, czy w danych punktach stacjonarnych osiągnięto minimum, należy rozpatrzyć, czy różniczka zupełna drugiego rzędu hamiltonianu jest dodatnio określona.

$$d^2H = dx^T(r+s)\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x(r+s)^2}\,dx(r+s) +$$

$$+\sum_{k=0}^{r+s-1}\left[dx^T(k),\ du^T(k)\right]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 H(k)}{\partial x(k)^2} & \dfrac{\partial^2 H(k)}{\partial x(k)\partial u(k)}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 H(k)}{\partial u(k)\partial x(k)} & \dfrac{\partial^2 H(k)}{\partial u(k)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx(k)\\[2ex] du(k)\end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Różniczki zmiennych $dx(k)$ i $du(k)$ są związane równaniem

$$dx(k+1) = A(k)dx(k) + B(k)du(k). \tag{4.11}$$

5. Przypadek szczególny

Załóżmy, że funkcja φ ma postać:

$$\varphi(x(r+s)) = D(r+s)x(r+s) - c, \tag{5.1}$$

gdzie: $D(r+s)$ jest daną macierzą o wymiarze $q \times n$ oraz $c \in R^q$ jest danym wektorem.
Wówczas układ równań (4.9) ma postać:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k)\\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\varphi(x(r+s)) = D(r+s)x(r+s) - c = 0$$

$$\lambda(k) = A^T(k)\lambda(k+1) + Q(k)x(k)$$

$$\lambda(r+s) = F(r+s)x(r+s) + D^T(r+s)\vartheta$$

$$u(k) = -P^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1)$$

$$(k = 0,1,\dots,(r+s-1))$$

Załóżmy, że spełnione są następujące zależności

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= S(k)x(k) + R(k)\vartheta \\ \varphi &= R^T(k)x(k) + T(k)\vartheta - c, \end{aligned} \tag{5.3}$$

gdzie:

$S(k)$ jest macierzą symetryczną o wymiarze $n(r+s-k+1) \times n(r+s-k+1)$,
$R(k)$ jest macierzą symetryczną o wymiarze $n(r+s-k+1) \times q$,
$T(k)$ jest macierzą symetryczną o wymiarze $q \times q$.

Podstawiając w (5.3) $k = (r+s)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \lambda(r+s) &= S(r+s)\,x(r+s) + R(r+s)\vartheta \\ \varphi(r+s) &= R^T(r+s)x(r+s) + T(r+s)\vartheta - c, \end{aligned} \tag{5.4}$$

co w zestawieniu z równaniami (5.2) daje warunki:

$$\begin{aligned} S(r+s) &= F(r+s) \\ R(t+s) &= D^T(r+s) \\ T(r+s) &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Napiszmy równania (5.3) dla $k = (k+1)$

$$\begin{aligned} \lambda(k+1) &= S(k+1)x(k+1) + R(k+1)\vartheta \\ \varphi &= R^T(k+1)x(k+1) + T(k+1)\vartheta - c \end{aligned} \tag{5.6}$$

Wstawiając do (5.6) pierwsze z równań (5.2), mamy odpowiednio:

$$\begin{aligned} \lambda(k+1) &= S(k+1)A(k)x(k) + S(k+1)B(k)u(k) + R(k+1)\vartheta \\ \varphi &= R^T(k+1)A(k)x(k) + R^T(k+1)B(k)u(k) + T(k+1)\vartheta - c \end{aligned} \tag{5.7}$$

Równocześnie na podstawie (5.2) otrzymujemy zależności:

$$\lambda(k) = A^T(k)\lambda(k+1) + Q(k)x(k)$$
$$u(k) = -P^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \tag{5.8}$$

a po uwzględnieniu (5.7):

$$\lambda(k) = \left[A^T(k)S(k+1)A(k) + Q(k)\right]x(k) + A^T(k)S(k+1)B(k)u(k) + A^T(k)R(k+1)\vartheta \tag{5.9}$$

$$u(k) = -P^{-1}(k)B^T(k)S(k+1)A(k)x(k) - P^{-1}(k)B^T(k)s(k+1)B(k)u(k) - P^{-1}(k)B^T(k)R(k+1)\vartheta \tag{5.10}$$

Wyznaczając $u(k)$ z (5.10) otrzymamy:

$$u(k) = \left[I + P^{-1}(k)B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1}\left[-P^{-1}(k)B^T(k)S(k+1)A(k)x(k) - P^{-1}(k)B^T(k)R(k+1)\vartheta\right] \tag{5.11}$$

przy założeniu, że $\left[I + P^{-1}(k)B^T(k)S(k+1)B(k)\right]$ jest macierzą nieosobliwą.

Podstawiając z kolei (5.11) do (5.9) otrzymamy:

$$\lambda(k) = \left\{A^T(k)S(k+1)A(k) + Q(k) - A^T(k)S(k+1)B(k)\left[P(k)+B^T(k)S(k+1)\cdot B(k)\right]^{-1} B^T(k)S(k+1)A(k)\right\}x(k) + \left\{A^T(k)R(k+1) - A^T(k)S(k+1)B(k)\left[P(k) + B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1}\cdot B^T(k)R(k+1)\right\}\vartheta \tag{5.12}$$

Analogicznie postępujemy z φ w równaniu (5.7) i otrzymujemy:

$$\varphi = \left\{R^T(k+1)A(k) - R^T(k+1)B(k)\left[P(k) + B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1}\cdot B^T(k)S(k+1)A(k)\right\}x(k) + \left\{T(k+1) - R^T(k+1)B(k)\left[P(k) + B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1}\cdot B^T(k)R(k+1)\right\}\vartheta - c \tag{5.13}$$

Zgodnie ze wzorem (5.3) możemy zatem zapisać następujące zależności rekurencyjne:

$$S(k) = A^T(k)S(k+1)A(k) + Q(k) - A^T(k)S(k+1)B(k)$$

$$\cdot \left[P(k) + B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1} B^T(k)S(k+1)A(k) \tag{5.14}$$

$$R(k) = A^T(k) \left\{I - S(k+1)B(k)\left[P(k) + B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1} \right. \tag{5.15}$$

$$\left. \cdot B^T(k)\right\} R(k+1)$$

$$T(k) = T(k+1) - R^T(k+1)B(k)\left[P(k) + B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1}$$

$$\cdot B^T(k)R(k+1) \tag{5.16}$$

z warunkami granicznymi:

$$S(r+s) = F(r+s)$$

$$R(r+s) = D^T(r+s) \tag{5.17}$$

$$T(r+s) = 0$$

Jeżeli $T(k)$ jest macierzą odwracalną dla $k = 0,1,\ldots,(r+s-1)$, to wówczas ze wzoru (5.3) można wyrazić ϑ w sposób następujący:

$$\vartheta = \left[T(k)\right]^{-1} \left[\varphi + c - R^T(k)x(k)\right] \tag{5.18}$$

Wstawiając tę wartość ϑ do wyrażenia (5.11), otrzymamy po przekształceniach:

$$u(k) = -\left[P(k) + B^T(k)S(k+1)B(k)\right]^{-1} \left\{B^T(k)S(k+1)A(k) + \right.$$

$$\left. + B^T(k)R(k+1)T^{-1}(k) \left[D(r+s)x(r+s) - R^T(k)x(k)\right]\right\} \tag{5.19}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,(r+s-1),$$

gdzie $S(k)$, $R(k)$ oraz $T(k)$ są rozwiązaniami równań rekurencyjnych (5.14) - (5.16) z warunkami granicznymi (5.17).

Badając warunki dostateczne minimum w tym przypadku otrzymujemy szczególną postać drugiej różniczki:

$$d^2H = dx^T(r+s)F(r+s)dx(r+s) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r+s-1} \left[dx^T(k),\ du^T(k)\right] \begin{bmatrix} Q(k) & 0 \\ 0 & P(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx(k) \\ du(k) \end{bmatrix} =$$

$$= dx^T(0)Q(0)dx(0) + du^T(0)P(0)du(0) + dx^T(1)Q(1)dx(1) +$$

$$+ du^T(1)P(1)du(1) + \ldots + dx^T(r+s-1)Q(r+s-1)dx(r+s-1) + \tag{5.20}$$

$$+ du^T(r+s-1)P(r+s-1)du(r+s-1) + dx^T(r+s)F(r+s)dx(r+s) =$$

$$= \left[dx^T(0),\ du^T(0),\ldots,dx^T(r+s)\right] \begin{bmatrix} Q(0) & & \\ & P(0) & 0 \\ 0 & & \ddots\ F(r+s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx(0) \\ du(0) \\ \vdots \\ dx(r+s) \end{bmatrix}$$

Różniczka ta jest formą kwadratową daną w postaci kanonicznej. Ponieważ na podstawie założeń macierze leżące na przekątnej głównej są dodatnio określone, zatem wyróżnik tej formy jest też dodatnio określony.

Uwaga

Funkcje φ określająca ograniczenie równościowe nałożone na koncowy lokalny stan układu może być ogólnie przyjęta jako nieliniowa. Tym niemniej w praktyce najczęściej dokonuje się jej linearyzacji bądź linearyzacji jej pochodnej.

LITERATURA

[1] Biły B.: Sterowanie z minimalną energią pewnym układem dynamicznym typu 2-D. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 51, Gliwice 1986.

[2] Bryson A.E., You-Chi Ho.: Applied Optimal Control. New York (1975) Hemisphere Publishing Corporation.

[3] Fornasini E., Marchesini C.: State space realization theory of two dimensional filters. IEE Transations on Automatic Control, vol. AC-21, no 1 (1976), ss. 484-491.

[4] Kaczorek T.: Minimum energy control of 3-D linear systems. Control and Cybernetics, vol. 1984.

[5] Klamka J.: Minimum energy control of 2-D systems in Hilbert spaces. Systems Science, vol. 9, no 1-2, (1983).

[6] Klamka J.: Sterowalnośc układów typu 2-D. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. nr 63, ss. 51-68 (1984).

[7] Klamka J.: Controllability and optimal control 2-D, linear systems. Foundations of Control Engineering. vol. 9, no 1, ss. 15-24 (1984).

[8] Roesser R.P.: A discreate state space model for linear image processing. IEE Transations on Automatic Control. vol. AC-20, no 1, ss.1-10 (1975).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek

Wpłynęło do Redakcji we wrześniu 1985 r.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ
ТИПА 2-D С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАДРАТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ

Р е з ю м е

В статье рассматривается линейная, дискретная система типа 2-D. Самая общая система превращается в соответствующую линейную форму типа 1-D с переменной структурой. Для такой системы можно вычислить оптимальное управление, которое является минимум квадратического критерия с использованием множителей Лагранжа.

OPTIMAL CONTROL OF OPTIMATION PROBLEM FOR LINEAR
2-D SYSTEM WITH QUADRATIC CRITERIA

S u m m a r y

The linear, discrete, stationary 2-D system has been considered. The most general Fornasini model of 2-D is introduced and then transformed into equivalent, discrete, variable - structure 1-D linear system. For such model, using Lagrange multipliers the optimal regulator problem is solved.