ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 51 Nr kol. 874

Aleksandra ROST

O FUNKCJACH GELFERA, KTÓRYCH ZBIÓR WARTOŚCI POKRYWA DANE KOŁO

Streszczenie. Funkcja f holomorficzna i jednolistna w kole jednostkowym $U = \{z : |z| < 1\}$, postaci:

$$f(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \tag{1}$$

spełniająca warunek

$$f(z_1) + f(z_2) \neq 0 \quad \text{dla każdych } z_1, z_2 \in U, \tag{2}$$

nazywa się funkcją Gelfera. Przez $G(d)$ rozumieć będziemy podklasę klasy funkcji Gelfera, złożoną z funkcji, które oprócz warunków (1) i (2) spełniają dodatkowo:

$$\begin{aligned} & K_d \subset f(U), \\ & \partial f(U) \cap K_d \neq \emptyset, \\ & \partial f(U) \cap K_{d^-} \neq \emptyset, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} & K_d = \{w: |w - w_0| < d, \ w_0 = \sqrt{d^2+1}\}, \\ & K_{d^-} = \{w: |w + w_0| < d\}. \end{aligned} \tag{4}$$

W pracy otrzymano wariacje (zarówno te elementarne jak i te, które zawierają bogatszy zbiór funkcji bliskich funkcji f) dla klasy $G(d)$ funkcji Gelfera, których zbiór wartości pokrywa z góry dane koło. Uzyskane funkcje, odwzorowujące koło U na poddany małej zmianie obszar $f(U)$, $f \in G(d)$, pozwoliły na znalezienie równania różniczkowo-funkcyjno-całkowego spełnionego przez funkcję ekstremalną dla części rzeczywistej określonego co najmniej na $G(d)$ funkcjonału różniczkowalnego w sensie Gâteaux i zależnego jedynie od wartości funkcji położonych w kole K_d, a także na uzyskanie pewnych informacji dotyczących obrazów koła jednostkowego U po przekształceniu go przez funkcje ekstremalne z $G(d)$.

Badania klas funkcji jednolistnych, których zbiór wartości pokrywa dane z góry koło, zostały zapoczątkowane przez Netanyahu w 1970 [5], który uzyskał w tej pracy wariację funkcji klasy S, których wartości pokrywają koło $\{w: |w| < d\}$, $d > 0$ i przy jej pomocy znalazł maksimum wartości bezwzględnej drugiego współczynnika w tej podklasie. Następnie w 1977 Barnard [1] zajął się klasą funkcji zgwiaździstych, które koło jednostkowe przekształcają na obszar zawierający koło $\{w: |w| < d\}$ i zawarty w kole $\{w: |w| < M\}$. W 1979 roku Hummel, Pinchuk i Schiffer [3] znaleźli wariację dla funkcji jednolistnych, ograniczonych, których wartości pokrywają koło $\{w: |w| < d\}$, uzyskując za jej pomocą funkcje ekstremalne dla wartości bezwzględnej drugiego współczynnika w tej podklasie.

Klasa $G(d)$ nie jest zwarta, tym niemniej staje się zwartą po dołączeniu do niej wszystkich funkcji postaci: $\dfrac{d + (\sqrt{1+d^2}-1)e^{i\gamma_z}}{d - (\sqrt{1+d^2}-1)e^{i\gamma_z}}$.

Połóżmy $D = f(U)$. Niech Δ będzie obszarem dobranym do funkcji $f \in G(d)$ takim, że:

(i) $\partial D \subset \Delta$, $\partial K_d \subset \Delta$, $\partial K_{d^-} \subset \Delta$,

(ii) $w \in \Delta \Longleftrightarrow -w \in \Delta$,

(iii) istnieje otoczenie punktu $O(-1)$ punktu -1 takie, że $O(-1) \cap \Delta = \emptyset$.

Niech $\Phi(w)$ będzie funkcję holomorficzną w $\bar{\Delta}$, spełniającą warunki:

(a) $\Phi(-w) = -\Phi(w)$ dla każdego $w \in \Delta$,

(b) $\mathrm{Re}\,\Phi(w) = 0$ dla $w \in \partial K_d \cup \partial K_{d^-}$.

W przypadku gdy $\infty \in \bar{\Delta}$, funkcja $\Phi(w)$ ma w ∞ rozwinięcie $\Phi(w) = a_0 + \frac{a_1}{w} + \ldots$. Udowodnimy, że funkcja

$$w_\varepsilon(w) = \frac{w + 1 + (w - 1)\exp \varepsilon \Phi(w)}{w + 1 - (w - 1)\exp \varepsilon \Phi(w)}, \tag{5}$$

gdzie $\varepsilon \in R$, przekształca brzeg ∂D na ∂D_ε obszaru D_ε, który

(α) dla ε dostatecznie bliskich zero jest taki, że jeżeli $w \in D_\varepsilon$, to $-w \notin D_\varepsilon$.

(β) $K_d \subset D_\varepsilon$, $\partial D_\varepsilon \cap \partial K_d \neq \emptyset$, $\partial D_\varepsilon \cap \partial K_{d^-} \neq \emptyset$.

Udowodnimy ponadto, że dla ε dostatecznie bliskich zero funkcja (5) jest jednolistna w Δ.

Połóżmy dla $(w, \varepsilon) \in \bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$

$$\chi(w,\omega) = \begin{cases} \dfrac{(w+1)(\omega+1)(\Phi(w) - \Phi(\omega))}{2(w - \omega)} & \text{dla } w \neq \omega \\[2mm] \dfrac{1}{2}(\omega+1)^2\, \Phi'(\omega) & \text{dla } w = \omega. \end{cases}$$

Funkcja $\Phi(w)$ jest ograniczona w zbiorze zwartym $\bar{\Delta}$, również $\chi(w,\omega)$ jako skończona i ciągła w zbiorze $\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$ jest tam ograniczona. Przyjmijmy:

$$M_1 = \sup_{\bar{\Delta}} |\Phi(w)|, \qquad M_2 = \sup_{\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}} |\chi(w,\omega)|$$

Celem dowiedzenia własności (α) wystarczy pokazać, że dla dowolnego ε dostatecznie bliskiego 0 i dla dowolnych $w_1, w_2 \in D \cap \Delta$ $w(w_1) + w_\varepsilon(w_2) \neq 0$. Załóżmy przeciwnie, że dla każdego $\varepsilon \in R$ istnieję dwa punkty $w_1, w_2 \in \Delta \cap D$ takie, że $w_\varepsilon(w_1) + w_\varepsilon(w_2) = 0$, czyli

$$\frac{w_1 + 1 + (w_1 - 1)\exp \varepsilon \Phi(w_1)}{w_1 + 1 - (w_1 - 1)\exp \varepsilon \Phi(w_2)} = \frac{-(w_2 + 1) - (w_2 - 1)\exp \varepsilon \Phi(w_2)}{w_2 + 1 - (w_2 - 1)\exp \varepsilon \Phi(w_2)},$$

a więc

$$\frac{w_2 + 1}{w_2 - 1} = \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} \exp\mathcal{E}(\Phi(w_1) + \Phi(w_2)),$$

skąd otrzymujemy:

$$\left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} - \frac{w_2 + 1}{w_2 - 1}\right| = \left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right| \left|1 - \exp\mathcal{E}(\Phi(w_1) + \Phi(w_2))\right| \tag{6}$$

Korzystając z nierówności $|1 - e^s| \leqslant |s| e^{|s|}$ spełnionej dla dowolnego s mamy na podstawie (6), że

$$\left|\frac{w_1-1}{w_1+1} - \frac{w_2+1}{w_2-1}\right| \leqslant \left|\frac{w_1-1}{w_1+1}\right| |\mathcal{E}| \; |\Phi(w_1) + \Phi(w_2)| \exp\left\{|\mathcal{E}| \; |\Phi(w_1) + \Phi(w_2)|\right\},$$

zatem po przekształceniu, ze względu na własność (a) oraz postać funkcji $\chi(w,\omega)$, otrzymujemy:

$$1 \leqslant \left|\frac{w_1-1}{w_1+1}\right| |\mathcal{E}| \left|\frac{(w_1+1)(-w_2+1)(\Phi(w_1) - \Phi(-w_2))}{2(w_1 - (-w_2))}\right| \exp\left\{|\mathcal{E}| \, |\Phi(w_1) + \Phi(w_2)|\right\} =$$

$$= |\mathcal{E}| \left|\frac{w_1-1}{w_1+1}\right| \left|\chi(w_1, -w_2)\right| \exp\left\{|\mathcal{E}| \, |\Phi(w_1) + \Phi(w_2)|\right\}$$

Z określenia rodziny $G(d)$ wynika, że istnieje taka stała M_3, że dla każdego $w \in D \cap \Delta$ zachodzi $\left|\frac{w-1}{w+1}\right| \leqslant M_3$, stąd $1 \leqslant |\mathcal{E}| M_3 M_2 \exp 2|\mathcal{E}| M_1$, co jest niemożliwe dla dostatecznie małego $\mathcal{E}$.

Celem dowiedzenia własności (β) wystarczy pokazać, że odwzorowanie $w_{\mathcal{E}}(w)$ zdefiniowane wzorem (5) pozostawia ∂K_d i $\partial K_d -$ niezmienione. Rzeczywiście, jeżeli $w \in \partial K_d$, wtedy punkt $\frac{w-1}{w+1} \in \partial K_1$, gdzie $K_1 = K(0, \frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d})$. Stąd ze względu na (b) mamy:

$$\left|\frac{w_{\mathcal{E}}(w) - 1}{w_{\mathcal{E}}(w) + 1}\right| = \left|\frac{w - 1}{w + 1}\right| \left|\exp\mathcal{E}\,\Phi(w)\right| = \left|\frac{w - 1}{w + 1}\right| \left|\exp i\mathcal{E}\,\mathrm{Im}\,\Phi(w)\right| = \left|\frac{w - 1}{w + 1}\right|$$

Po prostych przekształceniach (7) otrzymujemy, że $\left|w_{\mathcal{E}}(w) - \sqrt{1 + d^2}\right| = d$, co oznacza, że $w_{\mathcal{E}}(w) \in \partial K_d$. Podobnie pokazujemy, że jeżeli tylko $\chi(w) \in \partial K_d -$, wtedy również $w_{\mathcal{E}}(w) \in \partial K_d -$.

Celem dowiedzenia jednolistności funkcji (5) w Δ dla $\mathcal{E}$ dostatecznie bliskich 0 przypuśćmy przeciwnie, że dla dowolnego $\mathcal{E} \in R$ istnieję dwa punkty $w_1, w_2 \in \Delta$, $w_1 \neq w_2$ i takie, że $w_\varepsilon(w_1) = w_\varepsilon(w_2)$, czyli

$$\frac{w_1 + 1 + (w_1 - 1)\exp\varepsilon\phi(w_1)}{w_1 + 1 - (w_1 - 1)\exp\varepsilon\phi(w_1)} = \frac{w_2 + 1 + (w_2 - 1)\exp\varepsilon\phi(w_2)}{w_2 + 1 - (w_2 - 1)\exp\varepsilon\phi(w_2)},$$

a więc:

$$\frac{w_2 - 1}{w_2 + 1} = \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\exp\varepsilon(\phi(w_1) - \phi(w_2)),$$

skąd otrzymujemy:

$$\left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} - \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}\right| = \left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right| \left|1 - \exp\varepsilon(\phi(w_1) - \phi(w_2))\right| \tag{8}$$

Korzystając ponownie z nierówności $|1 - e^s| \leqslant |s|e^{|s|}$, (8) daje nam nierówność:

$$\left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} - \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}\right| \leqslant \left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right| |\varepsilon| \, |\phi(w_1) - \phi(w_2)| \exp\left\{|\varepsilon||\phi(w_1) - \phi(w_2)|\right\}$$

Po przekształceniach, biorąc pod uwagę postać funkcji $\chi(w,\omega)$, dostajemy:

$$1 \leqslant \left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right| |\varepsilon| \left|\frac{(w_1+1)(w_2+1)(\phi(w_1) - \phi(w_2))}{2(w_1 - w_2)}\right| \exp\left\{|\varepsilon| \, |\phi(w_1) - \phi(w_2)|\right\} =$$

$$= \varepsilon \left|\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right| |\chi(w_1, w_2)| \exp\left\{|\varepsilon| \, |\phi(w_1) - \phi(w_2)|\right\}$$

Wobec warunku (iii) mamy, że istnieje taka stała M_4, że dla każdego $w \in \Delta$, $\left|\frac{w-1}{w+1}\right| \leqslant M_4$, stąd $1 \leqslant M_4 |\varepsilon| M_2 \exp 2|\varepsilon| M_1$, co nie jest możliwe dla dostatecznie małego ε.

Udowodniliśmy tym samym, że możemy zbudować wariację postaci

$$w_\varepsilon(w) = w + \varepsilon(w^2 - 1)\phi(w) + o(\varepsilon),$$

jednolistną w otoczeniu brzegu D, odwzorowującą ∂D na brzeg ∂D_ε obszaru D_ε takiego, że jeżeli $w \in D_\varepsilon$ to $-w \notin D_\varepsilon$ oraz taką, że $K_d \subset D_\varepsilon$, $\partial K_d \cap \partial D_\varepsilon \neq \phi$, $\partial K_d^- \cap \partial D_\varepsilon \neq \phi$. Obecnie celem naszym będzie znalezienie funkcji f_ε, która koło U odwzorowuje konforemnie na obszar D_ε, zachowując warunek $f(0) = 1$. Skorzystamy tutaj z twierdzenia Gołuzina [2], ss. 99-101.

Niech $f \in G(d)$. Niech dalej $P = \{z : r < |z| < 1\}$, $r \in (0, 1)$ będzie takim pierścieniem, że $f(P) \subset D \cap \Delta$. Rozważmy funkcję

$$f^*(z,\varepsilon) = w_\varepsilon(f(z)) - 1 = (f(z)-1) + \varepsilon(f^2(z)-1)\Phi(f(z)) + o(\varepsilon), \tag{9}$$

gdzie $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ niemal jednostajnie w P.
Jest to funkcja holomorficzna zmiennych $(z,\varepsilon) \in P \times \{\varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ i przy każdym $\varepsilon \in R$ i $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ jest funkcją jednolistną zmiennej $z \in P$. Zgodnie z twierdzeniem Gołuzina istnieje funkcja jednolistna w U postaci:

$$f_\varepsilon^*(z) = f(z) - 1 + \varepsilon\left\{(f^2(z)-1)\Phi(f(z)) - zf'(z)S(z) + zf'(z)\overline{S(\tfrac{1}{\bar z})}\right\} + $$
$$+ o(\varepsilon),$$

gdzie S(z) oznacza część główną rozwinięcia funkcji $\frac{(f^2(z)-1)\Phi(f(z))}{zf'(z)}$ w szereg Laurenta w pierścieniu P, przy czym $f_0^*(z) = f(z) - 1$, $f_\varepsilon^*(0) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f_\varepsilon^*(z) - f_0^*(z)}{\varepsilon}$ istnieje w sensie zbieżności niemal jednostajnej w U. Zatem $f_\varepsilon^*(z,\varepsilon)$ jest wariacją funkcji $f(z) - 1$, a funkcja $f_\varepsilon(z) = f_\varepsilon^*(z) + 1$ jest wariacją funkcji $f(z)$. Zauważmy, że obszar D_ε powstaje przez dodanie do obrazu pierścienia P przez funkcję jednolistną $w_\varepsilon(f(z))$ domknięcie składowej zawierającej 1. Funkcja $f_\varepsilon(z)$ odwzorowująca koło U na D_ε tak, że $f(0) = 1$, ma postać:

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon\left\{(f^2(z)-1)\Phi(f(z)) - zf'(z)S(z) + \right.$$
$$\left. + zf'(z)\overline{S(\tfrac{1}{\bar z})}\right\} + o(\varepsilon) \tag{10}$$

Tym samym znaleźliśmy dla dowolnej funkcji $f \in G(d)$ pewną rodzinę wariacyjną, której funkcje są określone wzorem (10).

Obecnie znajdziemy funkcję Φ spełniającą warunki (a) i (b). W tym celu skonstruujemy funkcję Greena dla obszaru $\mathcal{R} = C\setminus(\bar K_d \cup \bar K_{d^-})$ o biegunie w punkcie ω. Funkcja Greena dla pierścienia $P_1 = \{\zeta : 0 < k^2 < |\zeta| < 1\}$ z biegunem w punkcie c, $k^2 < c < 1$ ma postać, [4], str. 128:

$$g_{P_1}(\zeta, c) = \frac{\log c}{2\log k}\log|\zeta| - \log|G(\zeta)|,$$

$$G(\zeta) = \frac{\vartheta(\frac{1}{2\pi i}(\log\zeta - \log c))}{\vartheta(\frac{1}{2\pi i}(\log\zeta + \log c))}, \qquad \tau = \frac{2\log k}{\pi i}.$$

natomiast

$$\vartheta(u) = \exp\left\{-\eta_1 u^2\right\} \sigma(u),$$

$$\sigma(u) = u \prod_{\substack{k=1 \\ \omega_k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{\omega_k}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega_k}\right)^2\right), \tag{11}$$

$$\omega_k = m + n\tau, \qquad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\eta_1 = \frac{\sigma'(\frac{1}{2})}{\sigma(\frac{1}{2})}$$

Odwzorowania $\zeta = \frac{k|z_0|}{z_0} z$, $k < |z_0| < \frac{1}{k}$ przekształca konforemnie pierścień $P_2 = \left\{z : k < |z| < \frac{1}{k}\right\}$ na pierścień P_1, przy czym punkt z_0 przechodzi na punkt leżący na osi rzeczywistej. Zatem funkcją Greena dla pierścienia P_2 z biegunem w punkcie z_0 będzie funkcja:

$$g_{P_2}(z, z_0) = g_{P_1}\left(\frac{k|z_0|}{z_0} z, k|z_0|\right) = \frac{\log k|z_0|}{2\log k} \log k|z| -$$

$$- \log \left| \frac{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}(\log z - \log z_0)\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}(\log z + \overline{\log z_0}) + \frac{1}{2}\tau\right)} \right|,$$

gdzie funkcja $\vartheta(u)$ określona jest związkami (11). Z kolei zauważmy, ze odwzorowanie $z = \frac{w-1}{w+1}$ odwzorowuje konforemnie obszar $\mathcal{R}$ na pierścień P_2, w którego definicji przyjmujemy $k = \frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}$, czyli funkcja Greena dla obszaru $\mathcal{R}$, z biegunem w punkcie ω, ma postać:

$$g_{\mathcal{R}}(w,\omega) = g_{P_2}\left(\frac{w-1}{w+1}, \frac{\omega-1}{\omega-1}\right) =$$

$$= \frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|\right)}{2(\log(\sqrt{1+d^2}-1)-\log d)} \log\left(\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}\left|\frac{w-1}{w+1}\right|\right) - \log|F(w)|,$$

$$F(w) = \frac{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1} - \log\frac{\omega-1}{\omega+1}\right)\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1} + \overline{\log\frac{\omega-1}{\omega+1}}\right) + \frac{1}{2}\tau\right)},$$

$$\tau = \frac{2}{\pi i}\left(\log(\sqrt{1+d^2}-1) - \log d\right),$$

natomiast funkcja $\vartheta(u)$ określona jest związkami (11). W przypadku gdy $\omega = \infty$, otrzymujemy:

$$g_{\mathcal{R}}(w,\infty) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}\left|\frac{w-1}{w+1}\right|\right) -$$

$$-\log\left|\frac{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\log\frac{w-1}{w+1}\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\log\frac{w-1}{w+1}+\frac{1}{2}\tau\right)}\right|$$

Funkcja $F(w)$ ze względu na to, że $\vartheta(z+1) = -\vartheta(z)$ ([4], str. 119), jest funkcję holomorficzną jednoznaczną w obszarze $\mathcal{R}$ i posiada zero jedynie w punkcie $w = \omega$. Funkcja

$$p_{\mathcal{R}}(w,\omega) = \frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|\right)}{2(\log(\sqrt{1+d^2}-1) - \log d)}\log\left(\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}\,\frac{w-1}{w+1}\right) -$$

jest analitycznym dopełnieniem funkcji $g_{\mathcal{R}}(w,\omega)$. Mamy, że $\operatorname{Re} p_{\mathcal{R}}(w,\omega) = g_{\mathcal{R}}(w,\omega) = 0$ dla $w \in \partial\mathcal{R}$. $p_{\mathcal{R}}(w,\omega)$ jest analityczna w $\mathcal{R}$ poza punktem $w = \omega$, jednakże jest ona funkcją wieloznaczną i nie może być jeszcze poszukiwaną funkcją Φ. Dlatego zdefiniujemy operator Ω:

$$\Omega = e^{i\alpha}(\omega-1)(\omega+1)\frac{\partial}{\partial\omega} + e^{-i\alpha}(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}+1)\frac{\partial}{\partial\overline{\omega}}$$

Zauważmy, że

$$\Omega v = \overline{\Omega v}, \tag{12}$$

jest funkcję o wartościach rzeczywistych.
Utwórzmy wyrażenie

$$T_{\mathcal{R}}(w,\omega) = \Omega\, p_{\mathcal{R}}(w,\omega) =$$

$$= e^{i\alpha}\left\{\frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}\,\frac{w-1}{w+1}\right)}{2(\log(\sqrt{1+d^2}-1)-\log d} + \frac{1}{\pi i}\,\frac{\vartheta'\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1} - \log\frac{\omega-1}{\omega+1}\right)\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1} - \log\frac{\omega-1}{\omega+1}\right)\right)}\right\} +$$

$$+\ e^{-i\alpha}\left\{\frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{d}\,\frac{w-1}{w+1}\right)}{2(\log(\sqrt{1+d^2}-1)-\log d)}+\frac{1}{\pi i}\,\frac{\vartheta'\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}+\overline{\log\frac{\omega-1}{\omega+1}}\right)+\frac{1}{2}\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}+\overline{\log\frac{\omega-1}{\omega+1}}\right)+\frac{1}{2}\tau\right)}\right\}$$

Niech teraz $a, b \in \mathcal{R}$ dowolne, takie, że $a \neq b$ i $a, b \in \partial f(U)$. Funkcja

$$T_{\mathcal{R}}(w,a) - T_{\mathcal{R}}(w,b) = e^{i\alpha}\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\vartheta'\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}-\log\frac{a-1}{a+1}\right)\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}-\log\frac{a-1}{a+1}\right)\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\vartheta'\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}-\log\frac{b-1}{b+1}\right)\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}-\log\frac{b-1}{b+1}\right)\right)}\right]+ \tag{13}$$

$$+\ e^{-i\alpha}\frac{1}{\pi i}\left\{\frac{\vartheta'\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}+\overline{\log\frac{a-1}{a+1}}\right)+\frac{1}{2}\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}+\overline{\log\frac{a-1}{a+1}}\right)+\frac{1}{2}\tau\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\vartheta'\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}+\overline{\log\frac{b-1}{b+1}}\right)+\frac{1}{2}\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{w-1}{w+1}+\overline{\log\frac{b-1}{b+1}}\right)+\frac{1}{2}\tau\right)}\right\}$$

jest już funkcją jednoznaczną w $\mathcal{R}$, holomorficzną poza biegunami pierwszego rzędu w punktach a i b. Pokażemy, że $\operatorname{Re}\{T_{\mathcal{R}}(w,\omega)\} = 0$ dla $w \in \partial K_d \cup \partial K_{d^-}$. Istotnie, niech $h_{\mathcal{R}}(w,\omega)$ będzie funkcją sprzężoną do funkcji $g_{\mathcal{R}}(w,\omega)$; wtedy $\operatorname{Re}\{T_{\mathcal{R}}(w,\omega)\} = \operatorname{Re}\{\Omega\, p_{\mathcal{R}}(w,\omega)\} = \operatorname{Re}\{\Omega\,(g_{\mathcal{R}}(w,\omega) + ih_{\mathcal{R}}(w,\omega))\} = \operatorname{Re}\{\Omega g_{\mathcal{R}}(w,\omega)\} + \operatorname{Re}\{i\Omega\, h_{\mathcal{R}}(w,\omega)\}$. Ze względu na (12) $\operatorname{Re}\{T_{\mathcal{R}}(w,\omega)\} = \Omega\, g_{\mathcal{R}}(w,\omega) = 0$ dla punktów $w \in \partial K_d \cup \partial K_{d^-}$. Utwórzmy funkcję

$$P(w) = (T_{\mathcal{R}}(w,a) - T_{\mathcal{R}}(-w,a)) - (T_{\mathcal{R}}(w,b) - T_{\mathcal{R}}(w,b)) \tag{14}$$

Jest to funkcja jednoznaczna w $\mathcal{R}$, holomorficzna poza biegunami jednokrotnymi w punktach a, b, $-a$, $-b$. Ponadto funkcja ta spełnia w $\mathcal{R}$ warunki (a) i (b) narzucone na funkcję $\Phi(w)$.

Korzystając z zasady odbicia Schwarza mamy, że funkcja $P(w)$ rozszerza się na obszar:

$$\tilde{\mathcal{R}} = C \setminus \left\{\left\{w : \left|w - \frac{\sqrt{1+d^2}(4+d^2)}{3d^2+4}\right| \le \frac{d^3}{3d^2+4}\right\} \cup \right.$$

$$\left. \cup \left\{w : \left|w + \frac{\sqrt{1+d^2}(4+d^2)}{3d^2+4}\right| \le \frac{d^3}{3d^2+4}\right\}\right\}$$

jako funkcja holomorficzna i posiada dodatkowe bieguny jednokrotne w punktach:

$$-\frac{\bar{a}d^2 + \sqrt{1+d^2(1-\bar{a}^2)}}{d^2+1-\bar{a}^2}, \quad -\frac{\bar{b}d^2 + \sqrt{1+d^2(1-\bar{b}^2)}}{d^2+1-\bar{b}^2},$$

$$\frac{\bar{a}d^2 - \sqrt{1+d^2(1-\bar{a}^2)}}{d^2+1-\bar{a}^2}, \quad \frac{\bar{b}d^2 - \sqrt{1+d^2(1-\bar{b}^2)}}{d^2+1-\bar{b}^2},$$

należące do obszaru:

$$\left\{w: \left|w + \frac{\sqrt{1+d^2(4+d^2)}}{3d^2+4}\right| > \frac{d^3}{3d^2+4}\right\} \cap \left\{w: \left|w + \sqrt{1+d^2}\right| < d\right\}$$

oraz w punktach

$$\frac{\bar{a}d^2 + \sqrt{1+d^2(1-\bar{a}^2)}}{d^2+1-\bar{a}^2}, \quad \frac{\bar{b}d^2 + \sqrt{1+d^2(1-\bar{b}^2)}}{d^2+1-\bar{b}^2},$$

$$\frac{-\bar{a}d^2 + \sqrt{1+d^2(1-\bar{a}^2)}}{d^2+1-\bar{a}^2}, \quad \frac{-\bar{b}d^2 + \sqrt{1+d^2(1-\bar{b}^2)}}{d^2+1-\bar{b}^2},$$

które należą do obszaru:

$$\left\{w: \left|w - \frac{\sqrt{1+d^2(4+d^2)}}{3d^2+4}\right| > \frac{d^3}{3d^2+4}\right\} \cap \left\{w: \left|w + \sqrt{1+d^2}\right| < d\right\}$$

Zdefiniujemy obecnie zbiór Δ. Weźmy $\delta > 0$ na tyle małe, aby dodatkowe bieguny funkcji $P(w)$ w $\mathcal{R}$ nie należały już do obszaru:

$$\mathcal{R}_\delta = C \setminus \left\{\left\{w: \left|w - \sqrt{1+d^2}\right| \leq d - \delta\right\} \cup \left\{w: \left|w + \sqrt{1+d^2}\right| \leq d - \delta\right\}\right\}$$

oraz by koła domknięte $\overline{K(a,\delta)}$, $\overline{K(-a,\delta)}$, $\overline{K(b,\delta)}$, $\overline{K(-b,\delta)}$ były rozłączne oraz zawarte w $\mathcal{R}_\delta$. Następnie usuńmy wyżej opisane koła z obszaru $\mathcal{R}_\delta$. W ten sposób skonstruowany zbiór otwarty $\mathcal{T}$ będzie spełniał warunki nałożone na zbiór Δ, a funkcja $P(w)$ zawężona do tego zbioru spełnia warunki nałożone na funkcję $\phi(w)$.

W celu napisania wariacji funkcji f musimy znaleźć teraz część główną rozwinięcia o środku w zerze funkcji $\frac{(f^2(z)-1)P(f(z))}{zf'(z)}$ w pierścieniu $P = \{z : r < |z| < 1\}$, gdzie $r > 0$ jest na tyle małe, aby $f(P) \subset \mathcal{T}$. Niech $C_\rho = \{z : |z| = \rho\}$, $r < \rho < 1$; wówczas poszukiwana część główna $S(z)$ wyraża się wzorem:

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{(f^2(\zeta) - 1)P(f(\zeta))}{\zeta f'(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta}$$

Uwzględniając powyższe, wzór wariacyjny (10) przyjmie postać:

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon(f^2(z) - 1)P(f(z)) -$$

$$- \varepsilon z f'(z) \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{(f^2(\zeta) - 1)P(f(\zeta))}{\zeta f'(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} +$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{(f^2(\zeta) - 1)P(f(\zeta))}{\zeta f'(\zeta)} \frac{\bar{z}\, d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta}} + O(\varepsilon) \tag{15}$$

lub, kładąc $\varphi(w) = f^{-1}(w)$ $w \in D$:

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon(f^2(z) - 1)P(f(z)) -$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{f(C_\rho)} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z - \varphi(w)} +$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{f(C_\rho)} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{\bar{z}\, dw}{1 - \bar{z}\varphi(w)}} + O(\varepsilon) \tag{15'}$$

Wzory (15) i (15') przyjmują różne postacie w zależności od położenia punktów a, b, -a, -b w stosunku do obszaru D.

a) Przypuśćmy najpierw, że a, b, -a, -b $\notin \bar{D}$. Niech $\mathfrak{T}_1$ będzie obszarem dwuspójnym ograniczonym krzywą $f(C_\rho) \subset \mathfrak{T}$ i okręgiem $K_{d-\delta} = \left\{w : \left|w - \sqrt{1 + d^2}\right| = d - \delta\right\}$. W obszarze tym funkcja podcałkowa, występująca w drugiej całce wzoru (15'), jest holomorficzna dla każdego $z \in U$, a więc:

$$\overline{\int\limits_{f(C_\rho)} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{\bar{z}\, dw}{1 - \bar{z}\varphi(w)}} =$$

$$= \overline{\int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{\bar{z}\, dw}{1 - \bar{z}\varphi(w)}}. \tag{16}$$

gdzie okrąg $\partial K_{d-\delta}$ jest zorientowany dodatnio względem swego wnętrza. Funkcja podcałkowa w pierwszej całce wzoru (15') jest także holomorficzna w obszarze π_1, jeżeli tylko $z \in \{z : \rho < |z| < 1\}$ i dla takich z mamy:

$$\int_{f(C_\rho)} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(z)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z-\varphi(w)} = \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z-\varphi(w)} \tag{17}$$

Natomiast całki po prawych stronach wzorów (16) i (17) są funkcjami holomorficznymi zmiennej z nie tylko w pierścieniu $\{z : \rho < |z| < 1\}$, ale także w całym obszarze dwuspójnym ograniczonym okręgiem ∂U oraz krzywą $\Gamma = \varphi(\partial K_{d-\delta})$. Dla z z tego obszaru wzór (15) przyjmie postać:

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon(f^2(z) - 1)P(f(z)) -$$

$$- \varepsilon z f'(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z-\varphi(w)} +$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\varepsilon}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{\bar{z}\, dw}{1-\bar{z}\varphi(w)} + O(\varepsilon) \tag{18}$$

W celu znalezienia postaci funkcji $f_\varepsilon(z)$ dla z położonych wewnątrz krzywej Γ rozpatrzmy funkcję:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(f^2(\zeta) - 1)P(f(\zeta))}{\zeta f'(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z-\varphi(w)},$$

gdzie krzywa Γ jest zorientowana dodatnio względem swego wnętrza. Funkcja $\dfrac{(f^2(\zeta) - 1)P(f(\zeta))}{\zeta f'(\zeta)}$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu Γ, a więc w szczególności jest całkowalna na Γ. Niech $z_0 \in \Gamma$. Oznaczmy przez $F_1(z_0)$ i $F_p(z_0)$ granice (o ile istnieją) funkcji $F(z)$, gdy z dąży odpowiednio od wnętrza lub od zewnętrza krzywej Γ do punktu z_0. Z twierdzenia Sochockiego wiadomo, że granice te istnieją i zachodzi między nimi związek:

$$F_1(z_0) = F_p(z_0) + \frac{(f^2(z_0) - 1)F(f(z_0))}{z_0 f'(z_0)} \tag{19}$$

Przechodząc we wzorze (18) do granicy przy z dążącym do z_o od zewnętrza krzywej Γ oraz uwzględniając (19), otrzymujemy:

$$f_\varepsilon(z_o) = f(z_o) - z_o f'(z_o) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z_o - \varphi(w)} +$$

$$+ \varepsilon z_o f'(z_o) \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{d-\varepsilon}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{\bar{z}_o \, dw}{1 - \bar{z}_o\varphi(w)} + O(\varepsilon), \quad (20)$$

gdzie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z_o - \varphi(w)} =$$

$$= \lim_{\substack{z \to z_o \\ z \text{ należy} \\ \text{do wnętrza } \Gamma}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\varepsilon}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z - \varphi(w)}$$

Wzór (20) zachodzi dla każdego $z_o \in \Gamma$. Obie jego strony są funkcjami holomorficznymi zmiennej z, dla z leżących wewnątrz krzywej Γ i funkcjami ciągłymi na domknięciu wnętrza Γ, a zatem dla z należących do wnętrza Γ otrzymujemy:

$$f_\varepsilon(z) = f(z) - \varepsilon z f'(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z - \varphi(w)} +$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{\bar{z}\, dw}{1 - \bar{z}\varphi(w)} + O(\varepsilon)$$

b) Obecnie założymy, że $a, b \in D \cap \mathcal{R}$; wówczas ze względu na własność obszaru D mamy, że $-a, -b \notin \bar{D}$. Funkcje

$$\frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{1}{z - \varphi(w)} \quad \text{i} \quad \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)} \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\varphi(w)}$$

mają w obszarze $\mathfrak{X}_1$ bieguny w punktach a i b o ile $z \notin \varphi(\mathfrak{X}_1)$.

Części główne funkcji $P(w)$ w punktach a i b wynoszą odpowiednio: $\frac{e^{i\alpha}(a^2-1)}{w-a}$, $\frac{-e^{i\alpha}(b^2-1)}{w-b}$, a więc dla $z\in U\setminus\varphi(\mathcal{T}_1)$ mamy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{f(C_\rho)}\frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)}\,\frac{dw}{z-\varphi(w)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_{d-\delta}}\frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)}\,\frac{dw}{z-\varphi(w)}+$$

$$+\frac{e^{i\alpha}(a^2-1)^2\varphi'^2(a)}{\varphi(a)}\,\frac{1}{z-\varphi(a)}-\frac{e^{i\alpha}(b^2-1)^2\varphi'^2(b)}{\varphi(b)}\,\frac{1}{z-\varphi(b)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{f(C_\rho)}\frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)}\,\frac{\bar z\,dw}{1-\bar z\varphi(w)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_{d-\delta}}\frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)}\,\frac{\bar z\,dw}{1-\bar z\varphi(w)}+$$

$$+\frac{e^{i\alpha}(a^2-1)^2\varphi'^2(a)}{\varphi(a)}\,\frac{\bar z}{1-\bar z\varphi(a)}-\frac{e^{i\alpha}(b^2-1)^2\varphi'^2(b)}{\varphi(b)}\,\frac{\bar z}{1-\bar z\varphi(b)}$$

Wzory wariacyjne mają zatem postać:

$$f_\varepsilon(z)=f(z)+\varepsilon\,(f^2(z)-1)P(fz))-$$

$$-\varepsilon zf'(z)\,\frac{(a^2-1)^2\varphi'^2(a)}{\varphi(a)}\,\frac{e^{i\alpha}}{z-\varphi(a)}+\varepsilon zf'(z)\,\overline{\frac{(a^2-1)^2\varphi'^2(a)}{\varphi(a)}}\,\frac{ze^{-i\alpha}}{1-z\overline{\varphi(a)}}-$$

$$-\varepsilon zf'(z)\,\frac{(b^2-1)^2\varphi'^2(b)}{\varphi(b)}\,\frac{e^{i\alpha}}{z-\varphi(b)}+\varepsilon zf'(z)\,\overline{\frac{(b^2-1)^2\varphi'^2(b)}{\varphi(b)}}\,\frac{ze^{-i\alpha}}{1-z\overline{\varphi(b)}}-$$

$$-\varepsilon zf'(z)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_{d-\delta}}\frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)}\,\frac{dw}{z-\varphi(w)}+$$

$$+\varepsilon zf'(z)\,\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\partial K_{d-\delta}}\frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)}\,\frac{\bar z\,dw}{1-\bar z\varphi(w)}}+O(\varepsilon)\qquad(22)$$

dla z należących do zewnętrza krzywej Γ i analogicznie:

$$f_\varepsilon(z) = f(z) - \varepsilon z f'(z) \frac{(a^2-1)^2\varphi'^2(a)}{\varphi(a)} \frac{e^{i\alpha}}{z-\varphi(a)} +$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \overline{\frac{(a^2-1)^2\varphi'^2(a)}{\varphi(a)}} \frac{ze^{-i\alpha}}{1-z\overline{\varphi(a)}} - \varepsilon z f(z) \frac{(b^2-1)^2\varphi'^2(b)}{\varphi(b)} \frac{e^{i\alpha}}{z-\varphi(b)} +$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \overline{\frac{(b^2-1)^2\varphi'^2(b)}{\varphi(b)}} \frac{ze^{-i\alpha}}{1-z\overline{\varphi(b)}} - \varepsilon z f'(z) \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{1}{2\pi i} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(2)P(w)}{\varphi(w)} \frac{dw}{z-\varphi(w)}$$

$$+ \varepsilon z f'(z) \overline{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{(w^2-1)\varphi'^2(w)P(w)}{\varphi(w)}} \frac{\bar{z}\, dw}{1-\bar{z}\varphi(w)} + O(\varepsilon) \tag{23}$$

dla z należących do wnętrza krzywej Γ. Modyfikacje wzorów (18), (21), (22), (23), gdy a, b, $-a$, $-b$ mają inne położenie niż w opisanych przypadkach, są oczywiste.

Niech teraz Ψ będzie ciągłym, zespolonym funkcjonałem określonym na $G(d)$ i posiadającym pochodną Gâteaux, tzn.:

$$\Psi(f+\varepsilon h) = \Psi(f) + \varepsilon \Lambda_f(h) + O(\varepsilon), \tag{24}$$

gdzie $\Lambda_f(h)$ jest ciągłym liniowym funkcjonałem, określonym w przestrzeni $H(U)$ funkcji holomorficznych w U, a $f+\varepsilon h + O(\varepsilon) \in G(d)$ dla ε dostatecznie małych.

a) Załóżmy, że $\Psi(f)$ zależy jedynie od wartości f w przeciwobrazie koła K_d. Przypuśćmy, że dla $f \in G(d)$ funkcjonał $\mathrm{Re}\,\Psi(f)$ posiada maksimum lokalne, tzn. dla wszystkich funkcji $f^* \in G(d)$ dostatecznie bliskich funkcji f na zwartych podzbiorach U zachodzi nierówność:

$$\mathrm{Re}\,\Psi(f^*) \leqslant \mathrm{Re}\,\Psi(f).$$

Jeżeli $f^*(z) = f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon h(z) + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \in R$, wówczas z powyższej nierówności oraz z (24) wobec dowolności ε otrzymamy warunek, jaki musi być spełniony przez funkcję ekstremalną $f(z)$, a mianowicie:

$$\mathrm{Re}\,\Lambda_f(h) = 0 \tag{25}$$

Połóżmy:

$$M(w) = \left(\frac{(w^2-1)\varphi'(w)}{\varphi(w)}\right)^2. \tag{26}$$

$$N(w) = \Lambda_f\left(\frac{zf'(z)\varphi(w)}{z-\varphi(w)}\right) - \overline{\Lambda_f\left(\frac{z^2 f'(z)\overline{\varphi(w)}}{1 - z\overline{\varphi(w)}}\right)} \tag{27}$$

Uwzględniając (26) i (27), warunek (25) przyjmuje dla wariacji (23) postać:

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}(N(a)N(a) - M(b)N(b)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)P(w)}{w^2-1}\, N(w)dw\right\} = 0,$$

gdzie:

$$P(w) = e^{i\alpha}(a^2-1)\frac{\partial}{\partial\omega}\left[p_{\mathcal{R}}(w,\omega) - p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right]_{\omega=a} +$$
$$+ e^{-i\alpha}(\bar{a}^2-1)\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}}\left[p_{\mathcal{R}}(w,\omega) - p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right]_{\omega=a} -$$
$$- e^{i\alpha}(b^2-1)\frac{\partial}{\partial\omega}\left[p_{\mathcal{R}}(w,\omega) - p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right]_{\omega=b} -$$
$$- e^{-i\alpha}(\bar{b}^2-1)\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}}\left[p_{\mathcal{R}}(w,\omega) - p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right]_{\omega=b}$$

Stąd korzystając z dowolności α mamy:

$$M(a)N(a) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1}\left[(a^2-1)\frac{\partial}{\partial\omega}\left(p_{\mathcal{R}}(w,\omega)-p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right)\Big|_{\omega=a}\right]dw +$$
$$\overline{+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1}\left[(\bar{a}^2-1)\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}}\left(p_{\mathcal{R}}(w,\omega)-p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right)\Big|_{\omega=a}\right]dw} =$$
$$= M(b)N(b) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1}\left[(b^2-1)\frac{\partial}{\partial\omega}\left(p_{\mathcal{R}}(w,\omega)-p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right)\Big|_{\omega=b}\right]dw +$$
$$\overline{+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1}\left[(\bar{b}^2-1)\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}}\left(p_{\mathcal{R}}(w,\omega)-p_{\mathcal{R}}(-w,\omega)\right)\Big|_{\omega=b}\right]dw}$$

Jeżeli ustalimy $b \in D \cap \mathcal{R}$, to otrzymamy dla dowolnego $a \in D \cap \mathcal{R}$ związek:

$$M(a)N(a) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1} (a^2-1) \frac{\partial}{\partial a} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))dw +$$

$$\overline{+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1} (\bar{a}^2-1) \frac{\partial}{\partial \bar{a}} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))\, dw} = \text{const} \tag{28}$$

Wykażemy obecnie, że funkcja $M(a)N(a)$ jest funkcją holomorficzną w obszarze $\mathcal{R}$. Rzeczywiście, jeżeli $a \in \mathcal{R}$, to $\Delta (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a)) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial_a \partial_{\bar{a}}} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a)) = 0$ dla każdego $w \in \partial K_{d-\delta}$, co oznacza że funkcja $p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a)$ jest funkcją harmoniczną zmiennej $a \in \mathcal{R}$. Pochodne $\frac{\partial}{\partial a} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))$ i $\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{a}} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))}$ są zatem funkcjami holomorficznymi zmiennej a w $\mathcal{R}$. Tym samym całki występujące po lewej stronie wzoru (28) są także funkcjami holomorficznymi zmiennej a. Z (28) mamy dalej:

$$M(a)N(a) + (a^2-1) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{\partial}{\partial a} (\frac{M(w)N(w)}{w^2-1})p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))) \,dw +$$

$$\overline{+ (a^2-1) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{\partial}{\partial \bar{a}} (\frac{M(w)N(w)}{w^2-1} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a)))dw} = \text{const},$$

skąd otrzymujemy:

$$M(a)N(a) + (a^2-1) \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))dw +$$

$$\overline{+ (a^2-1) \frac{\partial}{\partial \bar{a}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))dw} = \text{const},$$

a to oznacza, że

$$M(a)N(a) + 2(a^2-1) \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{d-\delta}} \frac{M(w)N(w)}{w^2-1} (p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a))dw =$$

$$= \text{const} \tag{29}$$

Połóżmy

$$A(w) = M(w)N(w), \qquad w \in \mathcal{R} \cap f(U).$$

Ponieważ drugi składnik lewej strony w związku (29) jest funkcją holomorficzną w całym obszarze $\mathcal{R}$, funkcję $A(w)$ możemy przedłużyć holomorficznie na ten obszar. Co więcej, podstawiając w (28) $-a$ w miejsce a, korzystając z własności funkcji $\vartheta(u)$, zdefiniowanej wzorem (11), a mianowicie: $\vartheta(-u) = -\vartheta(u)$, $\vartheta(u+\tau) = -\vartheta(u)\exp(-\pi i(2u+\tau))$ [4], str. 119, otrzymujemy po obliczeniach

$$A(w) = A(-w) \quad \text{dla} \quad w \in \mathcal{R}.$$

Tym samym udowodniliśmy twierdzenie 1.

<u>Twierdzenie 1</u>. Niech $\Psi(f)$ jest funkcjonałem zespolonym, określonym co najmniej na $G(d)$ i posiadającym na $G(d)$ pochodną w sensie Gâteaux oraz zależnym jedynie od wartości funkcji f położonych w K_d. Jeżeli $f \in G(d)$ jest funkcją realizującą maksimum funkcjonału $\operatorname{Re}\Psi(f)$, to f spełnia równanie (29) dla każdego $a \in f(U) \cap \mathcal{R}$, gdzie $\mathcal{R} = C\setminus(\overline{K}_d \cup \overline{K}_{d^-})$, $M(w)$ i $N(w)$ są określone wzorami (26) i (27), a $p_{\mathcal{R}}(w,\omega)$ jest dopełnieniem analitycznym funkcji Greena dla obszaru $\mathcal{R}$ z biegunem w ω. $A(w) = M(w)N(w)$ dla $w \in \mathcal{R} \cap f(U)$ przedłuża się z tego zbioru na cały obszar $\mathcal{R}$, przy czym $A(w) = A(-w)$ dla każdego $w \in \mathcal{R}$.

Następne twierdzenie traktują o własnościach funkcji ekstremalnych z $G(d)$.

<u>Twierdzenie 2</u>. Niech $\Psi(f)$ będzie funkcjonałem spełniającym założenia twierdzenia 1, a $f \in G(d)$ funkcją realizującą jego maksimum. Jeżeli odpowiadająca f funkcja $A(w) = M(w)N(w)$, gdzie $M(w)$ i $N(w)$ określone są wzorami (26) i (27) nie jest stała, to obszar $\mathcal{R}$ nie zawiera punktów zewnętrznych zbioru $f(U) \cup h(U)$, gdzie $h(z) = -f(z)$. W szczególności, ponieważ $K_d \subset f(U)$ i $K_{d^-} \subset h(U)$, dopełnienie zbioru $f(U) \cup h(u)$ do całej płaszczyzny domkniętej nie zawiera punktów wewnętrznych.

<u>Dowód</u>: Przypuśćmy, że istnieją punkty $a, b \in \mathcal{R}$ zewnętrzne względem zbioru $f(U) \cup h(U)$. Wówczas również punkty $-a, -b$ są zewnętrzne względem tego zbioru. Możemy zatem zastosować wzór wariacyjny (21). Następnie korzystając z dowolności ε i α dokonujemy przekształceń analogicznych jak przy wyprowadzaniu związku (29). W ten sposób uzyskujemy, że dla każdego $a \in \mathcal{R}\setminus(\overline{f(U)} \cup \overline{h(U)})$

$$(a^2-1)\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_{d-\delta}}\frac{M(w)N(w)}{w^2-1}\left(p_{\mathcal{R}}(w,a) - p_{\mathcal{R}}(-w,a)\right)dw = \text{const} \qquad (30)$$

Jak wiemy, funkcja znajdująca się po lewej stronie związku (30) jest funkcją holomorficzną zmiennej a w całym obszarze $\mathcal{R}$. Stąd wnioskujemy, że związek (30) zachodzi dla każdego $a \in \mathcal{R}$, w szczególności również w punktach zbioru $\mathcal{R} \cap f(U)$. Biorąc pod uwagę (29) otrzymujemy $M(a)N(a)=\mathrm{const}$, co jest sprzeczna z założeniem.

Obecnie wyprowadzimy dwie proste wariacje, które posłużą nam do dalszego badania własności funkcji ekstremalnych. Powstają one w wyniku złożenia $f \circ q$, gdzie $q : U \to U$ jest funkcją holomorficzną i jednolistną taką, że $q(0) = 0$.

Jeżeli położymy $q(z) = e^{i\varepsilon}z$, $\varepsilon \in R$, wówczas dla ε dostatecznie małych istnieje funkcja f_ε postaci:

$$f_\varepsilon(z) = f(e^{i\varepsilon}z) = f(z) + i\varepsilon z f'(z) + O(\varepsilon), \tag{31}$$

która należy do $G(d)$ i jest wariacją funkcji w w tej klasie.

Jeżeli natomiast $q(z) = k_\alpha^{-1}\left[(1-\varepsilon)k_\alpha(z)\right]$, gdzie $k_\alpha(z) = \dfrac{z}{(1+e^{-i\alpha}z)^2}$, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in R$, wówczas otrzymamy wariację funkcji $f \in G(d)$ postaci:

$$f_\varepsilon(z) = f(z) - \varepsilon z f'(z)\,\frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z} + O(\varepsilon) \tag{32}$$

Wariacja (32) odpowiada utworzeniu małego wycięcie w punkcie $f(e^{i\alpha}) \in \partial f(U)$. Jest ona dopuszczalna jedynie wtedy, gdy nie wyprowadza funkcji $f_\varepsilon(z)$ z rodziny $G(d)$, a mianowicie wtedy, gdy:

$$\left|f(e^{i\alpha}) - \sqrt{1 + d^2}\right| \geqslant d \quad i \quad \left|f(e^{i\alpha}) + \sqrt{1 + d^2}\right| \geqslant d.$$

Jeżeli f realizuje maksimum funkcjonału $\mathrm{Re}\,\Psi(f)$, to wówczas warunek (25) dla wariacji (31) przyjmuje postać:

$$\mathrm{Im}\,\Lambda_f(zf'(z)) = 0, \tag{33}$$

natomiast ze względu na to, że wariacja (32) jest określona dla $\varepsilon > 0$, otrzymujemy nierówność:

$$\mathrm{Re}\,\Lambda_f\left(zf'(z)\,\frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z}\right) \geqslant 0 \tag{34}$$

Połóżmy dalej:

$$B(\zeta) = N(w), \quad w = f(\zeta).$$

a zatem

$$B(\zeta) = \zeta\Lambda_f\left(\frac{zf'(z)}{z-\zeta}\right) - \zeta\overline{\Lambda_f\left(\frac{z^2f'(z)}{1-z\bar{\zeta}}\right)}$$

Na mocy twierdzenia Caccioppoli-Köthego o przedstawieniu funkcjonału liniowego i ciągłego z przestrzeni $H'(U)$ mamy, że funkcja $B(\zeta)$ jest holomorficzna w pewnym pierścieniu $\left\{\zeta : \rho < |\zeta| < \frac{1}{\rho}\right\}$, gdzie $\rho \in (0,1)$. Ponadto mamy:

$$B(e^{i\theta}) = \Lambda_f\left(\frac{e^{i\theta}zf'(z)}{z-e^{i\theta}}\right) - \overline{\Lambda_f\left(\frac{e^{-i\theta}z^2f'(z)}{1-ze^{-i\theta}}\right)} =$$

$$= \Lambda_f\left(\frac{e^{i\theta}zf'(z)}{z-e^{i\theta}}\right) + \overline{\Lambda_f\left(\frac{e^{i\theta}zf'(z)}{z-e^{i\theta}}\right)} + \overline{\Lambda_f(zf'(z))},$$

co na mocy (33) oznacza, że $B(\zeta)$ jest rzeczywista dla $\zeta \in \partial U$. Co więcej, dla tych $\zeta = e^{i\theta} \in \partial U$, dla których $\left|f(\zeta) - \sqrt{1+d^2}\right| \geq d$ i $\left|f(\zeta) + \sqrt{1+d^2}\right| \geq d$, mamy, że $B(\zeta) \leq 0$, bowiem na mocy nierówności (34) mamy dalej:

$$B(e^{i\theta}) = \mathrm{Re}\,\Lambda_f\left(\frac{2e^{i\theta}zf'(z)}{z-e^{i\theta}} + zf'(z)\right) = -\mathrm{Re}\,\Lambda_f\left(zf'(z)\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right) \leq 0$$

Zauważmy dalej, że

$$A(f(\zeta))\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f^2(\zeta)-1}\right)^2 = B(\zeta)$$

dla $\zeta \in \{\zeta : \eta < |\zeta| < 1\}$, gdzie $0 < \eta < 1$ jest takie, by zachodziło $f(\{\zeta : \eta < |\zeta| < 1\}) \subset \{w : w \in C \setminus (\bar{K}_d \cup \bar{K}_{d^-})\}$ lub równoważnie

$$A(w)\,\frac{dw^2}{(w^2-1)^2} = B(\zeta)\,\frac{d\zeta^2}{\zeta^2}, \qquad w = f(\zeta), \tag{35}$$

gdzie $A(w)$ jest funkcją holomorficzną w obszarze

$$\left\{w : w \in C \setminus \left(\left\{w : \left|w - \sqrt{1+d^2}\right| \leq d - \delta\right\} \cup \left\{w : \left|w + \sqrt{1+d^2}\right| \leq d\right\}\right)\right\},$$

a $B(\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w pierścieniu $\left\{\zeta : \rho < |\zeta| < \frac{1}{\rho}\right\}$.

Załóżmy, że $B(\zeta) \not\equiv 0$. Wówczas ilość zer $B(\zeta)$ położonych na okręgu ∂U jest skończona i okrąg ten można podzielić na skończoną ilość łuków, na których $B(\zeta) \geq 0$ lub $B(\zeta) \leq 0$. Ponieważ $\frac{d\zeta^2}{\zeta^2} < 0$ dla $\zeta \in \partial U$, $B(\zeta) \leq 0$ dla tych $\zeta \in \partial U$, dla których $\left|f(\zeta) - \sqrt{1+d^2}\right| \geq d$ i $\left|f(\zeta) + \sqrt{1+d^2}\right| \geq d$ oraz $w = f(\zeta)$ jest rozwiązaniem równania (35). Ta część brzegu, która leży w obszarze $\mathcal{R}$, musi leżeć na trajektoriach różniczki kwadratowej $A(w)\frac{dw^2}{(w^2-1)^2}$. $A(w)$ - jak pokazaliśmy - jest holomorficzna w $\mathcal{R}$, a zatem wspomniane łuki są łukami analitycznymi, a stąd wynika, że funkcja f przedłuża się jako funkcja holomorficzna na koło domknięte U, z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów. Otrzymane wyżej wyniki możemy sformułować w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 3. Niech $\Psi(f)$ będzie funkcjonałem spełniającym założenia twierdzenia 3, a $f \in G(d)$ funkcją realizującą jego maksimum. Wówczas brzeg obszaru $D = f(U)$ jest krzywą kawałkami analityczną, złożoną z trajektorii różniczki kwadratowej $A(w)\frac{dw^2}{(w^2-1)^2}$ oraz z łuków okręgów ∂K_d i ∂K_{d^-}.

W przypadku gdy $\Psi(f)$ jest funkcjonałem zależnym jedynie od wartości funkcji f położonych w obszarze $\mathcal{R}$, korzystamy ze wzoru wariacyjnego (18) i wykonujemy te same rachunki co poprzednio. Uzyskujemy tym samym twierdzenie:

Twierdzenie 4. Niech $\Psi(f)$ jest funkcjonałem zespolonym, określonym co najmniej na $G(d)$ i posiadającym na $G(d)$ pochodną w sensie Gâteaux oraz zależnym jedynie od wartości funkcji f położonych w obszarze $\mathcal{R} = C\setminus(\bar{K}_d \cup \bar{K}_{d^-})$. Jeżeli $f \in G(d)$ jest funkcją realizującą maksimum funkcjonału $\operatorname{Re}\Psi(f)$, to dla każdego $a \in \mathcal{R} \cap f(U)$ f spełnia równanie:

$$M(a)N(a) + 2(a^2-1)\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{d-\delta}}\frac{M(w)N(w)}{w^2-1}\left(p_{\mathcal{R}}(w,a)-p_{\mathcal{R}}(-w,a)\right)dw - \Lambda_f\left[f(z)\left(p_{\mathcal{R}}(f(z),a) - p_{\mathcal{R}}(-f(z),a)\right)\right]\right\} = \text{const},$$

gdzie $M(w)$ i $N(w)$ są określone wzorami: (26) i (27), a $p_{\mathcal{R}}(w,\omega)$ jest dopełnieniem analitycznym funkcji Greena dla obszaru $\mathcal{R}$ z biegunem w ω.

LITERATURA

[1] Barnard R.W.: On bounded univalent functions whose ranges contain a fixed dis, Trans. Amer. Math. Soc. 225 (1977), pp. 123-144.

[2] Gołuzin G.M.: Geometriczeskaja teorija funkcij kompleksnowo pieriemiennowo, Nauka, Moskwa 1966.

[3] Hummel J.A., Pinchuk B., Schiffer M.: Bounded univalent functions which cover a fixed disk, J. Analyse Math. 36 (1979).

[4] Krzyż J.: Zbiór zadań z funkcji analitycznych (1972).

[5] Netanyahu E.: On univalent functions in the unit disk whose contains a given disk, J. Analyse Math., 23 (1970), pp. 305-322.

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1985

ОВ ФУНКЦИЯХ ГЕЛЬФЕРА, КОТОРЫХ МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ПОКРЫВАЕТ ДАННЫЙ КРУГ

Р е з ю м е

Функция регулярная и однолистная в единичном круге $U = \{z : |z|<1$, вида

$$f(z) = 1 + b_1 z + \dots \tag{1}$$

выполняющая условие

$$f(z_1) + f(z_2) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad z_1, z_2 \in U, \tag{2}$$

называется функцией Гельфера. $G(d)$ – это подкласс класса функций Гельфера в котором функции кроме условий 1 и 2 выполняют дополнительно условия

$$\begin{aligned} &K_d \subset f(U) \\ &\partial f(U) \cap K_d \neq \Phi \\ &\partial f(U) \cap K_{d^-} \neq \Phi \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} K_d &= \left\{w : |w - w_o| < d, \quad w_o = \sqrt{d^2 + 1}\right\} \\ K_{d^-} &= \left\{w : |w + w_o| < d\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

В этой работе получают варяционные формулы для класса $G(d)$ функций Гельфера, которых множество значений покрывает данный круг. Они позволяют найти дифференцияльно-функцийно-интегральное уравнение выполненное экстремальной функцией для вещественной части функционала. Определяется он на $G(d)$ и имеет дифференциал в смысле Гато и зависит только от значений функции находящихся в круге K_d. Получают тоже некоторые информации об $f(U)$ где f – экстремальная функция $\subset G(d)$.

В 1970 г. Нетаняху провёл исследования классов однолистных функций, множество значений которых покрывает данный круг [5]. Является он автором варяа-

ционных формул для функций класса S, значения которых покрывают круг $\{w : |w| < d\}$ и благодаря им нашёл максимум модуля второго коэффициента в этом подклассе. Потом в 1977 г. Барнард [1] занимался классом звездообразных функций, которые отображают единичный круг на область содержащуюся в круге $\{w : |w| < M\}$ и содержащую круг $\{w : |w| < d\}$.

В 1979 г. Хаммель, Пинчук и Шифер [3] нашли вариационные формулы для однолистных, ограниченных функций значения которых покрывают круг $\{w : |w| < d\}$. Потом при их помощи были получены экстремальные функции для модуля второго коэффициента в этом подклассе.

GELFER FUNCTIONS, WHOSE SET OF VALUES COVERS THE GIVEN DISK

S u m m a r y

An analytic function of the form

$$f(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

which is univalent in the unit disk $U = \{z : |z| < 1\}$ and satisfies the condition

$$f(z_1) + f(z_2) \neq 0 \quad \text{for all} \quad z_1, z_2 \in U \tag{2}$$

is called Gelfer functions. By $G(d)$ we understand the subclass of all Gelfer functions consisting of all functions which satisfy (3) beside conditions (1) and (2)

$$K_d \subset f(U), \tag{3}$$
$$\partial f(U) \cap K_d \neq \emptyset ,$$
$$\partial f(U) \cap K_{d^-} \neq \emptyset ,$$

where

$$K_d = \{w : |w - w_o| < d, \quad w_o = \sqrt{d^2 + 1}\},$$
$$K_{d^-} = \{w : |w + w_o| < d\}. \tag{4}$$

In the paper, variations for the class $G(d)$ of Gelfer functions whose set of values covers the given disk, are obtained. The obtained functions allowed to find a differential- function-integral equation satisfied by the function which is extremal for a real part of the functional which is differential in the Gâteaux sense, defined at least on the $G(d)$ and de-

pending only on the values of function lying in the disk K_d. These functions made possible also the obtaining of certain pieces of information concerning the image of the unit disk U after its transformation through extremal functions from $G(d)$. Studies of the class of univalent functions whose set of values covers the given disk had been commenced by Netanyahu in 1970 [5]. In this paper he obrained the variation of the functions of the class S, where values cover the disk $\{w : |w| < d\}$, $d > 0$ and using this variation he found the maximum of the absolute value of the second coefficient in this subclass. Next in 1977 Barnard [1] dealt with a class of starlike functions, which the unit disk map onto the domain containing the disk $\{w : |w| < d\}$ and enclosed in the disk $\{w : |w| < M\}$. Hummel, Pinchuk and Schiffer [3] (1979) found the variation for univalent, bounded functions, where values cover the disk $\{w : |w| < d\}$. Using this variation they obtained extremal functions for the absolute value of the second coefficient in this subclass.