ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 51 Nr kol. 874

Aleksandra ROST

NIERÓWNOŚCI TYPU GARABEDIANA-SCHIFFERA DLA FUNKCJI GELFERA

Streszczenie. Funkcja f holomorficzna i jednolistna w kole jednostkowym $U = \{z : |z| < 1\}$ postaci:

$$f(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

spełniające warunek:

$$f(z_1) + f(z_2) \neq 0 \quad \text{dla każdych} \quad z_1, z_2 \in U, \tag{2}$$

nazywa się funkcją Gelfera. Zbiór tych funkcji oznaczać będziemy w dalszym ciągu literą G. W poniższej pracy korzysta się z wyników uzyskanych przez R. Targosza [5] (1982). Podał on warunki konieczne i wystarczające na to, by funkcja, która ma w U rozwinięcie postaci (1) należała do klasy G. Warunki te mają postać nierówności, w których oprócz dowolnych parametrów występują współczynniki funkcji f i ponieważ są podobne do warunków Grunsky'ego dla funkcji klasy S, zostały one nazwane warunkami Grunsky'ego dla funkcji Gelfera. Wspomniane nierówności Grunsky'ego dla funkcji klasy S uogólnili Garabedian i Schiffer [1] przez wprowadzenie do nich zespolonego parametru $s \notin f(U)$ (w cytowanej literaturze wymieniany parametr s jest oznaczany literą d), a następnie Pederson i Schiffer [4], którzy rozszerzyli zakres zmienności parametru s, dopuszczając nie tylko wartości nie przyjęte przez funkcję, lecz także wartości przyjęte lub pierwiastki pewnego równania algebraicznego, którego współczynniki zależą od funkcji. W poniższej pracy uogólnione warunki Grunsky'ego nazywa się nierównościami Garabediana-Schiffera, a przez funkcjonał Garabediana-Schiffera rozumie się lewą stronę tych nierówności. Należy nadmienić, że nierówność Garabediana-Schiffera dla funkcji klasy G uzyskana przez Lebiediewa i Mamaia [3] w 1970 wyprowadzona była inną drogą, a mianowicie za pomocą metody polowej.

W poniższej pracy zostały oszacowane funkcjonały $\mathrm{Re}\,\Psi$, gdzie Ψ jest zdefiniowany wzorem (6). Rozważa się przypadek, gdy s jest wartością przyjętą przez $f \in G$ w ustalonym punkcie koła U oraz przypadek, gdy s i $-s$ są dowolnymi wartościami nie przyjętymi przez $f \in G$ w kole $\{z : |z| < r_0\}$, $0 < r_0 < 1$. W tym ostatnim przypadku nie możemy stosować bezpośrednio metody wariacyjnej, ponieważ nie wiadomo jak miałoby się zmieniać s, by nie znaleźć się w zbiorze $f(\{z : |z| < r\})$ jednakże zasada maksimum dla funkcji harmonicznych oraz wcześniej uzyskana nierówność dla parametru s jako dla wartości przyjętej pozwala nam uzyskać oszacowanie funkcjonału Garabediana-Schiffera i w tym przypadku. W szczególności, gdy funkcjonał L występujący we wzorze (6) dany jest wzorem (41), otrzymane nierówności są dokładne i są analogiczne do nierówności Garabediana-Schiffera dla funkcji klasy S otrzymanych w [4]. Klasa G jest normalna, a staje się zwarta po dołączeniu do niej funkcji stałej równej 1. Aby móc rozważać funkcjonał ciągły w rodzinie zwartej, a stąd wnioskować o istnieniu ekstremum, zanurza się G w zwartym zbiorze par $\mathfrak{F}$, a rozszerzony w sposób ciągły na $\mathfrak{F}$ funkcjonał $\mathrm{Re}\,\Psi$ okazuje się być dla tych elementów $\mathfrak{F}$, którym nie odpowiadają funkcje klasy G, identyczny z funkcjonałem Garabediana-Schiffera dla klasy S. Fakt ten pozwala udowodnić dokładność nierówności Garabediana-Schiffera dla funkcji klasy G w tym sensie, że nie można jej polepszyć.

Niech $f \in G$, $0 < r < 1$. $s = f(r)$. Połóżmy

$$F(z) = \sqrt{\frac{s - f(z)}{s + f(z)}} \tag{3}$$

Dla ustalonej gałęzi pierwiastka kwadratowego $F(z)$ jest funkcją holomorficzną i jednolistną w $U_r = \{z : |z| < r\}$, ponadto dla każdego $z, \zeta \in U_r$ mamy $F(z) + F(\zeta) \neq 0$ i $F(z)F(\zeta) \neq \pm 1$. Zauważmy dalej, że dla $(z, \zeta) \in U_r \times U_r$ funkcje

$$C(z,\zeta,s) = \log \frac{F(z) - F(\zeta)}{(z - \zeta)(F(z) + F(\zeta))} = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}(s) z^m \zeta^n, \tag{4}$$

$$D(z,\zeta,s) = \log \frac{1 + F(z)F(\zeta)}{1 - F(z)F(\zeta)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_{mn}(s) z^m \zeta^n \tag{5}$$

są funkcjami holomordicznymi zmiennych $(z,\zeta) \in U_r \times U_r$, jedynie $C_{00}(s)$ i $D_{00}(s)$ nie są określone jednoznacznie. Niech $L \in H'(U_r)$, $\operatorname{Im} L(1) = 0$, gdzie $H'(U_r)$ oznacza przestrzeń sprzężoną do przestrzeni $H(U_r)$ funkcji holomorficznych w U_r ze zbieżnością niemal jednostajną w U_r. Z twierdzenia Caccioppoli-Köthego wnioskujemy, że jeżeli $\varphi(z,\zeta)$ jest funkcją holomorficzną zmiennych $(z,\zeta) \in U_r \times U_r$, to $L(\varphi(z,\zeta))$ jest funkcją holomorficzną zmiennej $\zeta \in U_r$ i możemy określić funkcjonał $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$. Zatem rozważmy w rodzinie G funkcjonał $\operatorname{Re}\Phi(f)$, gdzie

$$\Phi(f) = L^2\left(\log \frac{F(z) - F(\zeta)}{(z - \zeta)(F(z) + F(\zeta))}\right) + L^2\left(\log \frac{1 + F(z)F(\zeta)}{1 - F(z)F(\zeta)}\right) \tag{6}$$

Zauważmy, że ani wybór gałęzi pierwiastka kwadratowego, ani wybór gałęzi logarytmu przy określeniu funkcji $C(z,\zeta,s)$ i $D(z,\zeta,s)$ nie wpływa na wartość funkcjonału $\operatorname{Re}\Phi(f)$. Funkcjonał (6) jest funkcjonałem ciągłym w G oraz różniczkowalnym w sensie Gâteaux, tzn.:

$$\Phi(f + \varepsilon h) = \Phi(f) + \varepsilon \Lambda_f(h) + O(\varepsilon),$$

gdzie $\Lambda_f(h)$ jest ciągłym liniowym funkcjonałem, określonym w przestrzeni $H(U)$ funkcji holomorficznych w U, a $f + \varepsilon h + O(\varepsilon) \in G$ dla ε dostatecznie małych. Różniczka Gâteaux dla funkcjonału (6) ma postać:

$$\Lambda_f(h) = 2L^2\left(\frac{f(z)\eta^2(z)(f(\zeta)h(r) - sh(\zeta))}{s\eta(z)\eta(\zeta)(f^2(z) - f^2(\zeta))} - \frac{f(\zeta)\eta^2(\zeta)(f(z)h(r) - sh(z))}{s\eta(z)\eta(\zeta)(f^2(z) - f^2(\zeta))}\right) \tag{7}$$

gdzie $h = h(z) \in H(U)$, natomiast

$$\eta(z) = \sqrt{(s - f(z))(s + f(z))} \tag{8}$$

Niech $f \in G$ realizuje maksimum lokalne funkcjonału $\operatorname{Re}\Phi(f)$, wówczas korzystając z twierdzenia 1.3 ([5], str. 8) mamy, że f spełnia równania różniczkowe, które ze względu na (7) przyjmuje postać

$$-4\left(\frac{uf'(u)}{\eta(u)} L\left(\frac{\eta(z)f(z)}{f^2(z) - f^2(u)}\right)\right)^2 = B(u), \quad u \in U, \tag{9}$$

gdzie:

$$B(u) = 2L^2\left[\frac{\eta(z)f(z)}{s\eta(\xi)(f^2(z) - f^2(\xi))}\left(f(\xi)\frac{urf'(r)}{r - u} - s\frac{u\xi f'(\xi)}{\xi - u}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta(\xi)f(\xi)}{s\eta(z)(f^2(z) - f^2(\xi))}\left(f(z)\frac{urf'(r)}{r - u} - s\frac{uzf'(z)}{z - u}\right)\right] +$$

$$+ 2L^2\left[\frac{\eta(z)f(z)}{s\eta(\xi)(f^2(z) - f^2(\xi))}\left(\frac{\bar{u}r^2f'(r)f(\xi)}{\bar{u}r - 1} - \frac{\bar{u}\xi^2sf'(\xi)}{\bar{u}\xi - 1}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta(\xi)f(\xi)}{s\eta(z)(f^2(z) - f^2(\xi))}\left(\frac{\bar{u}r^2f'(r)f(z)}{\bar{u}r - 1} - \frac{\bar{u}z^2sf'(z)}{\bar{u}z - 1}\right)\right]$$

Z przedstawienia funkcjonału liniowego z przestrzeni $H'(U_r)$ mamy, że $B(u)$ jest funkcją meromorficzną w pierścieniu $P = \left\{u : \varrho < |u| < \frac{1}{\varrho}\right\}$, $\varrho < r$, o jedynych biegunach w punktach r i $\frac{1}{r}$. Ponadto wiadomo, [5], że $B(u)$ jest rzeczywista i niedodatnia na $\partial U = \{u : |u| = 1\}$. Wynika stąd, że wszystkie pierwiastki $B(u)$ położone na ∂U są parzystokrotne. Biorąc pod uwagę, że związek (9) jest spełniony między innymi w pierścieniu $P_1 = \{u : \varrho < |u| < 1\}$, wnioskujemy, że lewa strona (9) przedłuża się na pierścień $P_2 = \{u : \varrho < |u| \leqslant 1\}$ i jest funkcją nieujemną na ∂U, meromorficzną w pierścieniu P_1, o jedynym biegunie w punkcie r. Jest ona kwadratem funkcji:

$$B_1(u) = 2\frac{uf'(u)}{\eta(u)} L\left(\frac{\eta(z)f(z)}{f^2(z) - f^2(u)}\right),$$

$B_1(u)$ w pierścieniu P_1 jest analityczna, dwuznaczna, r jest punktem rozgałęzienia dla $\eta(u)$. Przedłuża się ona jako funkcja analityczna na pierścień P_2. Tak przedłużona funkcja $B_1(u)$ jest rzeczywista dla $u \in \partial U$.

Rozważmy teraz funkcję

$$B_2(u) = \sqrt{\frac{(u - r)(1 - ru)}{u}}\, B_1(u)$$

w pierścieniu P_2. Jest ona analityczna dwuznaczna, w pierścieniu P_1 nie ma punktów rozgałęzienia i jest rzeczywista na ∂U.
Połóżmy

$$B_3(u) = -L\left(\frac{\sqrt{u}\,\sqrt{(z - r)(1 - rz)}}{z - u}\right) + L\left(\frac{\overline{\sqrt{\bar{u}}\,\sqrt{(z - r)(1 - rz)}}}{1 - \bar{u}z}\right)$$

Jest to znowu, podobnie jak $B_2(u)$, funkcja analityczna dwuznaczna w P_2. Nie posiada tam punktów rozgałęzienia i jest rzeczywista na ∂U.
Rozważmy teraz w pierścieniu P_2 funkcję

$$H(u) = B_2(u) + B_3(u) =$$

$$= \sqrt{u}\left[L\left(\frac{2f'(u)\sqrt{(u - r)(1 - ru)}\,\eta(z)f(z)}{\eta(u)(f^2(z) - f^2(u))} - \frac{\sqrt{(z - r)(1 - rz)}}{z - u}\right) + \right.$$

$$\left. + L\left(\frac{\overline{\sqrt{(z - r)(1 - rz)}}}{1 - \bar{u}z}\right)\right]$$

Korzystając z przedstawienia całkowego funkcjonału L mamy, że funkcja w nawiasie kwadratowym rozszerza się jako funkcja jednoznaczna i holomorficzna na koło U, ponieważ funkcje

$$\frac{2f'(u)\sqrt{(u - r)(1 - ru)}\,\eta(z)f(z)}{\eta(u)(f^2(z) - f^2(u))} - \frac{\sqrt{(z - r)(1 - rz)}}{z - u}$$

i

$$\frac{\sqrt{z - r}\,\sqrt{1 - rz}}{1 - \bar{u}z}$$

są funkcjami jednoznacznymi i holomorficznymi odpowiednio zmiennych (z,u) i $(z,\bar{u})$ w $U_r \times U$. Zatem funkcja $H(u)$ jest funkcją analityczną dwuznaczną w U o jedynym punkcie rozgałęzienia w zerze. Jest to funkcja rzeczywista dla $u \in \partial U$. $H^2(u)$ jest już funkcją jednoznaczną i holomorficzną w U, rzeczywistą na ∂U, a więc możemy wywnioskować, korzystając z zasady odbicie Schwarza, że przedłuża się ona jako funkcja holomorficzna na płaszczyznę domkniętą C, a więc jest funkcją stałą. Ponieważ $H(0) = 0$, mamy $H(u) = 0$ dla każdego $u \in U$. W ten sposób otrzymaliśmy związek, który spełnia funkcja ekstremalna

$$\frac{2f'(u)}{\eta(u)} L\left(\frac{\eta(z)f(z)}{f^2(z) - f^2(u)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(u - r)(1 - rz)}} \left[L\left(\frac{\sqrt{(z - r)(1 - rz)}}{z - u}\right) - \overline{L\left(\frac{\sqrt{(z - r)(1 - rz)}}{1 - \bar{u}z}\right)} \right] \quad (10)$$

dla $u \in U$.

Obliczymy obecnie wartość funkcjonału $\operatorname{Re} \Psi(f)$ dla funkcji ekstremalnej. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$w(u) = \sqrt{1 - 2xu + u^2}, \quad (11)$$

gdzie

$$x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad (12)$$

związek (10) przyjmie postać:

$$\frac{f'(u)}{\eta(u)} \left[L\left(\frac{\eta(z)}{f(z) - f(u)}\right) + L\left(\frac{\eta(z)}{f(z) + f(u)}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{w(u)} \left[L\left(\frac{w(z)}{z-u}\right) + \overline{L\left(\frac{w(z)}{1 - \bar{u}z}\right)} \right] \quad (13)$$

Zauważmy, że ze względu na (4) i (5) mamy:

$$\frac{\partial C(z,u)}{\partial u} = - \frac{f'(u)}{f(z) - f(u)} \frac{\eta(z)}{\eta(u)} + \frac{1}{z - u}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial D(z,u)}{\partial u} = - \frac{f'(u)}{f(z) + f(u)} \frac{\eta(z)}{\eta(u)} \quad (15)$$

Kładąc (14) i (15) do (13) oraz uwzględniając to, że ze względu na ciągłość i liniowość funkcjonału L mamy związki:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi(z,u)\right) &= \frac{d}{du} L(\varphi(z,u)) \\ L\left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi(z,\bar{u})\right) &= \frac{d}{du} \overline{L(\varphi(z,\bar{u}))} \end{aligned} \quad (16)$$

uzyskujemy:

$$\frac{\partial}{\partial u} (L(C(z,u)) + L(D(z,u))) = L\left(\frac{1}{z - u}\right) - \frac{1}{w(u)} \left(L\left(\frac{w(z)}{z - u}\right) +\right.$$

$$\left. + \overline{L\left(\frac{w(z)}{1 - \bar{u}z}\right)}\right), \quad \text{dla} \quad u \in U$$

Połóżmy

$$\gamma(z,u) = \log \frac{w(z)w(u) - 1 + x(z+u) - zu}{(z-u)^2\sqrt{x^2-1}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}(x)z^m u^n, \quad (18)$$

$$\delta(z,\bar{u}) = \log \frac{w(z)\overline{w(u)} + x(1+z\bar{u}) - z - \bar{u}}{(1-z\bar{u})\sqrt{x^2-1}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} d_{mn}(x)z^m \bar{u}^n \quad (19)$$

Rozwinięcia te zachodzą w $U_1 \times U_1$, $c_{mn}(x)$ i $d_{mn}(x)$ są wielomianami zmiennej x dla $(m,n) \neq (0,0)$ [4], jedynie $c_{00}(x)$ i $d_{00}(x)$ nie są określone jednoznacznie. Mamy dalej:

$$\frac{\partial\gamma(z,u)}{\partial u} = \frac{1}{z-u}\left(1 - \frac{w(z)}{w(u)}\right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial\delta(z,\bar{u})}{\partial\bar{u}} = -\frac{1}{1-z\bar{u}}\,\frac{w(z)}{\overline{w(u)}}$$

Kładąc (20) do (17), ze względu na związki (16), otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(L(C(z,u)) + L(D(z,u))\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(L(\gamma(z,u)) + \overline{L(\delta(z,\bar{u}))}\right) \quad (21)$$

dla $z \in U$.

Funkcje występujące po obu stronach związku (21) mają punkt rozgałęzienia w r. Całkując teraz po dowolnej krzywej leżącej w U i łączącej $u \in U$ z r, musimy najpierw obrać w punkcie u równe sobie wartości funkcji wieloznacznych występujących po obu stronach związku (21), a następnie przedłużać te funkcje po tej krzywej do dowolnego punktu $u' \neq r$. W ten sposób otrzymujemy:

$$\left(L(C(z,u)) + L(D(z,u))\right) - \left(L(C(z,u')) + L(D(z,u'))\right) =$$

$$= \left(L(\gamma(z,u)) + \overline{L(\delta(z,\bar{u}))}\right) - \left(L(\gamma(z,u')) + \overline{L(\delta(z,\bar{u}'))}\right) \quad (22)$$

Zauważmy, że

$$C(z,u') \xrightarrow[u'\to r]{} -\log(z-r), \qquad D(z,u') \xrightarrow[u'\to r]{} \log 1$$

$$\gamma(z,u') \xrightarrow[u'\to r]{} -\log(z-r), \qquad \delta(z,\bar{u}') \xrightarrow[u'\to r]{} \log 1$$

co, po przejściu do granicy w (22) przy $u' \to r$ oraz uwzględnieniu, że $\operatorname{Im} L(1) = 0$, daje nam:

$$L(C(z,u)) + L(D(z,u)) + C = L(\gamma(z,u)) + \overline{L(\delta(z,\bar{u}))}, \tag{23}$$

gdzie C jest stałą czysto urojoną, a po obu stronach (23) mamy funkcje wieloznaczne zmiennej $u \in U$ o jedynym punkcie rozgałęzienia w r. Funkcje $C(z,u)$, $D(z,u)$, $\gamma(z,u)$, $\delta(z,\bar{u})$ są funkcjami analitycznymi wieloznacznymi w $U_r \times U_r$ o rozwinięciach (4), (5), (18), (19), zatem funkcje $L(C(z,u))$ i $L(D(z,u))$ oraz $L(\gamma(z,u))$ i $\overline{L(\delta(z,\bar{u}))}$ są funkcjami analitycznymi wieloznacznymi w U_r bez punktów rozgałęzienia, natomiast wartość funkcjonału $\operatorname{Re} L$ dla funkcji stojącej po lewej stronie (23), a tym samym i po prawej stronie nie zależy od wyboru odpowiednich gałęzi. Otrzymujemy zatem równość:

$$\operatorname{Re}\left\{L^2(C(z,u)) + L^2(D(z,u))\right\} = \operatorname{Re}\left\{L^2(\gamma(z,u)) + |L|^2(\delta(z,\bar{u}))\right\}$$

Uzyskane wyniki pozwalają nam sformułować

<u>Twierdzenie 1</u>. Niech $\Psi(f)$ będzie funkcjonałem zdefiniowanym wzorami (3), (4), (5), (6), gdzie $s = f(re^{i\varphi})$, $L \in H'(U_r)$, $\operatorname{Im} L(1) = 0$, natomiast funkcje $\gamma(z,\xi)$ i $\delta(z,\bar{\xi})$ - zdefiniowane wzorami (18), (19). Jeżeli funkcją maksymalną dla funkcjonału $\operatorname{Re}\Psi(f)$ jest pewna funkcja Gelfera, to dla dowolnej funkcji $f \in G$ zachodzi nierówność:

$$\operatorname{Re}\Psi(f) = \operatorname{Re}\left\{L^2(C(z,\xi)) + L^2(D(z,\xi))\right\} \leqslant \operatorname{Re}\left\{L^2(\gamma(ze^{-i\varphi},\xi e^{-i\varphi})) + \right.$$

$$\left. + |L|^2(\delta(ze^{-i\varphi}, \overline{\xi e^{-i\varphi}}))\right. \tag{24}$$

Jeżeli istnieje funkcja ekstremalna $f \in G$, to spełnia równanie funkcyjne:

$$L(C(z,\xi)) + L(D(z,\xi)) + C + L(i\varphi) =$$

$$= L(\gamma(ze^{-i\varphi}, \xi e^{-i\varphi})) + \overline{L(\delta(ze^{-i\varphi}, \overline{\xi e^{-i\varphi}}))} \tag{25}$$

gdzie C jest stałą czysto urojoną.

<u>Dowód</u>: W przypadku gdy $\varphi = 0$, twierdzenie to jest wnioskiem z poprzednich rozważań. W przypadku gdy $\varphi \neq 0$, kładziemy

$$L^*(h(z)) = L(h(ze^{-i\varphi})) \quad \text{dla} \quad h \in H(U) \tag{26}$$

Oczywiście mamy, że $L^* \in H'(U_r)$ oraz $\operatorname{Im} L^*(1) = 0$.

Połóżmy dalej

$$f^*(z) = e^{-i\varphi} f(ze^{i\varphi}), \tag{27}$$

$$s^* = f^*(r) = e^{-i\varphi} f(re^{i\varphi}) = e^{-i\varphi} s \tag{28}$$

Ponieważ $f^*(z) \in G$, kładąc w (4) i (5)

$$F^*(z) = \sqrt{\frac{s^* - f^*(z)}{s^* + f^*(z)}}, \tag{29}$$

możemy nierówność (24) i równość (25) dla $\varphi = 0$ zastosować do funkcjonału L^* i funkcji f^*. Wówczas uwzględniając (4) i (5) otrzymamy:

$$\operatorname{Re}\left\{L^{*2}\left(\log \frac{F^*(z) - F^*(\zeta)}{(z-\zeta)(F^*(z) + F^*(\zeta))}\right) + \right.$$

$$\left. + L^{*2}\left(\log \frac{1 + F^*(z)F^*(\zeta)}{1 - F^*(z)F^*(\zeta)}\right)\right\} \leqslant \operatorname{Re}\left\{L^{*2}(\gamma(z,\zeta)) + |L^*|^2(\delta(z,\bar{\zeta}))\right\} \tag{30}$$

oraz

$$L^*\left(\log \frac{F^*(z) - F^*(\zeta)}{(z-\zeta)(F^*(z) + F^*(\zeta))}\right) +$$

$$+ L^*\left(\log \frac{1 + F^*(z)F^*(\zeta)}{1 - F^*(z)F^*(\zeta)}\right) + C = L^*(\alpha(z,\zeta)) + \overline{L^*(\beta(z,\bar{\zeta}))} \tag{31}$$

Na mocy (26), (27), (28), (29) oraz tego, że $\operatorname{Im}(L(1)) = 0$, po przekształceniach nierówność (30) przyjmie postać nierówności (24), natomiast równość (31) postać (25), co kończy dowód.

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\mathcal{P}(s) = L^2(C(z,\zeta,s) + D(z,\zeta,s)) \tag{32}$$

$$\mathcal{E}(x,\varphi) = \operatorname{Re}\left\{L^2(\gamma(ze^{-i\varphi},\zeta e^{-i\varphi})) + |L|^2(\delta(ze^{-i\varphi}, \overline{\zeta e^{-i\varphi}}))\right\} \tag{33}$$

nierówność (24) może być zapisana w postaci:

$$\operatorname{Re} \mathcal{P}(s) \leqslant \mathcal{E}(x,\varphi) \tag{34}$$

Niech L spełnia warunek $\operatorname{Im} L(1) = 0$. Połóżmy

$$\mathcal{Q}(x,\zeta) = L\left(\frac{1}{w(z\zeta)}\right) + \overline{L\left(\frac{z\bar{\zeta}-1}{w(z\bar{\zeta}^{-1})}\right)} \tag{35}$$

Korzystając z ciągłości funkcjonału L, po prostych rachunkach uzyskujemy:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x,\varphi)}{\partial x} = \frac{1}{x+1}\left[\mathrm{Re}(Q(x,e^{-i\varphi}))\right]^2 - \frac{1}{x-1}\left[\mathrm{Im}(Q(x,e^{-i\varphi}))\right]^2 \tag{36}$$

Ze względu na (18) i (19) mamy:

$$c_{oo}(x) = \log \frac{-\sqrt{x^2-1}}{2}, \tag{37}$$

$$d_{oo}(x) = \log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \tag{38}$$

zatem

$$\lim_{x\to 1} \mathrm{Re}\left\{L^2(c_{oo}(x)) + |L|^2(d_{oo}(x))\right\} = -|L|^2(\log(1-\bar{\xi}z)) \tag{39}$$

oraz

$$\int_1^x \frac{\partial \mathcal{E}(t,\varphi)}{\partial t}\,dt = \mathcal{E}(x,\varphi) - \mathcal{E}(1,\varphi)$$

Możemy sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Niech $\mathcal{P}(s)$ będzie określone wzorem (32), $C(z,\xi,s)$, $D(z,\xi,s)$ - wzorami (4) i (5), $Q(x,\xi)$ - wzorem (35). Jeżeli funkcja maksymalnę dla funkcjonału $\mathrm{Re}\,\Psi(f)$, określonego związkami (6), (3), gdzie $s = f(re^{i\varphi})$, jest pewna funkcja Gelfera, wówczas, dla dowolnej $f \in G$ zachodzi:

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{P}(s) \leqslant -|L|^2(\log(1-\bar{\xi}z)) +$$

$$+\int_1^x \left\{\frac{1}{t+1}\left[\mathrm{Re}(Q(t,e^{-i\varphi}))\right]^2 - \frac{1}{t-1}\left[\mathrm{Im}(Q(t,e^{-i\varphi}))\right]^2\right\} dt \tag{40}$$

W szczegolności, opisane nierównosci możemy zastosować w przypadku, gdy $L \in H'(U_r)$ ma postać opisaną ponizej.

Niech $\lambda_0 \in R, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi, $s = f(re^{i\varphi})$, gdzie $0 < r < 1$. Niech

$$L(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varphi} h(z)\mu(z)\,\frac{dz}{z}, \tag{41}$$

gdzie $\mu(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k}{z^k}$, $C_\rho = \{z : |z| = \rho\}$, $0 < \rho < r$, $h \in H(U)$.
Oczywiście mamy $\operatorname{Im} L(1) = 0$.

Mając na uwadze (41), funkcjonał $\Psi(f)$, a tym samym ze względu na (32) $\mathcal{P}(s)$ przyjmie postać:

$$\mathcal{P}(s) = \Psi(f) = \sum_{m,n=0}^{N} (c_{mn}(s) + D_{mn}(s))\lambda_m\lambda_n, \tag{42}$$

gdzie $C_{mn}(s)$, $D_{mn}(s)$ dane są wzorami (4) i (5).
Zachodzi następujący związek:

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)z^m,$$

gdzie $P_m(x)$ są wielomianami Legendre'a, co po uwzględnieniu (41), postaci funkcjonału L i (35) daje nam:

$$Q(x,\zeta) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n(x)\zeta^n + \sum_{n=1}^{N} \bar{\lambda}_n P_{n-1}(x)\zeta^{-n} \tag{43}$$

Ponieważ dla funkcjonału $\operatorname{Re}\Psi(f)$ wyrażonego wzorem (42) możemy zastosować twierdzenie 1 i 2, zatem otrzymujemy

<u>Wniosek 1</u>. Niech $\lambda_0 \in R, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in C$, $s = f(re^{i\varphi})$, $0 < r < 1$, $x = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $\Psi(f)$ jest zdefiniowany wzorem (42), (4), (5). Jeżeli funkcję maksymalną dla funkcjonału $\operatorname{Re}\Psi(f)$ jest pewna funkcja Gelfera, to dla dowolnej funkcji $f \in G$ zachodzi nierówność:

$$\operatorname{Re}\mathcal{P}(s) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N} (C_{mn}(s) + D_{mn}(s))\lambda_m\lambda_n\right\} < \tag{44}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n} + \int_1^x \left\{\frac{1}{t+1}\left[\operatorname{Re} Q(t,e^{-i\varphi})\right]^2 - \frac{1}{t-1}\left[\operatorname{Im} Q(t,e^{-i\varphi})\right]^2\right\} dt,$$

gdzie $Q(x,\zeta)$ dana jest wzorem (43).

Nierówność (44) jest analogiczna do nierówności uzyskanej przez Pedersona i Schiffera [4] dla funkcji klasy S.

W celu wykazania istnienia ekstremum funkcjonału $\mathrm{Re}\,\Phi(f)$ w rodzinie G zdefiniowanego wzorem (42) skonstruujemy zwartą rodzinę dwójek $\overline{\mathcal{F}}$.

Każdą funkcję $f \in G$ możemy przedstawić $f(z) = 1 + b_1\hat{f}(z)$, gdzie $\hat{f}(z) \in S$ oraz $0 < |b_1| \leqslant 2$, [2]. Niech

$$\mathcal{F} = \left\{(b_1, \hat{f}):\ 0 < |b_1| \leqslant 2,\ \hat{f} \in S,\ 1 + b_1\hat{f} \in G\right\}$$

Widzimy, że każdej funkcji $f \in G$ możemy przyporządkować w sposób jednoznaczny element zbioru $\mathcal{F}$ i odwrotnie każdej dwójce z $\mathcal{F}$ można przyporządkować funkcję $f \in G$. Zauważmy, że $\mathcal{F}$ zawiera się w zwartym (ze względu na zwartość klasy S) zbiorze $\mathcal{F}_1$, gdzie

$$\mathcal{F}_1 = \left\{(b_1, \hat{f}) : 0 \leqslant |b_1| \leqslant 2,\ \hat{f} \in S\right\}.$$

Zatem $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_1$ i $\overline{\mathcal{F}}$ jest zwarty.

Funkcjonał (42) określony na G jest tym samym określony na $\mathcal{F}$ oraz jak pokażemy poniżej można go w sposób ciągły przedłużyć na zbiór zwarty $\overline{\mathcal{F}}$, a tym samym wnioskować o istnieniu jego maksimum w $\overline{\mathcal{F}}$.

Niech $M = \sup\limits_{\overline{\mathcal{F}}} \mathrm{Re}\,\Phi\left\{((b_1, \hat{f}))\right\}$ i niech ciąg elementów $\mathcal{F}$ $\left\{(b_{1n}, \hat{f}_n)\right\} \to (b_1, \hat{f})$. Jeżeli $(b_1, \hat{f}) \in \mathcal{F}$, wówczas funkcja $f \in G$, odpowiadająca tej dwójce, jest funkcją ekstremalną dla funkcjonału $\mathrm{Re}\,\Phi$, realizującą równość w nierówności (44). Jeżeli natomiast $(b_1, \hat{f}) \in \overline{\mathcal{F}}$ i $(b_1, \hat{f}) \notin \mathcal{F}$, wtedy $b_1 = 0$. Gdyby bowiem $b_1 \neq 0$, to ciąg $f_n = 1 + b_{1n}\hat{f}_n \to 1 + b_1\hat{f} \in G$ gdyż granica ciągu funkcji Gelfera, jeżeli nie jest stała, jest funkcją Gelfera. Możemy łatwo sprawdzić, że w przypadku gdy $b_1 = 0$

$$\mathrm{Re}\,\Phi\left\{((b_{1n}, \hat{f}_n))\right\} \to \mathrm{Re}\left\{\sum_{m,k=0}^{N} A_{mk}(\hat{s})\lambda_m\lambda_k\right\},$$

gdzie $A_{mk}(\hat{s})$ wyrażają się wzorem:

$$\log\frac{\sqrt{\hat{s} - \hat{f}(z)} - \sqrt{\hat{s} - \hat{f}(\zeta)}}{(z - \zeta)\left(\sqrt{\hat{s} - \hat{f}(z)} + \sqrt{\hat{s} - \hat{f}(\zeta)}\right)} = \sum_{m,k=0}^{\infty} A_{mk}(\hat{s}) z^m \zeta^k,$$

gdzie $\hat{f} \in S$, $\lambda_0 \in R$, $\hat{s} = \hat{f}(re^{i\varphi})$, $0 < r < 1$.

A więc dla dwójek $(0, \hat{f})$ należących do zbioru $\overline{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ ciągłe rozszerzenie funkcjonału $\mathrm{Re}\,\Phi(b_1, \hat{f}))$ ze zbioru $\mathcal{F}$ na $\overline{\mathcal{F}}$ będzie identyczne z funkcjonałem rozpatrywanym przez Pedersona i Schiffera w [4] dla funkcji klasy S. Autorzy ci otrzymali dla $\hat{f} \in S$ i $\lambda_0 \in R$ nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m,k=0}^{N} A_{mk}(\hat{s})\lambda_m\lambda_k\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n} + \int_1^x \left\{\frac{1}{t+1}\left[\operatorname{Re} Q(t,e^{-i\varphi})\right]^2 - \frac{1}{t-1}\left[\operatorname{Im} Q(t,e^{-i\varphi})\right]^2\right\} dt, \tag{45}$$

gdzie $\lambda_1,\dots,\lambda_N \in C$, $Q(x,\xi)$ wyraża się wzorem (43), której prawa strona, jak widać, jest identyczna z prawą stroną nierówności (44). Wnioskujemy stąd, że:

$$\sup_{\mathcal{F}} \operatorname{Re}\Psi\left\{((b_1,\hat{f}))\right\} \leqslant \mathcal{E}(x,\varphi), \tag{46}$$

gdzie $\mathcal{E}(x,\varphi)$ oznacza prawą stronę nierówności (44). Wiadomo, ze zwartości klasy S, że istnieje funkcja $\hat{f}_0 \in S$ taka, że w nierówności (45) zachodzi równość, a tym samym $\operatorname{Re}\Psi\left\{((0,\hat{f}_0))\right\} = \mathcal{E}(x,\varphi)$. Funkcja $\hat{f}_\varrho(z) = \frac{1}{\varrho}\hat{f}_0(\varrho z)$ jest ograniczoną w U funkcją klasy S, przy dowolnym $0<\varrho<1$, przy czym $\hat{f}_\varrho(z) \xrightarrow[\varrho\to 1]{} \hat{f}_0(z)$ niemal jednostajnie w U. Zauważmy dalej, że jeżeli funkcja $\hat{f}_\varrho(z) \in S$ jest ograniczona, wtedy istnieje takie $\varepsilon \in R$, że dla wszystkich b_1 spełniających $0<|b_1|<\varepsilon$ funkcja $f(z) = 1 + b_1\hat{f}_\varrho(z) \in G$. Zatem możemy skonstruować ciąg $\left\{(b_{1n},\hat{f}_\varrho)\right\}$ elementów $\mathcal{F}$, $b_{1n} \to 0$, gdy $n\to\infty$. Wtedy $\operatorname{Re}\Psi\left\{((b_{1n},\hat{f}_\varrho))\right\}$ dąży do $\operatorname{Re}\Psi\left\{((0,\hat{f}_\varrho))\right\}$ przy dowolnym $0<\varrho<1$. Jeżeli teraz $\varrho\to 1$, to $\operatorname{Re}\Psi\left\{((0,\hat{f}_\varrho))\right\} \to \operatorname{Re}\Psi\left\{((0,\hat{f}_0))\right\} = \mathcal{E}(x,\varphi)$, co oznacza, że wartości funkcjonału $\operatorname{Re}\Psi$ są dowolnie blisko $\mathcal{E}(x,\varphi)$ i nierówności (46) nie można poprawić.

Uzyskane wyniki możemy sformułować następująco:

<u>Twierdzenie 3</u>. Jeżeli $\lambda_0 \in R$, $\lambda_1,\dots,\lambda_N \in C$, $s = f(re^{i\varphi})$ $0<r<1$, $x = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$, $C_{mn}(s)$ i $D_{mn}(s)$ zdefiniowane są wzorami (4) i (5), to dla każdej funkcji $f \in C$ zachodzi nierówność:

$$\operatorname{Re}\mathcal{D}(s) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=0}^{N} (C_{mn}(s) + D_{mn}(s))\lambda_m\lambda_n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{n} + \int_1^x \left\{\frac{1}{t+1}\left[\operatorname{Re} Q(t,e^{-i\varphi})\right]^2 - \frac{1}{t-1}\left[\operatorname{Im} Q(t,e^{-i\varphi})\right]^2\right\} dt, \tag{47}$$

gdzie $Q(x,\xi)$ dana jest wzorem (43). Nierówność ta jest dokładna.

Zauważmy, że korzystając ze związków (4) i (5) mamy:

$$C(z,\zeta,s) + D(z,\zeta,s) =$$

$$= \log \frac{(1 + \frac{1}{s^2 - 1})(f^2(\zeta) - f^2(z))}{(z - \zeta)\left[f(\zeta)\sqrt{1 + \frac{1 - f^2(z)}{s^2 - 1}} + f(z)\sqrt{1 + \frac{1 - f^2(\zeta)}{s^2 - 1}}\right]^2}, \tag{48}$$

$$C_{oo}(z,\zeta,s) = \log \frac{-sb_1}{2(s^2 - 1)}, \tag{49}$$

$$D_{oo}(z,\zeta,s) = \log s \tag{50}$$

Ze wzoru (48) wnioskujemy, że współczynniki $A_{mn}(s) = D_{mn}(s) + C_{mn}(s)$ dla $(m,n) \neq (0,0)$ są wielomianami zmiennej $\frac{1}{s^2 - 1}$, których współczynniki zależą od skończonej liczby współczynników rozwinięcia funkcji f. Ponadto mamy:

$$\mathcal{P}(s) = \mathcal{P}(-s) \tag{51}$$

gdzie $\mathcal{P}(s)$ jest zdefiniowane wzorem (42).

<u>Twierdzenie 4</u>. Jeżeli r_o jest dowolną liczbą z przedziału $(0,1)$, $f \in G$ i $f(z)$ nie przyjmuje wartości s i $-s$ dla z takich, że $|z| < r_o$, to

$$\operatorname{Re} \mathcal{P}(s) \leqslant \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \mathcal{E}(x_o,\varphi), \tag{52}$$

gdzie $x_o = \frac{1}{2}(r_o + \frac{1}{r_o})$, $\mathcal{P}(s)$ jest zdefiniowane wzorem (42), natomiast $\mathcal{E}(x,\varphi)$ oznacza prawą stronę nierówności (47).

<u>Dowód</u>: Oznaczmy przez Γ_{r_o} i $\Gamma^-_{r_o}$ krzywe będące obrazami okręgu $|z| = r_o$ odpowiednio przez funkcue f i $-f$. Niech

$$D_{r_o} = \left\{ s : s, -s \notin f(\{z : |z| < r_o\}) \right\}$$

W przypadku gdy $\lambda_o = 0$, ze względu na (48), funkcja $\operatorname{Re} \mathcal{P}(s)$ jest harmoniczna w D_{r_o} dla dowolnej ustalonej $f \in G$ i stosując zasadę maksimum dla funkcji harmonicznych otrzymujemy:

$$\sup_{s \in \bar{D}_{r_o}} \operatorname{Re}\left\{\mathcal{P}(s)\right\} = \sup_{s \in \Gamma_{r_o} \cup \Gamma^-_{r_o}} \left\{\operatorname{Re} \mathcal{P}(s)\right\} \tag{53}$$

Gdy $\lambda_0 \neq 0$, korzystając z (48), (49) i (50) łatwo możemy sprawdzić, że funkcja $\operatorname{Re}\mathcal{D}(s)$ jest harmoniczna w $D_{r_0} \setminus \{0\}$ ale biorąc pod uwagę, że $\lim\limits_{s\to 0} \operatorname{Re}\{\mathcal{D}(s)\} = -\infty$, również i w tym przypadku otrzymamy związek (53).
Ponieważ $\mathcal{D}(s) = \mathcal{D}(-s)$, z (53) wnioskujemy:

$$\sup_{s\in \bar{D}_{r_0}} \operatorname{Re}\{\mathcal{D}(s)\} = \operatorname{Re}\{\mathcal{D}(f(r_0 e^{i\varphi}))\} \tag{54}$$

dla pewnego $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Korzystając z twierdzenia 3 i ze związku (54) mamy dla dowolnej $f \in G$ nierówność:

$$\operatorname{Re}\mathcal{D}(s) \leqslant \operatorname{Re}\{\mathcal{D}(f(r_0 e^{i\varphi}))\} \leqslant \mathcal{E}(x_0,\varphi) \leqslant \max_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} \mathcal{E}(x_0,\varphi),$$

co kończy dowód twierdzenia.

Obecnie zajmiemy się zastosowaniem twierdzeń 3 i 4 do oszacowania zbioru wartości $s = f(re^{i\varphi})$, $0 < r < 1$, $f \in G$ oraz w celu otrzymania pewnych nierówności współczynnikowych.

a) Jeżeli w nierówności (47) przyjmiemy $\lambda_0 = 1$, $\lambda_n = 0$ dla $n=2,\dots,N$, to uwzględniając (49) i (50) otrzymamy nierówność:

$$\frac{|s|^2 b_1}{|s^2 - 1|} \leqslant x + 1 . \tag{55}$$

Niech α jest argumentem liczby $s = f(re^{i\varphi})$. Wtedy nierówność (55) przyjmie postać:

$$|s|^4(|b_1|^2 - (x+1)^2) + 2|s|^2 \cos 2\alpha (x+1)^2 - (x+1)^2 \leqslant 0 \tag{56}$$

Ze względu na to, że $|b_1| \leqslant 2$, [2], mamy $|b_1|^2 - (x+1)^2 < 0$.
Połóżmy $\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{b_1}{x+1}$. Jeżeli $\alpha \in \langle 0,\alpha_1) \cup (\pi-\alpha_1, \pi+\alpha_1) \cup (2\pi-\alpha_1, 2\pi)$, to

$$0 < |f(re^{i\varphi})| \leqslant \sqrt{\frac{-(x+1)^2\cos 2\alpha}{|b_1|^2-(x+1)^2} - \sqrt{\frac{(x+1)^4\cos^2 2\alpha}{(|b_1|^2-(x+1)^2)^2} + \frac{(x+1)^2}{|b_1|^2-(x+1)^2}}} = \varrho_1(\alpha)$$

lub

$$= \sqrt{\frac{-(x+1)^2\cos 2\alpha}{|b_1|^2-(x+1)^2} + \sqrt{\frac{(x+1)^4\cos^2 2\alpha}{(|b_1|^2-(x+1)^2)^2} + \frac{(x+1)^2}{|b_1|^2-(x+1)^2}}} \leqslant |f(re^{i\varphi})|$$

Jeżeli natomiast $\alpha \in \langle \alpha_1, \pi - \alpha_1 \rangle \cup \langle \pi + \alpha_1, 2\pi - \alpha_1 \rangle$, wtedy nie mamy żadnych ograniczeń na $|f(re^{i\varphi})|$.

b) Jeżeli w nierówności (47) położymy $N = 1$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = e^{i\varphi}$, $\alpha \in R$, wówczas otrzymamy nierówność spełnioną przez dowolną funkcję $f \in G$, a mianowicie:

$$\mathrm{Re}\left\{e^{2i\alpha}(C_{11}(s) + D_{11}(s))\right\} \leqslant$$

$$1 + \int_1^x \left\{\frac{1}{t+1}\left[\mathrm{Re}\, Q(t, e^{-i\varphi})\right]^2 - \frac{1}{t-1}\left[\mathrm{Im}\, Q(t, e^{-i\varphi})\right]^2\right\} dt, \qquad (57)$$

gdzie $s = f(re^{i\varphi})$, $0 < r < 1$.
Korzystając z (4), (5), (43), po prostych rachunkach uzyskujemy:

$$C_{11}(s) = \frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2^2}{b_1^2} + \frac{b_1^2}{2}\left(\frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{(s^2-1)^2}\right),$$

$$D_{11}(s) = \frac{b_1^4}{4} + \frac{b_1^2}{2}\frac{1}{s^2-1},$$

$$\int_1^x \left\{\frac{1}{t+1}[\mathrm{Re}\, Q]^2 - \frac{1}{t-1}[\mathrm{Im}\, Q]^2\right\} dt = \frac{1}{2}(x^2-1)\,\mathrm{Re}\left\{e^{2i(\alpha-\varphi)}\right\} + \qquad (58)$$

$$+ x - 1, \quad x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$$

Wstawiając (58) do (57) mamy:

$$\mathrm{Re}\left\{e^{2i\alpha}\left(\frac{b_1^2}{4} - \frac{b_2^2}{b_1^2} + \frac{b_3}{b_1} + b_1^2\frac{1}{s^2-1} + \frac{b_1^2}{2}\frac{1}{(s^2-1)^2}\right)\right\} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}(x^2-1)\,\mathrm{Re}\left\{e^{2i(\alpha-\varphi)}\right\} + x,$$

co wobec dowolności rzeczywistej liczby α daje dla dowolnej funkcji $f \in G$ nierówność:

$$\left|\frac{b_1^2}{4} - \frac{b_2^2}{b_1^2} + \frac{b_3}{b_1} + b_1^2\frac{1}{s^2-1} + \frac{b_1^2}{2}\frac{1}{(s^2-1)^2} - \frac{1}{2}(x^2-1)e^{-2i\varphi}\right| \leqslant x,$$

gdzie $s = f(re^{i\varphi})$, $0 < r < 1$, $x = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$. Nierówność ta jest dokładna.

c) Niech $N = 1$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = e^{i\alpha}$, $\alpha \in R$. Jeżeli $f \in G$ nie przyjmuje wartości s i $-s$ w kole $\{z : |z| < r_0\}$, to spełnia nierówność (52), która przyjmuje postać:

$$\mathrm{Re}\left\{e^{2i\alpha}(C_{11}(s) + D_{11}(s))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle} \left[1 + \int_1^{x_0} \left\{ \frac{1}{t+1}\left[\mathrm{Re}\, Q(t, e^{-i\varphi})\right]^2 - \frac{1}{t-1}\left[\mathrm{Im}\, Q(t, e^{-i\varphi})\right]^2 \right\} dt \right],$$

gdzie $x_0 = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$.

Ponownie korzystamy ze wzorów (58) oraz z dowolności liczby $\alpha \in R$. I tak otrzymujemy:

$$\left| \frac{b_1^2}{4} - \frac{b_2^2}{b_1^2} + \frac{b_3}{b_1} + b_1^2 \frac{1}{s^2-1} + \frac{b_1^2}{2} \frac{1}{(s^2-1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{2}(x_0^2 - 1) + x_0 \tag{59}$$

Uwzględniając fakt, że dowolna funkcja $f \in G$ nie przyjmuje wartości $s = 0$ w kole $\{z : |z| < 1\}$, z oszacowania (59) uzyskujemy, że dla $f \in G$ zachodzi nierówność:

$$\left| \frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2^2}{b_1^2} - \frac{b_1^2}{4} \right| \leqslant 1,$$

która jest analogiczna do nierówności Bieberbacha dla funkcji klasy S.

LITERATURA

[1] Garabedian P.R., Schiffer M.: The local maximum theorem for the coefficients of univalent functions, Arch. Rational. Mech. Anal. 26 (1967) pp. 1-32.

[2] Gelfer S.A.: O kłasie riegularnych funkcji, nie prinimajuszczich ni odnoj pary znaczenij w i -w, Matem. Sb. 19 (61), 1, 33-46, (1946).

[3] Lebiediew N.A., Mamai L.W.: Obobszczenie odnowo nierawienstwa P. Garabediana i M. Schiffera, Wiestnik Leningr. Uniw. 19, 41-45, (1970).

[4] Pederson R.N., Schiffer M.: Further generalizations of the Grunsky inequalities, J. Analyse Math. 23, 1 1970, 353-380.

[5] Targosz R.: Metoda wariacyjna w zastosowaniu do klasy funkcji Gelfera i klas pokrewnych, Praca doktorska, Instytut Matematyki Pol. Śl., Gliwice 1982 (praca nie publikowana).

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1985 r.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ГАРАБЕДЯНА-ШИФЕРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГЕЛЬФЕРА

Р е з ю м е

Функция f регулярная и однолистная в единичном круге $U = \{z : |z| < 1\}$, вида

$$f(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

выполняющяя условие

$$f(z_1) + f(z_2) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad z_1, z_2 \in U$$

называется функцией Гельфера. Множество всех этих функций будем обозначать буквой G. В этой работе используется результаты полученные Таргошом [5]. Он дал необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция вида (1) принадлежала к классу G. Эти условия имеют вид неравенств, в которых кроме произвольных параметров появляются коэффициенты функции f и так как они похожи на условия Грунского для функций класса S, они называются условиями Грунского для функций Гельфера. Неравенства Грунского для функций класса S обобщили Гарабедян и Шифер [1], а потом Педерсон и Шифер [4]. В этой работе обобщённые условия Грунского называются неравенствами Гарабедяна-Шифера, а как функционал Гарабедяна-Шифера понимается левую сторону этих неравенств. Неравенства Гарабедяна-Шифера для функций класса полученные Лебедевым и Мамаем [3] в 1970 г. были сделаны другим путем - с помощью метода площадей.

В этой работе сделаны оценки функционалов $\mathrm{Re}\,\Psi$, где Ψ определено формулой (6). Рассматривается случай, когда s является значением принятым функцией $f \in G$ в данной точке круга U и случай, когда s и $-s$ являются произвольными значениями не принятыми $f \in G$ в круге $\{z : |z| < r_0\}$, $0 < r_0 < 1$. Особенно, если функционал L выступающий в формуле (6) имеет вид (41) получаются точные оценки в том смысле, что не возможно их улучшить. Они аналогичны неравенствам Гарабедяна-Шифера для функций класса S полученным в [4].

INEQUALITIES OF THE TYPE GARABEDIAN-SCHIFFER INEQUALITIES FOR A GELFER FUNCTION

S u m m a r y

An analytic function of the form:

$$f(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

which is univalent in the unit disk $U = \{z : |z| < 1\}$ and satisfies the condition

$$f(z_1) + f(z_2) \neq 0 \quad \text{for all} \quad z_1, z_2 \in U \tag{2}$$

is called Gelfer function. The set of all these functions will be denoted by symbol G. The present paper uses the results obtained by R. Targosz [5] (1982). He gives necessary and sufficient conditions so as the functions which has the development of the form (1) belongs to the class G. These conditions have a form of inequalities, in which coefficients of the function f appear beside of arbitrary parameters. Because these conditions and Grunsky's conditions for functions of the class S are similar, they are called Grunsky's conditions. Garabedian and Schiffer [1] and Pederson and Schiffer [4] generalized above - mentioned Grunsky's inequalities for functions of the class S. In the following paper the generalized Grunsky's conditions are called Garabedian-Schiffer's inequalities. The left side of these inequaliteies is understood as Garabedian-Schiffer functional. The Garagedian-Schiffers's inequality for functions of the class G obtained by Lebiediew and Mamai [3] (1970) was lead out another way, using the field method.

In the following paper functionals $\mathrm{Re}\,\psi$, where ψ is defined by (6), have been estimated. There are considered two cases; in the first one, s is a value admitted by $f \in G$ in the fixed point of the disk U and in the second case s and $-s$ are arbitrary values omitted by the function $f \in G$ in the disk $\{z : |z| < r_0\}$, $0 < r_0 < 1$. Specially when the functional L from the formula (6) is given by the formula (41), the obtained inequalities are exact in the sense, that it is impossible to improve it. They are analogous as Garabedian-Schiffer's inequalities for functions of the class S obtained in [4].