ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 51 Nr kol. 874

Marian PALEJ

O PEWNYM ODWZOROWANIU PŁASZCZYZN

Streszczenie. W pracy przedstawiono pewną metodę odwzorowywania płaszczyzn za pomocą biegunowości w przestrzeni.

Jako bazę odwzorowania przyjmuje się dowolną paraboloidę obrotową Φ, której płaszczyzna kierownicza (biegunowa ogniska) spełnia rolę rzutni. Obrazem płaszczyzny α nazywa się rzut cechowany takiego jej punktu A, w którym przecina ona średnicę paraboloidy incydentną z biegunem płaszczyzny α względem paraboloidy Φ.

Dowodzi się jednoznaczności rozważanego sposobu odwzorowania, a także restytucji.

Na kilku przykładach przedstawia się przydatność metody zwłaszcza do rozwiązywania zadań z zakresu kątów. W szczególności omawia się konstrukcję miary kąta dwuściennego i kąta nachylenia prostej do płaszczyzny.

Rozważa się charakter utworów, których obrazy są współliniowe bądź też, których tzw. półobrazy (oryginały punktów stanowiących obrazy płaszczyzn) są komplanarne, a w szczególnym przypadku - współliniowe.

Metoda wydaje się oferować pewne uproszczenia graficzne, zwłaszcza w przypadku stosowania jej do jednoczesnego odwzorowywania większej ilości płaszczyzn.

Przyjmijmy dowolną paraboloidę obrotową Φ o osi S i ognisku P oraz płaszczyznę kierowniczą π, tj. płaszczyznę biegunową punktu P względem paraboloidy Φ. Traktując π jako rzutnię rozpatrzmy odwzorowanie, w którym obrazem dowolnej płaszczyzny α jest rzut cechowany jej punktu przebicia A przynależną do bieguna płaszczyzny α - punktu A_{α} średnicą l paraboloidy (rys. 1).

Punkt A nazywać będziemy półobrazem płaszczyzny α.

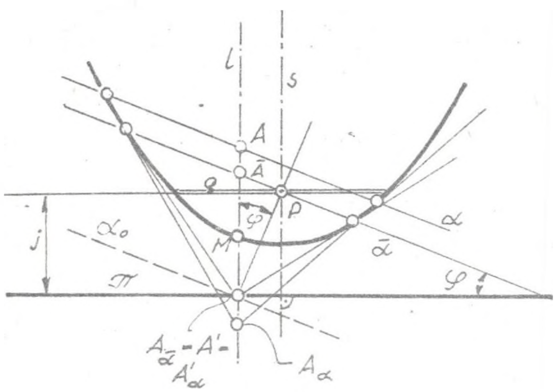
Rozpatrzmy własności zdefiniowanego odwzorowania.

1. Oczywista jest jednoznaczność odwzorowania oraz restytucji. Każdej dowolnej płaszczyźnie α odpowiada bowiem dokładnie jeden biegun A_{α} względem paraboloidy, przez który przechodzi dokładnie jedna średnica zawierająca dokładnie jeden półobraz A i jego rzut - obraz A'.
Również i odwrotnie. Obrazowi A' przyporządkowany jest dokładnie jeden półobraz A leżący na średnicy l paraboloidy Φ. Średnica l przebija paraboloidę w dokładnie jednym punkcie właściwym M. Punkt A_{α} położony na prostej l symetrycznie względem A (o środku symetrii M) jest biegunem płaszczyzny α.

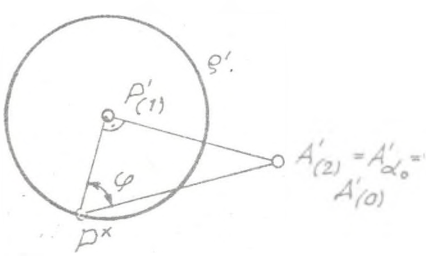
2. Zauważmy, że wzajemną dowolnej prostej niewłaściwej względem paraboloidy Φ jest średnica tej kwadryki (istotnie bowiem prosta niewłaściwa t^{∞} należy do płaszczyzny niewłaściwej τ^{∞}, której biegunem jest śro-

dek paraboloidy S^{∞}; z przynależności $S^{\infty} \in \tau^{\infty}$ wynika przynależność wzajemnej do środka S^{∞}). Jeżeli zatem rozważymy pęk płaszczyzn równoległych, o osi t^{∞}, stwierdzimy, że bieguny tych płaszczyzn leżą na jednej średnicy paraboloidy, a w rezultacie obrazy płaszczyzn ulegają zjednoczeniu. Dowiedliśmy więc prawdziwości twierdzenia: "Obrazy płaszczyzn równoległych pokrywają się w jednym punkcie".

3. W celu rozwiązywania zagadnień miarowych, w szczególności wyznaczania wielkości kątów, konieczne jest sprecyzowanie pośredniczącej w odwzorowaniu paraboloidy Φ poprzez podanie np. wysokości jej ogniska P. Przyjmijmy dla uproszczenia że, wysokość ta równa jest jednostce. Zgodnie z własnością paraboloidy jednostka wówczas będzie promieniem okręgu ρ' stanowiącego rzut prostokątny na π równoleżnika paraboloidy o środku P (rys. 1).



Rys. 1

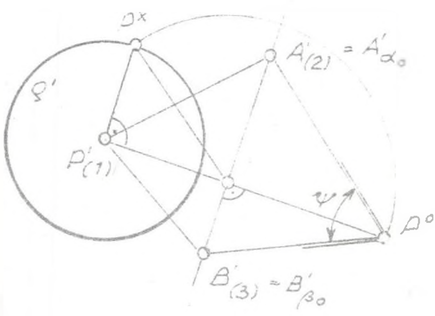


Rys. 2

4. Zauważmy, że bieguny płaszczyzn przechodzących przez ognisko P leżą na rzutni π. Ponieważ ognisko P jest środkiem inwolucyjnego, cyklicznego pęku prostych sprzężonych względem każdego południka paraboloidy, wynika stąd, że prosta łącząca ognisko P z biegunem dowolnej płaszczyzny $\bar{\alpha}$ przynależnej do P jest do tej płaszczyzny prostopadła.

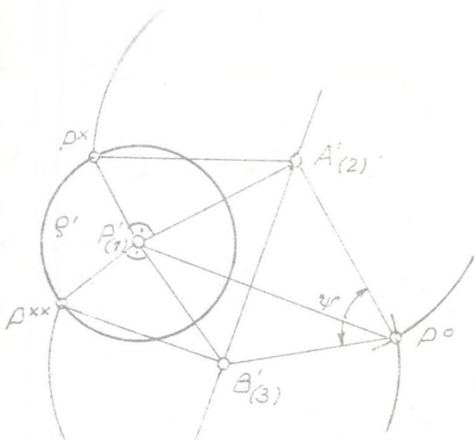
5. Powyższa uwaga pozwala na natychmiastowe wyznaczenie wielkości kąta nachylenia dowolnej płaszczyzny określonej swoim obrazem, np. $A'_{(2)}$ - do rzutni (rys. 2). Miarą tego kąta jest kąt płaski φ utworzony przez średnicę 1 i promień PA' (rys. 1), czyli $\sphericalangle P'P^x A'$ (rys.2). Warto zauważyć, że konstrukcja kąta φ wynika również z innego odwzorowania płaszczyzny za pomocą paraboloidy obrotowej, mianowicie za pomocą tzw. śladu paraboloidalnego [1]. W metodzie tej dowodzi się, że wielkość szukanego kąta nachylenia płaszczyzny do płaszczyzny poziomej przechodzącej przez P określa kąt zawarty pomiędzy rzutami paraboloidalnych śladów tych płaszczyzn.

6. Rysunek 3 przedstawia konstrukcję miary kąta dwuściennego utworzonego przez dowolnie położone płaszczyzny α i β. Obrazy tych płaszczyzn pokrywają się ze śladami prostych do nich prostopadłych, przechodzących przez ognisko P. Stąd konstrukcja sprowadza się do kładu płaszczyzny $PA_{\alpha}B_{\beta}$, dla której prosta $A_{\alpha}B_{\beta}$ jest śladem na rzutni π.



Rys. 3

Jeżeli uwzględnić dodatkowe relacje ukazane na rys. 4, otrzymuje się potwierdzenie tej własności dowiedzionej w pracy [1], zgodnie z którą wielkość miary kąta utworzonego przez dwie płaszczyzny przechodzące przez ognisko paraboloidy wyraża kąt przecięcia się okręgów stanowiących ortogonalne rzuty śladów paraboloidalnych tych płaszczyzn.



Rys. 4

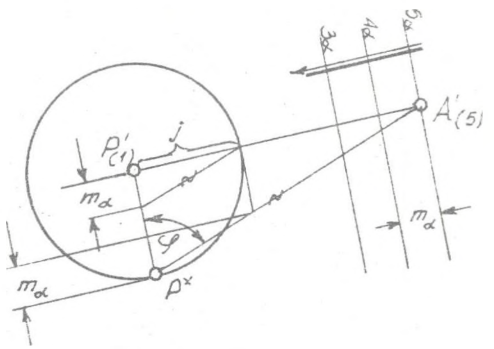
7. Rozważmy zbiór stycznych do paraboloidy przecinających jej oś S w punktach $W_1, W_2 \ldots$ Każda z nich należy do ściśle określonej płaszczyzny stycznej, stanowiąc jednocześnie jej linię spadu. Ponieważ punkt styczności każdej z tych płaszczyzn leży powyżej[x] odpowiedniego punktu W_i - zwrot rzutu linii spadku skierowany jest ku punktowi $s' = P'$. Dla dowolnie przyjętej płaszczyzny α można zawsze wprowadzić pomocniczą płaszczyznę równoległą $\beta \parallel \alpha$, styczną do paraboloidy, np. w punkcie B. Z wcześniejszych rozważań wynika, że $B' = A'$, wobec czego możemy stwierdzić, że dysponując obrazem płaszczyzny α w postaci cechowanego rzutu A' znamy automatycznie rzut linii spadu tej płaszczyzny: jest nią prosta $A'P'$.

8. Na podstawie ustaleń ust. 7 łatwo można obraz dowolnej płaszczyzny uzupełnić do planu warstwicowego. Wystarczy zauważyć, że w trójkącie

---

[x] W praktyce przyjmuje się rzutnię w położeniu poziomym, a determinujące wraz z nią paraboloidę - ognisko - ponad tą rzutnią.

$P'P^x A'$ (rys. 2) wobec zaznaczonego kąta nachylenia φ płaszczyzny α do rzutni prosta $A'P^x$ może być uważana za kład linii spadu (przyjmując, że bok $P'P^x$ jest odcinkiem poziomym). Odnośna konstrukcja polega więc na znalezieniu modułu jako odcinka podziału $P'P^x$ w stosunku $\frac{1}{A'P'}$ (rys. 5).



Rys. 5

Z powyższego wynika, że o module płaszczyzny, a więc i jej nachyleniu decyduje odległość jej obrazu od punktu P'. Im większa jest ta odległość, tym większy jest kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni. W szczególności dla obrazów leżących na rzucie równoleżnika paraboloidy o środku w ognisku kąt nachylenia wynosi 45°. Płaszczyzny, których obrazy są koncentryczne względem P' mają jednakowe nachylenia.

9. Z konstrukcji obrazów płaszczyzn wynikają jeszcze następujące spostrzeżenia:

- jeżeli obrazy płaszczyzn są współliniowe, zbiorem takich płaszczyzn jest wiązka. Istotnie, bowiem w takim przypadku bieguny odwzorowywanych płaszczyzn leżą w jednej płaszczyźnie prostopadłej do rzutni i zawierającej określoną obrazami prostą;
- jeżeli w szczególności także i półobrazy płaszczyzn są współliniowe – zbiorem odnośnych płaszczyzn jest pęk stopnia drugiego.

Wniosek taki można uzasadnić w oparciu o wyniki pracy [2]. Wystarczy zauważyć, że bieguny płaszczyzn oraz ich półobrazy pozostają ze sobą w przekształceniu inwersyjnym, w którym krzywą podstawową jest parabola przekroju paraboloidy Φ płaszczyzną biegunów i półobrazów, a środkiem inwersji – środek paraboloidy S^∞. Utworem inwersyjnym względem prostej zawierającej półobrazy jest parabola Ω o środku S^∞, zawierająca bieguny. Dwoiście paraboli Ω odpowiada zbiór płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt wspólny (wierzchołek), stycznych do krzywej stopnia drugiego, przy czym ponieważ środkowi S^∞ paraboli Ω odpowiada płaszczyzna niewłaściwa zbiór ten zawiera płaszczyznę niewłaściwą, jest nim zatem walec paraboliczny.

10. Uzupełniając pracę [2] rozważaniami nad uogólnieniem związku inwersji na przestrzeń trójwymiarową można analogicznie wykazać, że jeżeli powierzchnią podstawową związku będzie paraboloida eliptyczna, zaś jego

środkiem - środek paraboloidy - utworem inwersyjnym względem płaszczyzny α będzie paraboloida eliptyczna $\hat{\alpha}$. Na tej podstawie określić można charakter zbioru płaszczyzn wówczas, kiedy ich półobrazy są komplanarne. Wówczas zbiór biegunów rozpatrywanych płaszczyzn wypełnia paraboloidę eliptyczną Γ, a utwór odpowiadający mu biegunowo jest zbiorem płaszczyzn stycznych do powierzchni stopnia drugiego. Ponieważ elementem tej powierzchni jest płaszczyzna niewłaściwa, a nie jest to powierzchnia walcowa (gdyż wszystkie tworzące je płaszczyzny nie przechodzą przez jeden punkt wspólny, któremu musiałaby odpowiadać płaszczyzna a nie paraboloida Γ), wnosimy, że rozpatrywany zbiór płaszczyzn tworzy paraboloidę eliptyczną.

11. Przedstawiony sposób odwzorowania płaszczyzn znajduje swe uzasadnienie w prostocie graficznej. Jest on szczególnie celowy w przypadku kiedy rozpatrywanych płaszczyzn jest dużo i tradycyjne metody ich odwzorowania (rzuty Mongea, rzut cechowany) wiązałyby się z małą przejrzystością rysunku. Oferuje również stosunkowo proste konstrukcje wielkości kątów i może znaleźć zastosowanie w niektórych zagadnieniach geometrii górniczej.

LITERATURA

[1] M. Palej: O pewnym przypadku wiernokątnego odwzorowania płaszczyzn. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s. Matematyka Fizyka nr 20, Gliwice 1966.

[2] M. Palej: O pewnym uogólnieniu płaskiego związku inwersji. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Matematyka Fizyka nr Gliwice 1981.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Konrad Dyba

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1985 r.

ОБ ОДНОМ ИЗОБРАЖЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

Р е з ю м е

В работе представлено некоторой метод изображении плоскостей при помощи полярного соответствия.

В методе принимается произвольный параболоид вращения Φ, которого полярная плоскость фокуса является плоскостью проекции. Образом плоскости α называется проекция с числовой отметкой такой точки A этой плоскости, в которой она пересекает диаметр параболоида инцидентный с полюсом плоскости α. Доказывается что в рассматриваемом методе однозначно соответствует плоскости α - точка A' и обратно - точке A' - плоскость α.

На некоторых примерах представлено полезность метода для решения задач по истинным величинам углов.

Рассматривается плоскости, которые изображены коллинеарными точками а также и такие, которых так называемые полуобразы (прообразы точек изображаемых плоскости) коллинеарные или принадлежащие одной плоскости.

Метод предлагает некоторые графические упрощения особенно в случае одновременного изображения большого количества плоскостей.

ABOUT DEPENDABLE PLANES REPRESENTATION

S u m m a r y

The method of the planes representation by using space polarity is shown in the work.

An optional rotary paraboloid Φ with its plane as a projection surface (focus polar) has been taken as the basis. The marked projection of such a point of plane α where it crosses the diameter of the paraboloid incidental with the plane's polar in relation to paraboloid Φ is called the image of the plane α.

Univocal character of the considered way of representation as the recreation has been being proved.

The usefulness of the method, particularly for solution of the problems connected with angles, has been shown in several examples. The construction of the dihedral angle measurement and the angle of inclination of the straight line towards the plane has been discussed in partimlar.

Much consideration was devoted to the character of the creations of which images are collinear or so-called half-images (originals of the points making plane image) are co-planar and-in specific case they are collinear.

The method seems to offer a certain graphic simplifications especially during its use for simultaneous representations of the large number of planes.