ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 51 Nr kol. 874

Marian PALEJ

O PEWNYM ZŁOŻENIU RZUTÓW ŚRODKOWYCH ZACHOWUJĄCYM NIEZMIENNIKI RZUTU RÓWNOLEGŁEGO

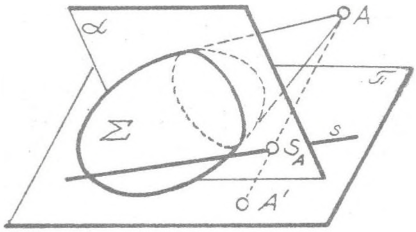
Streszczenie. W pracy omówiono szczególny przypadek tzw. rzutu środkowo-biegunowego, w którym aparat projekcyjny stanowi kwadryka Σ, dowolna prosta s i rzutnia π, a rzutu punktu dokonuje się ze środka S sprzężonego z tym punktem względem Σ i leżącego na prostej s.
W rozpatrywanym przypadku szczególnym wprowadza się jako kwadrykę Σ parę płaszczyzn: rzutnię π i płaszczyznę niewłaściwą ϑ^{∞} oraz prostą $s \perp \pi$. Zgodnie z opisaną zasadą rzut dowolnego punktu A - A' jest środkiem odcinka promienia rzutującego SA.
Dla dowolnej figury Γ jako obraz otrzymujemy zbiór rzutów poszczególnych jej punktów dokonywanych z różnych środków S_i leżących na s.

Rozważając własności takiego rzutowania ustala się, że w obrazie figury zachowana jest współliniowość punktów i stosunek podziału odcinka. Oznacza to, że obraz taki jest podobny do rzutu równoległego figury Γ przy stosunku podobieństwa 1:2. Można zauważyć, że modyfikując nieco założenia, a w szczególności ustalając, że rzutnia nie połowi promieni rzutujących, lecz dzieli je w innym, stałym stosunku, można otrzymać obrazy podobne, sporządzone w innej skali.

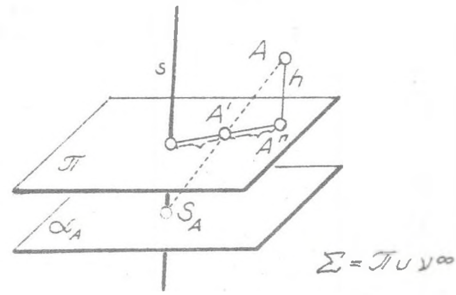
Sugeruje się możliwość wykorzystania opisanej metody odwzorowania do sporządzania zdjęć fotograficznych zachowujących niezmienniki rzutowania równoległego.

Artykuł niniejszy jest próbą wskazania na ewentualną, praktyczną przydatność jednego ze sposobów odwzorowywania przestrzeni, którego ogólniejsze założenia wydawały się być uzasadnione wyłącznie teoretycznie i nie obiecywały zastosowań w praktyce. Chodzi tu o pracę M. WANTRYCHA referowaną na Ogólnopolskiej Konferencji Geometrii Rzutowej i Wykreślnej w Częstochowie (1978) pod wstępnym tytułem "Rzut środkowo-biegunowy". Rozważa się w niej następujący aparat projekcyjny: płaszczyzna odwzorowania π, dowolna kwadryka Σ i prosta s nieprzynależna do π oraz Σ (rys. 1). Dowolnemu punktowi A przyporządkowuje się taki jego obraz na rzutni π, który jest rzutem ze środka S_A, gdzie $S_A = s \cap \alpha$, a α oznacza płaszczyznę biegunową punktu A względem kwadryki Σ.

Rozpatrzmy przypadek, w którym $s \perp \pi$, a rolę kwadryki Σ spełnia para płaszczyzn $\mu \cup \vartheta$. Niech przy tym $\mu \equiv \pi$, a pozostała płaszczyzna ϑ niech będzie płaszczyzną niewłaściwą. Tak więc $\Sigma = \pi \cup \vartheta^{\infty}$ (rys. 2). Dla tak sprecyzowanych założeń płaszczyznę biegunową α dowolnego punktu A względem zdegenerowanej kwadryki Σ można przyjąć jako płaszczyznę α_A, przechodzącą równolegle do π w odległości równej oddaleniu od rzutni punktu A i po przeciwnej (w stosunku do A) jej stronie. Wówczas bowiem kwadryka $\Sigma = \pi \cup \vartheta^{\infty}$ rozdziela harmonicznie punkty A i S_A.



Rys. 1



Rys. 2

Oparte na powyższych założeniach odwzorowanie można traktować jako złożenie różnych, selektywnych rzutów środkowych. Z każdego środka o wysokości h (leżącego zgodnie z ideą aparatu projekcyjnego na osi s) rzutowane są tylko te punkty, których wysokość względem π wynosi $-h$.

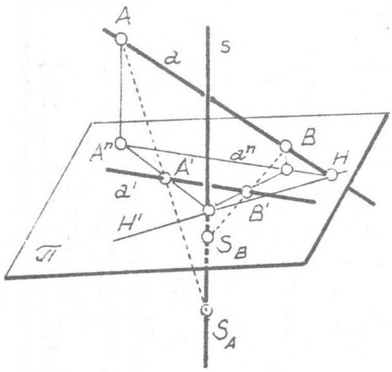
Zauważmy, że obrazem każdego punktu różnego od punktu niewłaściwego osi s i rozłącznego z rzutnią π jest punkt. Jest nim środek odcinka, którego jeden koniec stanowi spodek (ślad) osi s, a drugi - rzut prostokątny danego punktu na rzutnię π. Punkt leżący na rzutni π, różny od spodka osi s, ma swój obraz w postaci rzutu rozciągłego, którym jest przynależny do rzutni promień rzutujący. Wreszcie, spodek osi, jak również niewłaściwy punkt osi s nie mają określonych jednoznacznie obrazów (bądź też obrazami ich jest cała rzutnia), gdyż jednoczą się one z przyporządkowanymi sobie środkami rzutów. Wyłączając te dwa szczególne punkty można stwierdzić, że rozważane odwzorowanie ma charakter jednoznaczny- każdemu dowolnemu punktowi odpowiada dokładnie jeden jego obraz (będący w szczególnym przypadku prostą).

Łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Rozpatrywane odwzorowanie zachowuje współliniowość punktów nieleżących na rzutni.

Dowód. Dla prostych przecinających oś środków w punkcie właściwym prawdziwość twierdzenia jest natychmiast widoczna. Promienie rzutujące poszczególne punkty prostej leżą w jednej płaszczyźnie, której krawędź z rzutnią jest obrazem tej prostej.
W przypadku prostej skośnej względem osi s (rys. 3) zbiór promieni rzutujących jej punkty tworzy kwadrykę skośną (szereg punktów na prostej i szerg przyporządkowanych im środków rzutow są szeregami rzutowymi). Ponieważ jedna z tworzących tej kwadryki leży na rzutni (jako obraz śladu prostej), wnosimy, że przekrojem zbioru prostych rzutujących rzutnią jest stożkowa zdegenerowana do pary prostych. Jedna z nich jest obrazem śladu prostej - druga - obrazem wszystkich pozostałych punktów tej prostej.

Zauważmy przy tym, że w przypadku równoległości prostej do rzutni rzutująca ją kwadryka degeneruje się do dwóch płaszczyzn: płaszczyzny przechodzącej przez oś s równolegle do prostej (jest to płaszczyzna rzutująca punkt niewłaściwy) oraz płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą i przyporządkowany jej środek rzutów. Obydwie te płaszczyzny przecinają rzutnię w parze prostych równoległych składających się na obraz rozpatrywanej prostej. Wreszcie w przypadku prostopadłości prostej do rzutni można stwierdzić, że obrazy wszystkich jej punktów właściwych (z wyjątkiem śladu) jednoczą się w jednym punkcie - w środku odcinka, którego jednym końcem jest ślad osi - drugim - ślad prostej. Ponieważ obrazem śladu jest promień łączący ten punkt ze spodkiem osi, w przypadku tym obrazem prostej bez jej punktu niewłaściwego jest jedna prosta.

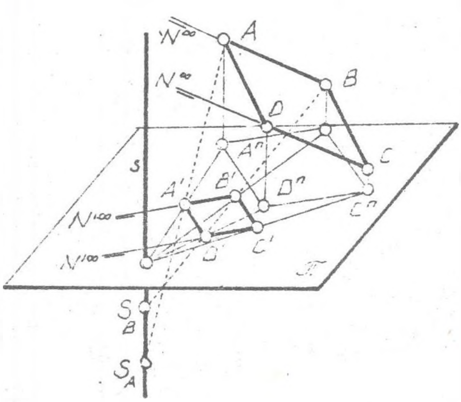


Rys. 3

Udowodnimy jeszcze kolejną własność odwzorowania wyrażoną twierdzeniem:

Twierdzenie 2. Obrazem punktu niewłaściwego rozłącznego z osią i rzutnią π jest punkt niewłaściwy.

Dowód: Weźmy pod uwagę dowolny punkt niewłaściwy (rys. 4) nie leżący na rzutni π ani na osi s. W związku z relacją $N^{\infty} \in \vartheta^{\infty}$ zachodzi jednocześnie $\alpha_N = \vartheta^{\infty}$. Sprzężony z N^{∞} względem kwadryki $\Sigma = \pi \cup \vartheta^{\infty}$ środek S_N^{∞} jest również elementem płaszczyzny ϑ^{∞}. Mamy więc promień rzutujący punktu N^{∞} w postaci prostej niewłaściwej. Wynika stad, że obraz punktu N^{∞} jako część wspólna promienia $S_N^{\infty} N^{\infty}$ oraz rzutni jest punktem niewłaściwym, co należało udowodnić.



Rys. 4

Twierdzenia 1 i 2 oznaczają zachowanie równoległości prostych. Wnosimy więc, że rozpatrywane odwzorowanie posiada własności rzutu równoległego.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że obraz jaki powstaje z opisanego odwzorowania dowolnej figury rozłącznej z rzutnią i punktem niewłaściwym osi jest środkowo podobny do prostokątnego rzutu tej figury na rzutnię π. Środkiem podobieństwa jest spodek osi s, a skalą - stosunek podziału promienia rzutującego przez rzutnię, tj. 1/2.

W oparciu o powyższe uwagi można postawić tezę: rozpatrywane odwzorowanie sugeruje możliwość dokonywania takich zdjęć fotograficznych, które byłyby zgodne nie z rzutem środkowym lecz równoległym. Abstrahując bowiem od problemów natury technicznej można by skonstruować następujący model. Niech aparat fotograficzny będzie sprzężony ze źródłem światła szczelinowego rozchodzącego się w płaszczyźnie równoległej do kliszy (bądź ekranu). Niech przy tym położenie środka optycznego aparatu oraz szczeliny rzucającej płaszczyznę świetlną będzie ruchome względem kliszy (ekranu), przy czym każdorazowo, w każdym położeniu niech będzie spełniony warunek jednakowego oddalenia tych elementów od płaszczyzny kliszy (ekranu). Włączając na moment, w określonym położeniu, źródło światła dokonujemy odpowiedniego zdjęcia. Jeżeli płaszczyzną świetlną przecinać będziemy fotografowany obiekt w równych odstępach, otrzymamy w postaci zdjęć warstwice tego obiektu składające się na jego obraz. Warstwice te będą odpowiadały rzutowi równoległemu (prostokątnemu) charakterystycznych dla obiektu linii warstwowych.

Wypada na koniec wspomnieć, że rezygnując w zasadzie odwzorowania z równości oddaleń punktu i przyporządkowanego mu środka od rzutni, a zachowując jedynie pomiędzy tymi wielkościami stały stosunek, np. 3:1, nie naruszamy opisanych własności odwzorowania i w rezultacie otrzymujemy obraz podobny do rzutu prostokątnego oryginału. W podobieństwie tym zmianie ulegnie jedynie skala podobieństwa (w danym przypadku do 1:4), co z różnych względów może się zresztą okazać pożądane.

LITERATURA

W. Wantrych: Rzut środkowo-biegunowy - Materiały Ogólnopolskiej Konferencji Geometrii Rzutowej i Wykreślnej w Częstochowie - 1978.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Kondrad Dyba

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1985

ОБ ОДНОМ СЛОЖЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИИ
СОХРАНЯЮЩИХ ИНВАРИЯНТЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено частный случай т.н. центрально-полярной проекции, в котором проекционной аппарат это произвольная поверхность 2-степени Σ, прямая s и плоскость проекции π, а проекцию точки получается из центра s сопряженного с этой точкой и лежащего на прямой s.

В рассмотриваемом частном случае как поверхность 2-степени Σ вводится плоскость проекции π и несобственную плоскость ϑ^{∞} т..: $\Sigma = \pi \cup \vartheta^{\infty}$. Прямую s принимается перпендикулярно к плоскости проекции. Согласно описанному методу проекция произвольной точки A - является серединой отрезка проектирующего луча SA.

Образ произвольной фигуры Γ получаем как совокупность проекции точек этой фигуры произведенных из разных центров S_i лежащих на прямой s.

Рассмотривая свойства таких проекции устанавливается что в проекции фигуры сохраняется коллинеарность и простое отношение трех точек прямой. Это значит что образ фигуры в рассмотриваемом методе подобен его параллельной проекции, при чем коэффициент гомотетии равен 1:2. Можно отметить, что принимая другие предположения, особенно принимая не равные но только сохраняющие пропорцию расстояния точек и припиоанных им центров проекции от плоскости проекции - получается другой коэффициент гомотетии.

Внушается возможность использования описанного метода для выполнения фотографических снимок сохраняющих инвариянты параллельной проекции.

ABOUT DEPENDABLE COMPOSITION OF THE CENTRAL PROJECTIONS KEEPING
THE INVARIANTS OF THE PARALLEL PROJECTION

S u m m a r y

The work diskussed a particular case of so called central-polar projection in which the quadric Σ, any straight line s and projection plane π constitute the projector, and the point projection is made from the centre S being conjugated with this point in relation to Σ and laying on the straight line s. In this particular case a couple of planes was introduced as the quadric Σ: projection plane π and improper plane ϑ^{∞} as well as straight line $s \perp \pi$.

According to the rule described the "A" point projection - "A′" is the centre of the segment of projecting ray SA.
An image of any figure Γ is the set of its particular points projections made from different centres S_i laying on line s.

Considering properties of such projection it has stated that collinearity of the points and the ratio of segment division is preserved. It

means that such an image is similar to the parallel projection of figure Γ with similarity ratio 1:2. You may notice that modyfing the assumptions a little and stating that the projection plane dyfing the assumptions a little and stating that the projection plane does not divide projection rays into two but differently you may get similar images in another scale.

It has been suggested that there is a possibility of using the above method in taking the photographs while keeping invariants of parallel projection.