

Stanisław SULWIŃSKI

Instytut Geometrii Wykreślonej

KONSTRUOWANIE PUNKTÓW WSPÓLNYCH
DWU STOŻKOWYCH WSPÓŁOSIOWYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono zagadnienie konstrukcji punktów wspólnych dwu stożkowych posiadających wspólną oś. Problem ten aprowadzono do konstrukcji punktów przecięcia stożkowej i prostej.

1. Wstęp

Tytuł artykułu wskazuje, że przedmiotem rozważań będzie dosyć wąska klasa konstrukcji wywodzących się z ogólnego zagadnienia wyznaczania punktów wspólnych dwu współpłaszczyznowych stożkowych. Problem ten ma długą historię i to zarówno w obszarze dociekań analitycznych (np. [9]), jak i syntetycznych (np. [1]).

W oparciu o interpretację analityczną można stwierdzić, że współrzędne poszukiwanych punktów przecięcia są wyrażone wielomianem stopnia czwartego, który tylko w pewnych, szczególnych przypadkach sprowadza się do iloczynu dwu wielomianów stopnia drugiego.

Wniosek 1. Tylko w szczególnych przypadkach zagadnienie wyznaczania punktów wspólnych dwu współpłaszczyznowych stożkowych jest rozwiązalne za pomocą cyrkla i liniału.

Bardziej szczegółowo ujął to Enriques w [1], stwierdzając:

Twierdzenie 1. Jeżeli badane stożkowe s_1 i s_2 posiadają dwa punkty (dwie proste) wspólna oraz gdy w płaszczyźnie stożkowych s_1 i s_2 dana jest pewna stożkowa podstawowa, to zagadnienie wyznaczania punktów wspólnych stożkowych s_1 i s_2 jest zagadnieniem stopnia drugiego.

Sięgając do dostępnych źródeł z okresu ubiegłego dwudziestolecia można zauważyć, że co najmniej kilka prac (np. [4], [5], [6], [7], [2]) ma bezpośredni związek z omawianym tematem lub analizują one pewne aspekty przyjętego kierunku działania. W szczególności w pracy [2] przedstawiono wyniki tytułowego problemu w oparciu o szczególne przypadki przenikania powierzchni stopnia drugiego, z tym że w rozwiązaniu zagadnienia uczestniczą: stożek obrotowy i sfera, a w szczególnym przypadku - stożek obrotowy i walec.

Przedstawiony niżej sposób prowadzi do realizacji zadania nieco inną drogą, jak się wydaje bardziej konsekwentną i krótszą. Podstawę konstrukcji opiera się na rozpadzie linii przenikania dwu kwadryk na dwie krzywe płaskie, w przypadku gdy istnieją dwa punkty podwójne linii przenikania oraz na własności rzutu prostokątnego tej krzywej na płaszczyznę symetrii dwu przenikających się kwadryk. Uzasadnienie prawdziwości konstrukcji wykonuje się językiem geometrii syntetycznej.

2. Niektóre własności rzutu linii przenikania stożka obrotowego z walcem

Niech w układzie rzutów Monge'a (π_1, π_2, X) dana będzie prosta $l \parallel X$ oraz czołowa płaszczyzna $\varphi: l \subset \varphi$.

Rozważmy teraz następujące powierzenie: stożek obrotowy σ o osi l i wierzchołku W oraz rodzinę walców eliptycznych $\{\omega_i\}: \bigwedge_{\omega_i} (l_{1i} \perp \pi) \wedge (l_{1i} \cap l) = O_i$, przy czym literę k_i oznaczymy rzut pionowy linii przenikania, tj. $k_i = (\sigma \cap \omega_i)''$, zaś l_{1i} oznacza oś walca ω_i . Jak wiadomo (np. [8], tw. XVII), ze względu na symetrię założeń względem czołowej płaszczyzny φ krzywa k jest stożkową, której rodzaj można określić analizując punkty przecięcia krzywej k jej osiami. W oparciu o powyższe dowodzi się następującego lematu:

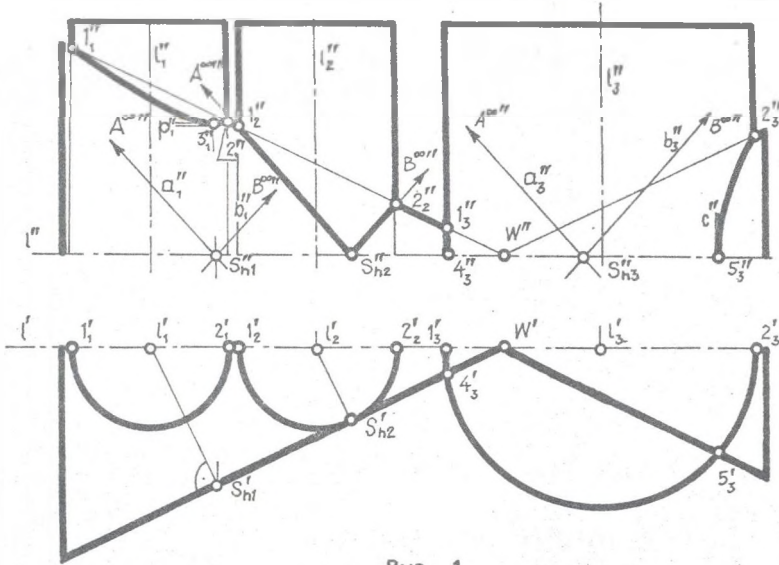
Lemat 1. Rodzina stożkowych k_i jest rodziną hiperbol podobnych.

Dowód: W pierwszej fazie dowodu przyjmijmy, że walce ω_i są obrotowe. Dokonując przekroju powierzchni σ i ω_i niewłaściwą płaszczyzną α^∞ otrzymujemy: $\sigma \cap \alpha^\infty = s^\infty$ - rzeczywistą stożkową niewłaściwą oraz $\omega_i \cap \alpha^\infty = s_i^\infty = \{t_{i1}^\infty, t_{i2}^\infty\}$ - dwuelementowy zbiór tworzący stożkową zniekształconą złożony z urojonych i niewłaściwych tworzących przechodzących przez rzeczywisty i niewłaściwy punkt $L_i^\infty \subset l_{1i}$, a także przez punkty izotropowe dowolnego równoleżnika walca ω_i . Iloczyn $s^\infty \cap s_i^\infty$ wyznacza czwórkę punktów niewłaściwych, natomiast rzut pionowy zbioru $s^\infty \cap s_i^\infty$ określa dwa ustalone dla całej rodziny $\{k_i\}$ punkty niewłaściwe $A^{\infty''}, B^{\infty''}$ - kierunki asymptot hiperbol k_i . W szczególnym przypadku (istnienie dwu punktów podwójnych w linii przenikania $\sigma \cap \omega_i$) hiperbola k_i zniekształca się do dwu prostych rzeczywistych $(1_2'', S_{n2}'')$ i $(2_2'', S_{n2}'')$ przedstawionych na rys. 1.

Przypadek, gdy ω_i jest prostym walcem eliptycznym, otrzymujemy z powyższego drogą odpowiedniego przekształcenia powinowatego, w którym walcowi obrotowemu odpowiada wałek eliptyczny (płaszczyzna powinowactwa przechodzi przez oś l_{1i} i jest prostopadła do osi l).

Niech teraz ω_i oznacza wałek paraboliczny usytuowany analogicznie do walców rozważanych poprzednio. Analiza punktów przecięcia stożkowej k_i z prostą niewłaściwą rzutni π_2 pozwala stwierdzić, że mamy teraz do czynienia także z hiperbolami. Przekroje $\sigma \cap \alpha^\infty$ oraz $\omega_i \cap \alpha^\infty$ wskazują od-

powiednio na obecność niewłaściwej stożkowej s^∞ oraz pary rzeczywistych, zjednoczonych, niewłaściwych tworzących $t_{1i}^\infty = t_{2i}^\infty = s_i^\infty$. Przekrój $s^\infty \cap s_1^\infty$ wyznacza dwa kierunki usytuowane równoległe do płaszczyzny φ i tym samym ($s^\infty \cap s_1^\infty$) jest dwuelementowym zbiorem punktów niewłaściwych A^∞ i B^∞ , wspólnych dla wszystkich powierzchni ω_1 .



Rys. 1

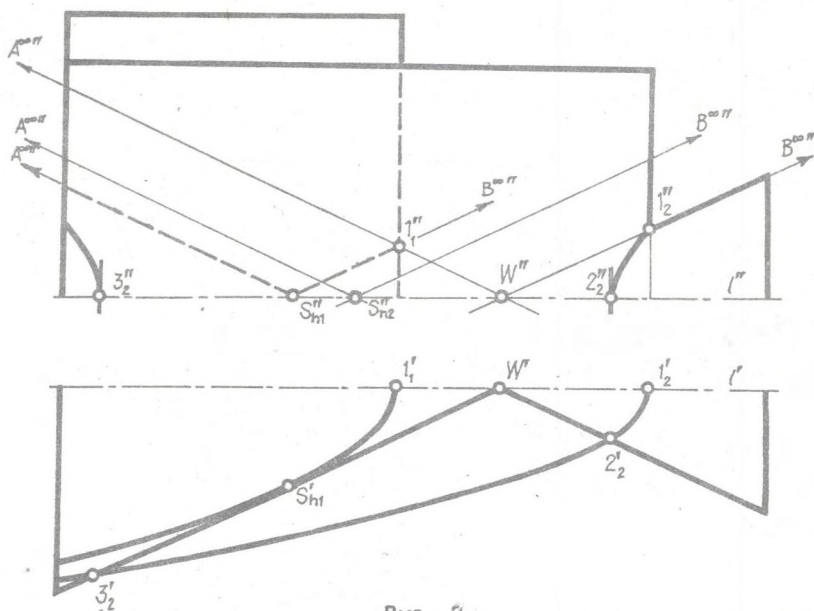
Występowanie stożkowej zniekształconej ma miejsce analogicznie jak w lemacie 1, a zatem prawdziwy jest lemat 2:

Lemat 2. Stożkowe k_i otrzymane w przypadku, gdy ω_1 oznacza walec paraboliczny, są hiperbolami podobnymi.

Jeśli z kolei powierzchnia ω_1 będzie walcem hiperbolicznym, którego rzeczywista płaszczyzna główna jest zjednoczona z płaszczyzną φ , to analiza ilości i rodzaju elementów niewłaściwych stożkowej k_i prowadzi do wniosku, że mamy teraz do czynienia z:

- 1° elipsą, jeśli $\alpha > \beta$ i α - oznacza kąt rozwarcia asymptot, zaś β - kąt rozwarcia stożka
- 2° parabolą, jeśli $\alpha = \beta$ i $S \neq W'$, gdzie S - oznacza środek kierującej hiperboli (dla $S = W'$ otrzymujemy dwie proste równoległe do tworzących konturowych)
- 3° hiperbolą, jeśli $\alpha < \beta$.

Przeciwnie relacje występują w 1° i 3° wtedy, gdy z płaszczyzną φ jednoczy się urojona płaszczyzna główna kwadryki. Z tych spostrzeżeń wynika wniosek przedstawiony lematem 3.



Rys. 2

Lemat 3. Dla zadanego walca hiperbolicznego ω_1 można zawsze tak dobrać kąt rozwarcia stożka obrotowego \mathcal{G} , aby hiperbolicznej kierownicy $C \in \mathcal{T}_1$ przyporządkować elipsę $k \in \mathcal{T}_2$.

Z kolei zajmijemy się stożkiem \mathcal{G} przedstawiając w lemacie 4 pewną jego własność.

Lemat 4. Jeżeli dany jest rzut prostokątny s' stożkowej s , czółowa płaszczyzna ψ (płaszczyzna symetrii stożkowej s) przechodząca przez oś (rzeczywistą - w przypadku hiperboli) krzywej s' oraz prosta $l \subset \psi$ ($l \parallel x$), to istnieje stożek obrotowy \mathcal{G} o osi l i kierownicy s .

Dowód. Rzutnia \mathcal{T}_2 jest równoległa do płaszczyzny symetrii prostokątnej krzywej s' . Krzywą s' potraktujemy jako kierownicę powierzchni walcowej ω o osi prostopadłej do \mathcal{T}_1 , a następnie zauważmy, że każdy stożek obrotowy o osi l , skonstruowany w taki sposób, że rzuty poziome jego tworzących konturowych są styczne do krzywej s' , przenika się z walcem ω w dwu krzywych płaskich (istnienie dwu punktów podwójnych w linii przenikania rozważanych kwadryk czytelnie wskazuje rzut poziomy). Istnieją zatem dwie krzywe s_1 i s_2 takie, że $s_1' \equiv s'$ i $s_2' \equiv s'$, będące kierownicami tego samego stożka obrotowego. Wybierając jedną z i krzywych s_i ($i=1,2$) jako krzywą s otrzymujemy tezę.

Wniosek 2. W przypadku, gdy krzywa s' jest hiperbolą, będziemy przyjmować, że kąt rozwarcia stożka obrotowego jest równy kątowi wyznaczonemu przez asymptoty krzywej i że rzut W' wierzchołka W zjednoczył się ze środkiem hiperboli s .

3. Typy zadań konstrukcyjnych i sposoby rozwiązania

Poszukiwanie efektywnego rozwiązania zadania tytułowego prowadzi do wyróżnienia sześciu istotnych przypadków przecinania się krzywych przedstawionych poniższą tabelą.

	elipsa	parabola	hiperbola
elipsa	4	1	2
parabola	1	5	3
hiperbola	2	3	6

Liczby 1, ..., 6 podają numery kolejnych zadań omawianych niżej.

Zadanie 1. Dane są współosiowe krzywe: elipsa i parabola.

Rozwiązanie. Przyjmując, że elipsa jest kierownicą walca prostego, zaś parabola stanowi kierownicę odpowiednio skonstruowanego stożka obrotowego, w oparciu o lematy 1 i 4 sprowadzamy zagadnienie do konstrukcji przecięcia hiperboli prostą.

Rozwiązanie. Jeśli przyjmiemy, że elipsa jest kierownicą odpowiednio skonstruowanego stożka obrotowego, zaś parabola stanowi kierownicę walca prostego, to w oparciu o lematy 4 i 2 sprowadzimy zagadnienie do konstrukcji przecięcia prostej z hiperbolą.

Zadanie 2. Dane są krzywe: elipsa i hiperbola.

Rozwiązanie. Przyjmując, że elipsa jest kierownicą walca prostego, zaś hiperbola stanowi kierownicę odpowiednio skonstruowanego stożka obrotowego, to w oparciu o lematy 1 i 4 sprowadzamy zadanie do konstrukcji przecięcia hiperboli prostą.

Rozwiązanie. Jeśli przyjmiemy, że elipsa jest kierownicą odpowiednio skonstruowanego stożka obrotowego, zaś hiperbola stanowi kierownicę walca prostego, to w oparciu o lematy 4 i 3 można sprowadzić zagadnienie do konstrukcji przecięcia prostej z elipsą.

Zadanie 3. Dane są: parabola i hiperbola.

Rozwiązanie. Przyjmując, że parabola jest kierownicą walca prostego, zaś hiperbola jest kierownicą odpowiednio skonstruowanego stożka obrotowego, w oparciu o lematy 2 i 4 sprowadzamy zagadnienie do konstrukcji przecięcia hiperboli prostą.

Rozwiązanie. Jeśli przyjmiemy, że parabola jest kierownicą odpowiednio skonstruowanego stożka obrotowego, zaś hiperbola stanowi kierownicę walca prostego, to w oparciu o lematy 4 i 3 sprowadzamy problem do konstrukcji przecięcia prostej z elipsą.

W analogiczny sposób, dla kolejnych przypadków zagadnienie wyjściowe daje się sprowadzić odpowiednio do:

Zadanie 4

$(\text{elipsa} \cap \text{elipsa}) \Rightarrow (\text{hiperbola} \cap \text{prosta}) \vee (\text{prosta} \cap \text{hiperbola})$

Zadanie 5

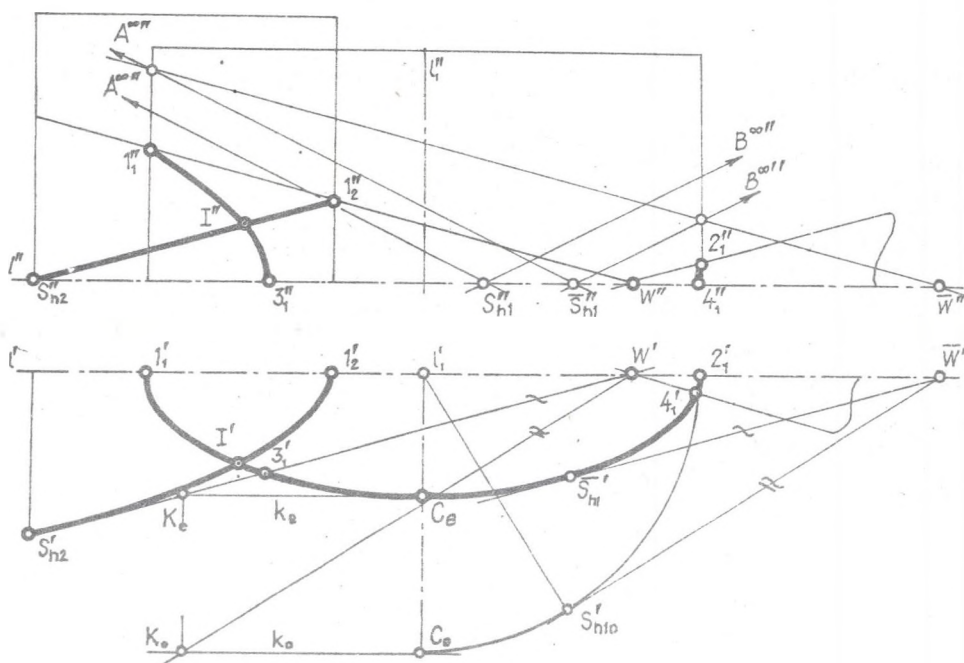
$(\text{parabola} \cap \text{parabola}) \Rightarrow (\text{hiperbola} \cap \text{prosta}) \vee (\text{prosta} \cap \text{hiperbola})$

Zadanie 6

$(\text{hiperbola} \cap \text{hiperbola}) \Rightarrow (\text{elipsa} \cap \text{prosta}) \vee (\text{prosta} \cap \text{elipsa})$.

Konsekwencją zadań 1-6 jest kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 2. Zgadnienie konstrukcji punktów wspólnych dwu stożkowych współosiowych można prawie zawsze sprowadzić do konstrukcji przecięcia hiperboli prostą; jedynie w przypadku, gdy obydwie stożkowe są hiperbolami, zagadnienie sprowadza się do konstrukcji przecięcia elipsy prostą. Niżej przedstawiony rysunek 3 jest graficzną ilustracją konstrukcji punktów przecięcia paraboli z elipsą.



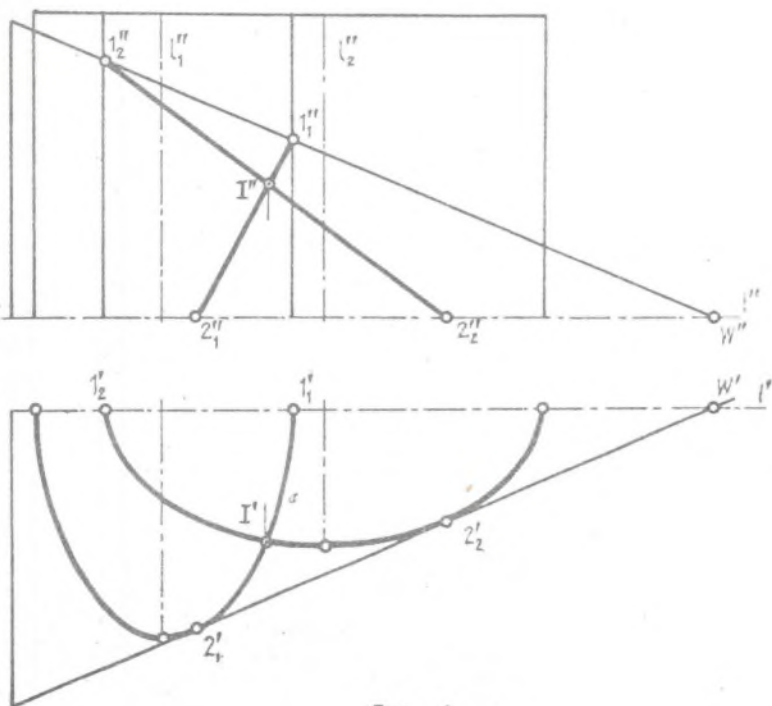
Rys. 3

Dokładniejsza analiza zadań podstawowych prowadzi do sformułowania twierdzenia 3.

Twierdzenie 3. Jeżeli dwie stożkowe współosiowe (i leżące w jednej płaszczyźnie) s_1 i s_2 są tak usytuowane, że posiadają dwie styczne rzeczywiste przecinające się w punkcie W leżącym w ich wspólnej osi, to zagadnienie konstrukcji punktów wspólnych stożkowych s_1 i s_2 można sprowadzić do zagadnienia przecięcia się dwu prostych.

Dowód. Artykuł [2] podaje konstrukcję stycznych do stożkowych s_1 i s_2 . Przyjmijmy, że podobnie jak w tw. 2 proste te są rzutem poziomym tworzących konturowych stożka obrotowego o osi $l \parallel x$ leżącej w czołowej płaszczyźnie (przechodzącej przez oś). Niech teraz stożkowe s_1 i s_2 stanowią kierownice walców prostych w_1 i w_2 . Linia przenikania $w_1 \cap w_2$ ($w_2 \cap w_1$) posiada dwa punkty podwójne, a zatem rzuty pionowe krzywych tworzą dwie pary jednoimiennych odcinków $(w_1 \cap w_2)''$ i $(w_2 \cap w_1)''$. Punkty przecięcia odpowiednich i różnoimiennych par odcinków wskazują rzuty pionowe przekształconych punktów przecięcia się stożkowych s_1 i s_2 .

Przypadek konstrukcji punktów wspólnych dla danych dwu elips, w oparciu o tw. 3, przedstawia rys. 4.



Rys. 4

LITERATURA

- [1] Enriques F.: Wykłady geometrii rzutowej. PWN, Warszawa 1917.
- [2] Domsta B.: Szczególne przypadki przenikania powierzchni w zastosowaniu do wyznaczania wspólnych punktów i stycznych dwóch współosiowych stożkowych. ZN Pol. Gdańskiej Nr 244, s. Matematyka z. X, Gdańsk 1976.
- [3] Kaczmarek J.: Wyznaczanie punktów wspólnych dwóch stożkowych posiadających wspólny trójkąt biegunowo-sprzężony. Referat wygłoszony na Ogólnopolskiej Konferencji Geometrii Wykreślnej, Rogów 13.07.1969.
- [4] Kobzdej T.: Opredelenie toček peresečenia koncentričeskich koničeskich sečeni. ZN Geometria Wykreślna Nr VII, Poznań 1970.
- [5] Małachovcev V.P., Biriuczevski N.D.: Postrojenie toček peresečenia krivych vtorogo poriadka imiejuščich obščuju os' simetrii. ZN Prikladnaja geometria i inž. grafika, nr 23, Kiev 1977.
- [6] Ochoński S.: Konstrukcja punktów przecięcia dwóch stożkowych. ZN Pol. Śl. s. Mat.-Fiz., z. 10, Gliwice 1968.
- [7] Ochoński S.: Przekrój stożka obrotowego w zadanej elipsie. ZN Pol. Śl., s. Mat.-Fiz., z. 5, Gliwice 1964.
- [8] Otto E.: Geometria Wykreślna, PWN, Warszawa 1961.
- [9] Wiener Ch.: Lehrbuch der Darstellenden Geometria, t. I, Leipzig 1884.

Recenzent: Doc. dr inż. Stanisław Ochoński

Wpłynęło do Redakcji we wrześniu 1983

КОНСТРУКЦИЯ ОБЩИХ ТОЧЕК ДВУХ КРИВЫХ
2-го СТЕПЕНИ ИМЕЮЩИХ ОБЩУЮ ОСЬ СИММЕТРИИ

Р е з ю м е

В статье представлена конструкция точек пересечения двух кривых 2-го степени, которые имеют общую ось симметрии. Основную задачу сведено к конструкции точек пересечения конического сечения прямой.

THE CONSTRUCTION OF COMMON POINTS
TWO CONICS HAVING COMMON AXIS

С у м м а р у

In this paper we describe the problem the construction of intersection points of the two one-plane quadric curve, for which the common rectangular symmetry axis is known. The above problem has been reduced to the of the conic curve and straight line.