ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

P.W. GAWRON, O. MACEDOŃSKA-NOSALSKA

PEWNE WŁASNOŚCI STRUKTURY PODGRUP DANEJ GRUPY

Streszczenie. Artykuł omawia znane własności pronormalnych i paranormalnych podgrup oraz pojęcie wachlarza. Zdefiniowano nową własność wielonormalności. Rozważono związek tej własności z własnością podano powyżej. Wykazano, że wszystkie podgrupy w grupie są wielonormalne jeżeli i tylko jeżeli relacja normalności w grupie jest przechodnia.

Wstęp

Niech G będzie dowolną grupą a D pewną jej podgrupą. Przez $\mathcal{L}(D,G)$ oznaczać będziemy strukturę wszystkich podgrup grupy G zawierających podgrupę D. Z.I. Borewicz w pracy [1] wprowadził pojęcie wachlarza i podgrupy wachlarzowej. Przy ich użyciu można uzyskać dostatecznie głęboki opis struktury $\mathcal{L}(D,G)$. W pracy podajemy nową metodę analizy tej struktury opartą na jej rozkładzie na rozłączną sumę podzbiorów, które zostały nazwane bukietami [9].

Praca składa się z trzech paragrafów. W § 1 podane są oznaczenia i najważniejsze pojęcia potrzebne w dalszych paragrafach. W szczególności określone są tam pojęcia wachlarza, podgrupy wachlarzowej, abnormalnej, pronormalnej i słabonormalnej. Podajemy przykład podgrupy wachlarzowej i podgrupy, która nie jest wachlarzową.

Pojęcie podgrupy D-zupełnej i związane z nią pojęcie bukietu podgrup określone jest w § 2. Okazuje się, że $\mathcal{L}(D,G)$ jest sumą rozłączną bukietów opartych na wszystkich D-zupełnych podgrupach (tw. 1). W paragrafie tym podane są również definicje podgrupy polinormalnej i paranormalnej, przykład podgrupy wachlarzowej ale nie polinormalnej oraz podgrupy paranormalnej, która nie jest pronormalną, wreszcie warunek konieczny i wystarczający na to, aby podgrupa D grupy G była polinormalną w G (tw. 2).

Na diagramie w § 3 przedstawione są związki między podgrupami należącymi do struktury $\mathcal{L}(D,\langle D,x\rangle)$ oraz podane są warunki charakteryzujące podgrupę normalną, abnormalną, paranormalną, polinormalną i słabonormalną. Określone są tam również T-grupy. Okazuje się, że wszystkie podgrupy grupy G są polinormalne wtedy i tylko wtedy, gdy G jest T-grupą (tw. 3).

Wszystkie wyniki są rezultatem pracy naukowej prowadzonej przez autorów. Były one referowane na seminarium prof. Z.I. Borewicza w Uniwersytecie Leningradzkim.
Większość wyników została już opublikowana w [9] i [10].

§ 1. Podstawowe oznaczenia i definicje

Będziemy używali następujących oznaczeń:

$D \leqslant G$ - oznacza, że D jest podgrupą grupy G. Podobnie
$D \trianglelefteq G$ - oznacza, że D jest dzielnikiem normalnym G,
$A^x = x^{-1}Ax$,
$\langle A,B,\ldots\rangle$ - podgrupa generowana przez podzbiory (elementy) $A,B,\ldots$ w grupie G,
$\mathcal{L}(D,G)$ - struktura podgrup grupy G zawierających podgrupę D,
$N_G(D)$ - normalizator podgrupy D w grupie G,
$D^A = \langle D^a : a \in A\rangle$.

Podamy pewne definicje, twierdzenia i fakty.

Niech G będzie grupą, a D jej podgrupą. Rodzinę $\mathfrak{M} = \{G_\alpha, N_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (I - pewien zbiór indeksów) nazywamy wachlarzem podgrupy D, jeżeli dla każdego $\alpha \in I$, $D \leqslant G_\alpha \leqslant G$, $N_\alpha = N_G(G_\alpha)$ i dla każdej podgrupy H, $D \leqslant H \leqslant G$ istnieje dokładnie jeden indeks $\alpha \in I$ taki, że $G_\alpha \leqslant H \leqslant N_\alpha$. Podgrupy G_α nazywamy bazowymi podgrupami wachlarza $\mathfrak{M}$.

Grupy ilorazowe N_α/G_α nazywamy sekcjami wachlarza $\mathfrak{M}$. Jeżeli dla D istnieje wachlarz, to D nazywamy podgrupą wachlarzową.

Trywialnymi przykładami podgrup wachlarzowych są podgrupy normalne. Ich wachlarz zawiera jedną podgrupę bazową D.

Podgrupa D nazywa się ([2]) abnormalna w G, gdy dla każdego $x \in G$, $x \in \langle D, D^x\rangle$.

Dla nich (patrz [2]) wszystkie elementy struktury $\mathcal{L}(D,G)$ samonormalizują się, tzn., że jeżeli $D \leqslant H \leqslant G$, to $N_G(H) = H$. Zatem każda podgrupa grupy G zawierająca D jest podgrupą bazową wachlarza.

Pojęcie podgrupy wachlarzowej zostało wprowadzone przez Z.I. Borewicza w [1].

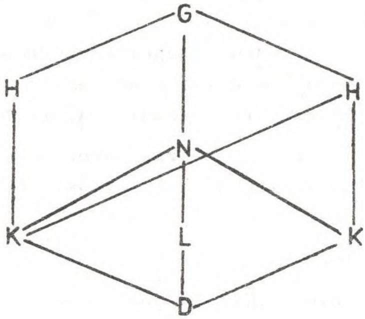
Poniższy przykład dowodzi istnienia niewachlarzowych podgrup. Jest on modyfikacją przykładu podanego w [1]. Podajemy go tutaj również dlatego, ponieważ przykład ten podany jest niedokładny.

W grupie S_6 rozpatrzymy permutacje $a = (12)$, $b = (1324)$, $c = (56)$, $d = (34)$, $b' = bc$, $d' = dc$.

Zdefiniujemy

$G = \langle a,b,c\rangle$, $D = \langle a\rangle$, $N = \langle a,d,c\rangle$,
$H = \langle a,b\rangle$, $H' = \langle a,b'\rangle$, $K = \langle a,d\rangle$
$K' = \langle a,d'\rangle$, $L = \langle a,c\rangle$.

Wyżej wypisane podgrupy są to wszystkie podgrupy z $\mathcal{L}(D,G)$:



Normalizatorem D jest N, a H i H′ są normalnymi dzielnikami w G. Zatem D nie posiada wachlarza. Ph. Hall wprowadził pojęcie podgrupy pronormalnej. Podgrupę D nazywamy <u>pronormalną</u> w G, jeżeli dla dowolnego $x \in G$ podgrupy D i D^x są sprzężone w $\langle D, D^x \rangle$. Przykładami podgrup pronormalnych są podgrupy normalne, abnormalne. Podgrupy Sylowa grup skończonych są także pronormalne. Podgrupy pronormalne są wachlarzowe ([1], tw. 5).

Mówimy, że D jest <u>słabonormalna</u> w G, jeżeli normalizator $N_{G(D)}$ nie zawiera podgrup sprzężonych z D różnych od D (Müller [6]).
Podgrupy pronormalne są słabonormalne.
Jeżeli $D \leq H \leq G$, to D^H jest najmniejszym dzielnikiem normalnym w H zawierającym D.

§ 2. Podgrupy polinormalne. Rozkład na bukiety

<u>Definicja</u>: Podgrupę F, $D \leq F \leq G$, nazywamy <u>D-zupełną</u> jeżeli $D^F = F$.
Sama podgrupa D jest oczywiście D-zupełna. Jeżeli $\{F_\mu\}$ rodzina D-zupełnych podgrup, to generowana przez nią podgrupa $F = \langle F_\mu \rangle$ też jest D-zupełna. Rzeczywiście $F_\mu = D^{F_\mu} \leq D^F$ zatem $F \leq D^F$, a ponieważ zawsze $D^F \leq F$, to $D^F = F$.

Dla każdej podgrupy H, $D \leq H \leq G$, istnieje jednoznacznie określona największa D-zupełna podgrupa H^*, zawierająca się w H. Określimy ją następująco. Dla H budujemy malejący łańcuch podgrup H_i, numerowanych liczbami porządkowymi.

$H_0 = H$, $H_{i+1} = D^{H_i}$, $H_j = \bigcap_{k<j} H_k$ (j - graniczna liczba porządkowa). Oczywiście łańcuch $\{H_i\}$ stabilizuje się na pewnej liczbie porządkowej. Niech l oznacza najmniejszą liczbę porządkową, dla której $H_{l+1} = D^{H_l} = H_l$. Określamy $H^* = H_l$. Oczywiście

$$H^* \leq H, \quad (H^*) = H^*,$$

$$H \leq H' \Rightarrow H^* \leq H'^*,$$

$$H \trianglelefteq H' \Rightarrow H^* = H'^*.$$

Podgrupa F, $D \leq F \leq G$ jest D-zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy $F = F^*$.

Na elementach struktury $\mathcal{L}(D,G)$ wprowadzamy relację równoważności $\sim$, kładąc $H\sim H'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H^* = H'^*$. Oczywiście w każdej klasie abstrakcji jest dokładnie jedna D-zupełna podgrupa, która jednoznacznie określa całą klasę. W ten sposób mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między klasami podgrup równoważnych a D-zupełnymi podgrupami.

Definicja: Niech F, $D\leqslant F\leqslant G$ będzie D-zupełną podgrupą. Zbiór wszystkich podgrup H, dla których $H^* = F$ nazywamy bukietem podgrup opartym na F i oznaczamy $\beta(F)$.

W ten sposób udowodniliśmy:

Twierdzenie 1: Struktura $\mathcal{L}(D,G)$ jest sumą rozłączną bukietów:

$$\mathcal{L}(D,G) = \bigcup_{F^*=F} \beta(F),$$

gdzie F przebiega wszystkie D-zupełne podgrupy.

Dzięki twierdzeniu 1 badanie struktury $\mathcal{L}(D,G)$ można rozbić na dwie części. Opisanie wszystkich D-zupełnych podgrup i opis bukietów $\beta(F)$ dla wszystkich D-zupełnych podgrup F.

Jeżeli D jest podgrupą wachlarzową z wachlarzem $\{G_\alpha, N_\alpha\}_{\alpha\in I}$, to każdy przedział $\mathcal{L}(G_\alpha, N_\alpha)$ całkowicie zawiera się w pewnym bukiecie. Zatem podział $\mathcal{L}(D,G) = \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{L}(G_\alpha, N_\alpha)$ jest subtelniejszy od podziału na bukiety.

Może się zdarzyć, że bukiet $\beta(F)$ jest przedziałem domkniętym w strukturze $\mathcal{L}(D,G)$. Wtedy w każdym bukiecie $\beta(F)$ jest największa podgrupa N (taka, że $\beta(F) = \mathcal{L}(F,N)$). Taka podgrupa N, gdy istnieje nazywana jest subnormalizatorem dla F w G. Szczególnie interesujący jest przypadek, kiedy dla każdej D-zupełnej podgrupy F zachodzi równość

$$\beta(F) = \mathcal{L}(F, N_G(F)). \tag{1}$$

Oznacza ona, że D jest podgrupą wachlarzową i rodzina $\{F, N_G(F)\}$ jest wachlarzem dla D (F przebiega wszystkie D-zupełne podgrupy).

Niech D będzie pronormalną podgrupą G. To oznacza, że dla dowolnego $x\in G$ istnieje taki element $u\in\langle D,D^x\rangle$, że $D^x = D^u$, wtedy dzięki twierdzeniu 5 z [1] dla D istnieje jednoznacznie określony wachlarz $\{G_\alpha, N_\alpha\}$. Wachlarz ten ma własność: jeżeli $G_\alpha\leqslant H\leqslant N_\alpha$, to $N_G(H)\leqslant N_\alpha$ zatem $H^* = G_\alpha$. W związku z tym dla pronormalnej podgrupy D rodzina bazowych podgrup G jej wachlarza jest rodziną D-zupełnych podgrup F i dla każdej takiej podgrupy F zachodzi (1).

Ta własność dotyczy nie tylko pronormalnych podgrup.

Definicja: Niech $D\leqslant G$. Jeżeli dla każdej D-zupełnej podgrupy F, $D\leqslant F\leqslant G$ prawdziwa jest równość (1), to D nazywamy polinormalną podgrupą G.

Pojęcie podgrupy polinormalnej zostało wprowadzono przez O. Macedońską w pracy [9].

Zgodnie z tą definicją D jest polinormalną podgrupą G, jeżeli rodzina $\{F, N_G(F)\}$ jest wachlarzem (F przebiega wszystkie D-zupełne podgrupy). Oczywiście dla podgrupy polinormalnej istnieje dokładnie jeden wachlarz. Z definicji wynika bezpośrednio, że podgrupa, która jest jednocześnie subnormalna i polinormalna jest normalna. Jeżeli $D \leqslant G' \leqslant G$ i D jest polinormalna w G, to D jest polinormalna i w G.

Twierdzenie 2. Podgrupa D jest polinormalna w G wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego elementu $x \in G$ mamy

$$D^{\langle D,x\rangle} = D^{D^{\langle D,x\rangle}} \tag{2}$$

innymi słowami, gdy $D^{\langle D,x\rangle}$ jest D-zupełną podgrupą.

Dowód: Z definicji podgrupa D jest polinormalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D^H = D^{D^H} \tag{3}$$

dla dowolnej podgrupy H, $D \leqslant H \leqslant G$.
Oczywiście z (3) wynika (2). Na odwrót, niech $x \in H$ wtedy

$$D^x \leqslant D^{\langle D,x\rangle} = D^{D^{\langle D,x\rangle}} \leqslant D^{D^H}$$

Zatem $D^H \leqslant D^{D^H}$, a ponieważ inkluzja przeciwna jest zawsze prawdziwa, to mamy (3). c.b.d.o.

W języku komutatorów warunek polinormalności podgrupy można zapisać jako inkluzję

$$[D, \langle x\rangle] \leqslant [D, D, [D, \langle x\rangle]]$$

która powinna się spełniać dla dowolnego $x \in G$.
Dla dowodu zauważmy tylko, że $D^H = D[D,H]$, $H \leqslant G$.

W [1] zdefiniowane i badane są podgrupy ściśle wachlarzowe. Z. Borewicz dał jeszcze inną ich definicję i nazwał paranormalnymi [9].

Definicja: Podgrupa D grupy G nazywa się paranormalną, jeżeli dla dowolnego $x \in G$ zachodzi

$$\langle D, D^x\rangle = D^{\langle D, D^x\rangle}$$

to znaczy, gdy dla każdego $x \in G$, $\langle D, D^x\rangle$ jest D-zupełną podgrupą.

W języku komutatorów powyższy warunek można zapisać

$$[D,x] \leq D[D,[D,x]].$$

Jeżeli $D \leq G' \leq G$ i D jest paranormalną w G, to D jest paranormalną w G'.

Ponieważ $D^{<D,x>}$ jest generowana przez podgrupy $<D,D^{x^m}>$, $m \in Z$, to z D-zupełności podgrup $<D,D^x>$ wynika D-zupełność podgrupy $D^{<D,x>}$. Zatem każda podgrupa paranormalna jest polinormalną. Jest oczywiste, że każda podgrupa pronormalna jest paranormalna.

Damy przykład podgrupy wachlarzowej i nie polinormalnej. Rozpatrzmy w grupie S_4 grupę G generowaną przez cykle (12), (1324). Oznaczmy

$$D = <(12)>, \quad N = <(12), (34)>.$$

Ponieważ

$$|G : N| = 2 \quad i \quad |N : D| = 2,$$

to D jest subnormalna w G. Ponieważ D nie jest normalna w G to D nie jest polinormalna w G. D jest natomiast wachlarzowa (podgrupy bazowe to D i G). Kolejnym przykładem jest podgrupa paranormalna nie będąca pronormalną. Rozpatrzmy grupę G generowaną w S_6 przez permutację (12), (126), (34), (345), (14), (25), (36).

Połóżmy $D = <(12), (34), (345)>$ i $H = <(12), (34), (126), (345)>$

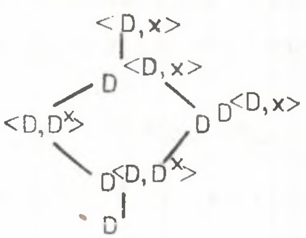
Mamy $\mathcal{L}(D,G) = \{D,H,G\}$ oraz $N_G(D) = D$ i $N_G(H) = G$.

Łatwo sprawdzić, że podgrupa D jest paranormalna. Na mocy twierdzenia 6 z [1] D nie jest pronormalną podgrupą w G.

Pozostaje otwartym <u>problem</u>: czy istnieje podgrupa polinormalna nie będąca paranormalną.

§ 3. <u>Związki między różnymi typami podgrup. Grupy, w których wszystkie podgrupy są polinormalne</u>

Wyżej wymienione typy podgrup (poza podgrupami pronormalnymi) można scharakteryzować używając pewnego diagramu. Niech D będzie podgrupą grupy G i x-elementem G. Rozpatrzymy pewien fragment struktury $\mathcal{L}(D, <D,x>)$:



Może się zdarzyć, że pewne inkluzje (przedstawiono na diagramie kreskami) stają się równościami dla wszystkich $x\in G$. Możemy zatem zdefiniować:

D jest normalna w $G \Longleftrightarrow \bigwedge_{x\in G} D = \langle D, D^x\rangle$,

D jest abnormalna w $G \Longleftrightarrow \bigwedge_{x\in G} \langle D,x\rangle = \langle D, D^x\rangle$,

D jest paranormalna w $G \Longleftrightarrow \bigwedge_{x\in G} D^{\langle D,D^x\rangle} = \langle D, D^x\rangle$,

D jest polinormalna w $G \Longleftrightarrow \bigwedge_{x\in G} D^{D^{\langle D,x\rangle}} = D^{\langle D,x\rangle}$

Zwróćmy uwagę na podgrupy D, które mają własność

$$\bigwedge_{x\in G} D^{\langle D,x\rangle} = \langle D,x\rangle. \tag{4}$$

Dowiedziemy, że (4) jest równoważne temu, że jeżeli $D\leqslant H\leqslant G$ to $N_G(H) = H$. Niech zachodzi (4). Wtedy dla dowolnego $x\in N_G(H)$, mamy $x\in\langle D,x\rangle = D^{\langle D,x\rangle}\leqslant D^{N_G(H)} \leqslant H$, czyli $N_G(H) = H$. Implikacja przeciwna jest oczywista. Podgrupy D, dla których zachodzi (4) nazywamy <u>słabo abnormalnymi</u>. W [8] T.A. Peng udowodnił, że jeżeli D jest słabo abnormalna w G i G jest grupą rozwiązalną skończoną, to D jest abnormalna.

Mówimy, że D jest 2-subnormalna w G, jeżeli istnieje podgrupa H taka, że $D \trianglelefteq H \trianglelefteq G$.

Jeżeli dla D zachodzi

$$\bigwedge_{x\in D} D = D^{\langle D,D^x\rangle}, \tag{5}$$

to jest to równoważne temu, że D jest podgrupą 2-subnormalną w G. Z (5) mamy, że $D = D^{D^G} \trianglelefteq D^G \trianglelefteq G$ czyli D jest 2-subnormalną. Na odwrót, ponieważ $H \trianglelefteq G$, to $D^G \trianglelefteq H$ zatem $D \trianglelefteq D^G$ i dla dowolnego $x\in D$, $D = D^{\langle D,D^x\rangle}$.

Zauważmy, że podgrupy słabo normalne możemy scharakteryzować jako podgrupy o własności

$$\bigwedge_{x\in G} D = D^{\langle D,D^x\rangle} \Longrightarrow D^{\langle D,D^x\rangle} = \langle D,D^x\rangle.$$

Z powyższego wynika, że podgrupy paranormalne są słabo normalne.

Często jest rozpatrywane zadanie charakteryzacji grup na podgrupy, które spełniają pewne warunki. Klasycznym przykładem są grupy Dedekinda, tj. grupy, których wszystkie podgrupy są niezmiennicze.

W pracy [5] opisane są grupy, których wszystkie podgrupy są normalne lub abnormalne. W [4] dana jest charakteryzacja grup, w których każda podgrupa jest subnormalna lub abnormalna.

Prace [7] i [3] poświęcone są skończonym grupom, w których każda podgrupa jest pronormalną. Okazuje się, że są to skończone grupy rozwiązalne, w których każda subnormalna podgrupa jest normalna.

Grupa nazywa się <u>T-grupą</u>, jeżeli w niej relacja normalności jest przechodnią, czyli z $D \trianglelefteq K \trianglelefteq L \leqslant G$ wynika $D \trianglelefteq L$. T-grupy były badane przez wielu autorów.

<u>Twierdzenie 3</u>. Niech G będzie grupą. Wszystkie podgrupy w G są polinormalne wtedy i tylko wtedy, gdy G jest T-grupą.

<u>Dowód</u>: Niech wszystkie podgrupy w G będą polinormalne i niech $D \trianglelefteq K \trianglelefteq L \leqslant G$. Ponieważ D jest polinormalna zachodzi dla niej (3). Mamy więc

$$D^L = D^{D^L} \leqslant D^{K^L} = D^K = D,$$

czyli $D \trianglelefteq L$.

Na odwrót, załóżmy, że G jest T-grupą. Ustalmy podgrupę D. Dla dowolnej podgrupy H, $D \leqslant H \leqslant G$ mamy

$$D^{D^H} \trianglelefteq D^H \trianglelefteq H,$$

zatem $D^{D^H} \trianglelefteq H$.

Ponieważ D^H jest najmniejszym dzielnikiem normalnym w H zawierającym D to $D^H = D^{D^H}$. Dzięki (3) uzyskujemy polinormalność D. c.b.d.o.

W przypadku, gdy G jest grupą skończoną L.Ju. Kołotylina uzyskała bardziej złożone wyniki ([10], tw. 3).

LITERATURA

[1] З.И. БОРЕВИЧ: О расположении подгрупп. Записки Научных Семинаров ЛОМИ АН СССР. Ленинград, т. 94, 1979, с. 5-12.

[2] R.W. CARTER: Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups. Math. Z., 1961, Bd. 75, N. 2, s. 136-139.

[3] C.A. CHAMBERS: p-normally embedded subgroups of finite soluble groups. J.Algebra, 1970, vol. 16, N. 3, p. 442-455.

[4] G. EBERT, S. BAUMAN: A note on subnormal and abnormal Chaine. J. Algebra, 1975, vol. 36, N. 2, p. 287-293.

[5] A. FATTAHI: Groups with only normal and abnormal subgroups. J.Algebra, 1974, vol. 28, N. 1. p. 15-19.

[6] K.H. MÜLLER: Schachnormale Untergruppen eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1966, vol. 36, N. 1, p. 129-157.

[7] T.A. PENG: Finite groups with pronormal subgroups Proc.Amer.Math, Soc., 1969, vol. 20, N. 1, p. 232-234.

[8] T.A. PENG: Pronormality in finite groups. J. London, Math.Soc., 1971, vol. 3, N. 2, p. 301-306.

[9] З.И. БОРЕВИЧ, О.Н. МАЦЕДОНСКАЯ: О решётке подгрупп. Записки Научных Семинаров ЛОМИ АН СССР. Ленинград. т. 103, 1980, с. 13-19.

[10] П.В. ГАВРОН, Л.Ю. КОЛОТИЛИНА: О подгруппах в T-группах. Записки Научных Семинаров ЛОМИ АН СССР. Ленинград, т. 103, 1980, с. 62-65.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕТКИ ПОДГРУПП ДАННОЙ ГРУПЫ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются известные свойства пронормальных и паранормальных подгрупп а также оговаривается понятие веера. Определено новое свойство полинормальности. Представлены связи между отдельными свойствами. Показано, что все подгруппы в данной группе являются полинормальными, ежели и только ежели зависимость нормальности в группе переходна.

CERTAIN PROPERTIES OF THE STRUCTURE OF SUBGROUPS OF A GIVEN GROUP

S u m m a r y

The article concerns the known properties of subgroups to be pronormal or paranormal and the notion of the fan. The new property of the polynormality is defined. The connection of this property with given above is considered. It is shown that all subgroups in a group are polynormal if and only if the relation of normality in the group is transitive.

Recenzent: Doc. dr B. Płonka

Wpłynęło: 15.06.1982 r.