ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Andrzej KASPERSKI

BADANIE ROZWIĄZALNOŚCI NIELINIOWYCH RÓWNAŃ FUNKCYJNYCH W PRZESTRZENI MODULARNEJ

Streszczenie. W pracy wykorzystuje się wyniki prac [1] i [2] do badania rozwiązalności nieliniowego równania funkcyjnego

$$A(x) = F(x)$$

w przestrzeni modularnej X_{ρ_s}, gdzie A i F są nieliniowymi operatorami określonymi na X_{ρ_s}.

Niech μ będzie miarą w σ-algebrze Σ podzbiorów niepustego zbioru Ω i niech $\mathfrak{X}$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji Σ-mierzalnych określonych na Ω i rzeczywistych, w której równość dwóch elementów rozumiemy jako równość μ-prawie wszędzie.

Rozpatrzmy rodzinę modularów zależnych od parametru $t \in \Omega$ tj. rodzinę:

$$\rho : \Omega \times \mathfrak{X} \to [0,\infty]$$

spełniającą warunki:

1) $\rho(t,x)$ jest modularem wypukłym w $\mathfrak{X}$ dla wszystkich $t \in \Omega$
2) jeżeli $\rho(t,x) = 0$ dla μ-prawie wszystkich $t \in \Omega$, to $x = 0$
3) $\rho(t,x)$ jest Σ-mierzalny w Ω dla wszystkich $x \in \mathfrak{X}$.

Oznaczmy

$$X = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \rho(t,\lambda x) \to 0 \text{ przy } \lambda \to 0 \ \mu\text{-pr. wszędzie w } \Omega \right\}$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy ρ do zbioru X, tj. będziemy rozpatrywali $\rho : \Omega \times X \to [0,\infty]$. Niech $\rho_s(x) = \int_\Omega \rho(t,x)d\mu$. Przestrzeń

$$X_{\rho_s} = \left\{ x \in X : \rho_s(\lambda x) \to 0 \text{ przy } \lambda \to 0 \right\}$$

jest przestrzenią modularną, w której

$$\|x\|_{\rho_s} = \inf\left\{ u > 0 : \rho_x\left(\frac{x}{u}\right) \leq 1 \right\}$$

jest normą (patrz [2]).

Twierdzenie 1

Element $x \in X$ należy do X_{ρ_s} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\lambda_0 > 0$ taka, że $\rho_s(\lambda_0 x) < \infty$.

Dowód twierdzenia znajduje się w pracy [2].

Celem naszych rozważań jest rozwiązanie w przestrzeni X równania

$$[A(x)](t) = [F(x)](t) \text{ dla } \mu\text{-pr. wszystkich } t \in \Omega,$$

gdzie:

$$[A(x)](t) = \varkappa \rho(t,x), \ \varkappa \neq 0, \ [F(x)](t) = F_1(t,x), \ F_1 : \Omega \times X \to [-\infty, \infty]$$

oraz spełnia warunek

4) $F_1(t,x)$ jest Σ mierzalny w Ω dla wszystkich $x \in X$.

Założenia 1,2,3,4 obowiązują w całej pracy.

Na wstępie zbadamy kiedy operatory A i F odworozują X_{ρ_s} w siebie, względnie odwzorowują daną kulę w X_{ρ_s} w pewną kulę w X_{ρ_s}. Niech

$$K_{\rho_s}(r) = \left\{ x \in X_{\rho_s} : \|x\|_{\rho_s} \leq r \right\}.$$

Uwaga 1

Twierdzenia 4', 2', 3' cytowane są za pracą [2].

Zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2'

Jeżeli dla każdego $x \in X_{\rho_s}$ i każdego $\lambda_1 > 0$ istnieją liczby $C > 0$ i $\lambda_2 > 0$ takie, że $\rho(t, \lambda_2 \rho(.,x)) \leq C\rho(t, \lambda_1 x)$ μ-prawie wszędzie w Ω, to A odwzorowuje X_{ρ_s} w X_{ρ_s}.

Twierdzenie 2''

Jeżeli dla każdego $x \in X_{\rho_s}$ i każdego $\lambda_1 > 0$ istnieją liczby $C > 0$ i $\lambda_2 > 0$ takie, że $\rho(t, \lambda_2 F_1(.,x)) \leq C\rho(t, \lambda_1 x)$ μ-prawie wszędzie w Ω, to F odwzorowuje X_{ρ_s} w X_{ρ_s}.

Dowód

Całkując nierówność założoną w twierdzeniu otrzymujemy, że $\rho_s(\lambda_2 F(x)) \leq$ $\leq C\rho_s(\lambda_1 x)$. Jeżeli $x \in X_{\rho_s}$, to z twierdzenia 1 mamy, że $\rho_s(\lambda_1 x) < \infty$ przy pewnym $\lambda_1 > 0$. Stąd $\rho_s(\lambda_2 F(x)) < \infty$, a stąd i z twierdzenia 1 $F(x) \in X_{\rho_s}$.

Twierdzenie 3'

Jeżeli $0 < r < \infty$, $0 < R < \infty$ i dla każdego $x \in X_{\rho_s}$ i każdego λ takiego, że $0 < \lambda \leq \frac{1}{R}$ zachodzi $\rho(t, \lambda \varkappa \rho(.,x)) \leq \rho(t, \lambda \frac{R}{r} x)$ dla μ-prawie wszystkich $t \in \Omega$, to A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w $K_{\rho_s}(R)$.

Twierdzenie 3''

Jeżeli $0 < r < \infty$, $0 < R < \infty$ i dla każdego λ takiego, że $0 < \lambda \leq \frac{1}{R}$ oraz dla każdego $x \in X_{\rho_s}$ zachodzi $\rho(t, \lambda F_1(.,x)) \leq \rho(t, \lambda \frac{R}{r} x)$ dla μ-prawie wszystkich $t \in \Omega$, to F odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w $K_{\rho_s}(t)$.

Dowód

Jeżeli spełnione są założenia, to z twierdzenia 1'' mamy, że F odwzorowuje X_{ρ_s} w X_{ρ_s}. Po scałkowaniu nierówności założonej w twierdzeniu otrzymujemy, że $\rho_s(\lambda F(x)) \leq \rho_s(\frac{\lambda R}{r} x)$. W szczególności przy $\lambda = \frac{1}{R}$ mamy $\rho_s(\frac{F(x)}{R}) \leq \rho_s(\frac{x}{r})$. Jeżeli $x \in K_{\rho_s}(r)$, to $\|x\|_{\rho_s} \leq r$, czyli $\rho_s(\frac{x}{r}) \leq 1$, więc $\rho_s(\frac{F(x)}{R}) \leq 1$, stąd $\|F(x)\|_{\rho_s} \leq R$, czyli $F(x) \in K_{\rho_s}(R)$.

Twierdzenie 4'

Niech A spełnia założenia twierdzenia 3' przy $R = r$. Załóżmy ponadto, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego $\eta > 0$ i dla wszystkich $x, y \in K_{\rho_s}(r)$

$$\int_\Omega \rho(t, \frac{A(.,x) - A(.,y)}{\eta\varepsilon}) d\mu \leq \int_\Omega \rho(t, \frac{x - y}{\eta\delta}) d\mu.$$

Wtedy A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w siebie w sposób ciągły.

Twierdzenie 5

Niech F spełnia założenia twierdzenia 3'' przy $R = r$. Załóżmy ponadto, że istnieje taka liczba $\alpha > 0$, że

$$\int_\Omega \rho(t, \frac{F_1(.,x) - F_1(.,y)}{\eta}) d\mu \geq \int_\Omega \rho(t, \frac{x - y}{\frac{\eta}{\alpha}}) d\mu$$

dla każdego $\eta > 0$ i wszystkich $x, y \in K_{\rho_s}(r)$.

Wtedy operator F spełnia nierówność

$$\|F(x) - F(y)\|_{\rho_s} \geq \alpha \|x - y\|_{\rho_s}$$

dla wszystkich $x, y \in K_{\rho_s}(r)$.

Dowód

$$\|F(x) - F(y)\|_{\rho_s} = \inf\left\{\eta > 0 : \int_\Omega \rho(t, \frac{F_1(.,x) - F_1(.,y)}{\eta}) d\mu \leq 1\right\} \geq$$

$$\geq \inf\left\{\eta > 0 : \int_\Omega \rho(t, \frac{x - y}{\frac{\eta}{\alpha}}) d\mu \leq 1\right\} = \alpha \|x - y\|_{\rho_s}.$$

Twierdzenie 6

Niech F spełnia założenia twierdzenia 5, a A założenia twierdzenia 3' dla R = r. Załóżmy, że istnieje $r_o > 0$ takie, że

i) $A(K_{\rho_s}(r_o)) \subset F(K_{\rho_s}(r_o))$

oraz istnieje $q > 0$ takie, że

$$\text{ii)} \int_\Omega \rho\left(t, \frac{\rho(.,x) - \rho(.,y)}{\eta}\right) d\mu \leqslant \max\left\{\int_\Omega \rho\left(t, \frac{x - y}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right) d\mu;\right.$$

$$\int_\Omega \rho\left(t, \frac{x - F^{-1}A(.,x)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right) d\mu; \quad \int_\Omega \rho\left(t, \frac{x - F^{-1}A(.,y)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right) d\mu;$$

$$\left.\int_\Omega \rho\left(t, \frac{y - F^{-1}A(.,x)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right) d\mu; \quad \int_\Omega \rho\left(t, \frac{y - F^{-1}A(.,y)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right) d\mu\right\}$$

dla każdego $\eta > 0$ oraz dla wszystkich $x, y \in K_{\rho_s}(r_o)$.

Wtedy operator A spełnia nierówność

$$\|A(x) - A(y)\|_{\rho_s} \leqslant \alpha q \max\left\{\|x - y\|_{\rho_s}; \quad \|x - F^{-1}A(x)\|_{\rho_s};\right.$$

$$\left.\|x - F^{-1}A(y)\|_{\rho_s}; \ \|y - F^{-1}A(x)\|_{\rho_s}; \ \|y - F^{-1}A(y)\|_{\rho_s}\right.$$

dla wszystkich $x, y \in K_{\rho_s}(r_o)$.

Dowód

Na wstępie zauważmy, że założenie twierdzenia 5 gwarantują istnienie operatora F^{-1}, natomiast założenie i) gwarantuje istnienie operatora $F^{-1}A$ na kuli $K_{\rho_s}(r_o)$. Postępując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 5 oraz wykorzystując założenie ii) otrzymujemy, że

$$\|A(x) - A(y)\|_{\rho_s} = |\varkappa| \inf\left\{\eta > 0 : \int_\Omega \rho\left(t, \frac{\rho(.,x) - \rho(.,y)}{\eta}\right) d\mu \leqslant 1\right\} \leqslant$$

$$|\varkappa| \max\left\{\inf\left\{\eta > 0 : \int_\Omega \rho\left(t, \frac{x - y}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right) d\mu \leqslant 1\right\};\right.$$

$$\inf\left\{\eta > 0 : \int_\Omega \rho\left(t, \frac{x - F^{-1}A(x)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right) d\mu \leqslant 1\right\};$$

$$\inf\left\{\eta>0 : \int_{\Omega}\rho\left(t, \frac{x - F^{-1}A(y)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right)d\mu \leq 1\right\};$$

$$\inf\left\{\eta>0 : \int_{\Omega}\rho\left(t, \frac{y - F^{-1}A(x)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right)d\mu \leq 1\right\};$$

$$\inf\left\{\eta>0 : \int_{\Omega}\rho\left(t, \frac{y - F^{-1}A(y)}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right)d\mu \leq 1\right\}\Bigg\} \leq$$

$$\leq \alpha q \max\Big\{\|x - y\|_{\rho_s}; \|x - F^{-1}A(x)\|_{\rho_s}; \|x - F^{-1}A(y)\|_{\rho_s};$$

$$\|y - F^{-1}A(x)\|_{\rho_s}; \|y - F^{-1}A(y)\|_{\rho_s}\Big\}.$$

Twierdzenie 6'

Niech F spełnia założenia twierdzenia 5, a A założenia twierdzenia 3' dla R = r. Załóżmy, że istnieje $r_o > 0$ takie, że

i) $A(K_{\rho_s}(r_o)) \subset F(K_{\rho_s}(r_o))$

oraz istnieje $q > 0$ takie, że

ii) $$\int_{\Omega}\rho\left(t, \frac{\rho(.,x) - \rho(.,y)}{\eta}\right)d\mu \leq \int_{\Omega}\rho\left(t, \frac{x - y}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha q}}\right)d\mu$$

dla każdego $\eta > 0$ oraz dla wszystkich $x,y \in K_{\rho_s}(r_o)$.

Wtedy operator A spełnia nierówność

$$\|A(x) - A(y)\|_{\rho_s} \leq \alpha q\|x - y\|_{\rho_s}$$

dla wszystkich $x,y \in K_{\rho_s}(r_o)$.

Dowód, jako analogiczny do dowodu twierdzenia 6, pomijamy.

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 6 oraz $q<1$, a X_{ρ_s} jest przestrzenią zupełną, to z twierdzenia Banacha o punkcie stałym otrzymujemy, że równanie $A(x) = F(x)$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie w kuli $K_{\rho_s}(r_o)$.

Wniosek 2

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 6 oraz $q<1$, a X_{ρ_s} jest przestrzenią zupełną, A i F są operatorami nieliniowymi określonymi na X, to równanie $A(x) = F(x)$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie w kuli $K_{\rho_s}(r_o)$ (patrz [1]).

Uwaga 2

Wniosek 2 wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 zawartego w pracy [1], jeżeli zauważymy, że założenie, że operatory A i F są operatorami odwzorowującymi X na X można zastąpić warunkiem i) twierdzenia 6.

Uwaga 3

Wszystkie twierdzenia wypowiedziane w tej pracy pozostaną prawdziwe dla $R = \infty$ (patrz [2]).

Przykład

Niech $\Omega = [0,1]$, μ miara Lebesgue'a na Ω. Niech $\mathfrak{X}$ będzie zbiorem funkcji μ mierzalnych na $[0,1]$, $\mathfrak{X}^+$ będzie zbiorem funkcji μ mierzalnych nieujemnych na $[0,1]$ dla μ- prawie wszystkich $t\in[0,1]$.

Niech

$$\rho(t,x) = \int_0^1 ts\,|x(s)|\,ds,$$

$$F_1(t,x) = \begin{cases} 4\,\dfrac{x(t)+1}{x(t)+2}\,x(t) & \text{dla } x\in\mathfrak{X}^+ \\ 2x(t) & \text{dla } x\in\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}^+ \end{cases}$$

Łatwo widać, że $|F_1(t,x)| \leqslant |4x(t)|$ dla każdego $x\in\mathfrak{X}$. Stąd i z twierdzenia 1 mamy, że jeżeli $x\in X_{\rho_s}$, to $F(x)\in X_{\rho_s}$.

Ponieważ

$$g(u) = \begin{cases} 4\,\dfrac{u+1}{u+2}\,u & \text{dla } u\in[0,\infty] \\ 2u & \text{dla } u\in[-\infty,\ 0) \end{cases}$$

jest funkcją wklęsłą w $[-\infty,\infty]$ oraz $g'(u) \geqslant 2$ dla $u\in[-\infty,\infty]$, więc $|F_1(t,x) - F_1(t,y)| \geqslant 2|x(t) - y(t)|$ dla wszystkich $x,y\in\mathfrak{X}$ $t\in[0,1]$, a stąd $\|F(x) - F(y)\|_{\rho_s} \geqslant 2\|x(t) - y(t)\|_{\rho_s}$ dla wszystkich $x,y\in X_{\rho_s}$. Łatwo zauwa-

żyć, że $F(X_{\rho_s}) = X_{\rho_s}$, $\|A(x) - A(y)\|_{\rho_s} \leq \bar{\alpha}\|x - y\|_{\rho_s}$ dla $|\varkappa| \leq \min(1, \frac{\bar{\alpha}}{3})$ oraz wszystkich $x, y \in X_{\rho_s}$. Czyli dla $\frac{\bar{\alpha}}{2}$ zachodzi twierdzenie 6'. Ponieważ X_{ρ_s} jest przestrzenią zupełną (patrz [2]), więc na podstawie wniosku 1 mamy, że równanie $F(x) = A(x)$ posiada w X_{ρ_s} dokładnie jedno rozwiązanie jeżeli $\frac{\bar{\alpha}}{2} < 1$.

LITERATURA

[1] Ćiric L.: A note on a nonlinear functional equation, Math. Balcanica 3 (1973), 45-47.

[2] Musielak J.: Przestrzenie modularne, Poznań 1978.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДУЛЯРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р е з ю м е

В настоящей работе применены результаты работ [1] и [2] для исследования разрешимости нелинейного функционального уравнения

$$A(x) = F(x)$$

в модулярном пространстве X_{ρ_s} где A и F – нелинейные операторы определенные на X_{ρ_s}.

ON THE INVESTIGATION OF SOLVABILITY OF THE NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS IN A MODULAR SPACE

S u m m a r y

In this paper we apply the results of [1] and [2] to the investigation of solvability of the nonlinear functional equation

$$A(x) = F(x)$$

in a modular space X_{ρ_s}, where A and F are nonlinear operators on X_{ρ_s}.

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 13.05.1982 r.