ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Andrzej KASPERSKI

O PUNKCIE STAŁYM PEWNEGO OPERATORA W PRZESTRZENI MODULARNEJ

Streszczenie. W pracy wykorzystuje się wyniki i metodę pracy [1] do badania rozwiązaności równania funkcyjnego $x(i)=\varkappa\sum_{j=1}^{\infty}k(i,j,|x(j)|)$ w przestrzeni modularnej X_{ρ_s}, gdzie $\rho_s(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k(i,j,|x(j)|)$.

Przedmiotem naszych rozważań będzie równanie

$$x(i) = \varkappa \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|),$$

gdzie:

k: $N\times N\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ jest mierzalna w $N\times N\times[0,+\infty)$,

$k(i,j,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ dla wszystkich $(i,j) \in N \times N$,

$k(i,j,u)$ jest wypukła względem u dla wszystkich $(i,j)\in N\times N$,

$x \in \mathfrak{X}$, gdzie $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią wszystkich ciągów rzeczywistych $\varkappa \neq 0$.

Niech

$$\rho(i,x) = \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|),$$

$$\rho_s(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|)$$

Łatwo zauważyć, że ρ jest modularem wypukłym. Niech

$$X = \left\{x \in \mathfrak{X}: \rho(t,\lambda x) \to 0 \text{ przy } \lambda \to 0 \text{ dla każdego } t \in N\right\}$$

$$X_{\rho_s} = \left\{x \in X : \rho_s(\lambda x) \to 0 \text{ przy } \lambda \to 0\right\}.$$

Przestrzeń X_{ρ_s} jest przestrzenią modularną, w której

$$\|x\|_{\rho_s} = \inf\left\{u>0 : \rho_s\left(\frac{x}{u}\right) \leq 1\right\}$$

jest normą (patrz [1]).

Niech

$$\left[A(x)\right](i) = \varkappa \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|) \quad \text{dla każdego} \quad x \in X_{\rho_s}.$$

Niech

$$K_{\rho_s}(r) = \left\{ x \in X_{\rho_s} : \|x\|_{\rho_s} \leq r \right\}.$$

Oznaczmy przy danym $\beta > 0$:

$$k_1^{\beta}(i,u,v) = \sum_{s=1}^{\infty} k(i,s,\beta k(s,u,v))$$

$$\rho_1^{\beta}(i,x) = \sum_{s=1}^{\infty} k_1^{\beta}(i,s,|x(s)|).$$

<u>Twierdzenie 1</u>

Niech $0<r<\infty$, $0<R<\infty$. Jeżeli:

i) $\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,\frac{|\varkappa|}{R}) < \infty$ dla każdego $i \in N$,

ii) dla każdego $x \in X_{\rho_s}$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje $n(x,\varepsilon) \in N$ takie, że

a) $\sum_{l=1}^{\infty} k(j,l,|x(l)|) \leq \sum_{l=1}^{n(x,\varepsilon)} k(j,l,|x(l)|) + \varepsilon$ dla każdego $j \in N$,

b) $\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\varepsilon}{n(x,\varepsilon)} \rho_1^{\frac{\lambda|\varkappa| n(x,\varepsilon)}{1-\varepsilon}}(i,x) \leq \rho(i, \lambda \frac{R}{r} x)$ dla każdego $i \in N$ oraz $0<\lambda\leq\frac{1}{R}$, gdzie $n(x,\varepsilon)$ spełnia warunek a)

to dla każdego λ takiego, że $0<\lambda\leq\frac{1}{R}$, A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w $K_{\rho_s}(R)$.

Dowód

Niech $x \in X_{\rho_s}$ oraz $0 < \lambda \leq \frac{1}{R}$. Wykorzystując założenie ii a) z wypukłości funkcji k dla $\varepsilon < 1$ otrzymamy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in N$

$$(1)\ \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,\lambda|\varkappa| \sum_{l=1}^{\infty} k(j,l,|x(l)|)) \leq$$

$$\leq (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,\frac{\lambda|\varkappa|}{1-\varepsilon}\sum_{l=1}^{n} k(j,l,|x(l)|)) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,\lambda|\varkappa|)$$

Stosując nierówność Jensena do pierwszego składnika tej sumy otrzymamy

$$(2)\ (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,\frac{\lambda|\varkappa|}{1-\varepsilon}\sum_{l=1}^{n} k(j,l,|x(l)|)) \leq$$

$$\leq \frac{1-\varepsilon}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} k(i,j,\frac{\lambda|\varkappa|n}{1-\varepsilon}k(j,l,|x(l)|)) \leq$$

$$\leq \frac{1-\varepsilon}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} k(i,j,\frac{\lambda|\varkappa|n}{1-\varepsilon}k(j,l,|x(l)|)).$$

Z (1), (2), ii b) otrzymamy

$$(3)\ \rho(i,\lambda\varkappa\rho(\cdot,x)) \leq \frac{1-\varepsilon}{n}\rho_1^{\frac{\lambda|\varkappa|n}{1-\varepsilon}}(i,x) + \varepsilon\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,\lambda|\varkappa|)$$

Przechodząc w (3) do granicy przy $\varepsilon \to 0$, wykorzystując i) oraz ii b) otrzymamy

$$(4)\ \rho(i,\lambda\varkappa\rho(\cdot,x)) \leq \rho(i,\lambda\frac{R}{r}x) \quad \text{dla każdego } i \in N.$$

Stąd (patrz [1] twierdzenie 15.2b) otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 2

Niech ρ spełnia założenia twierdzenia 1 przy r = R. Załóżmy ponadto, że:

$$\text{i)}\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,1) < \infty$$

ii) dla każdego $\varepsilon_1 > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $x,y \in X_{\rho_s}$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n(x,y,\varepsilon) \in N$ takie, że

$$\left| \sum_{l=1}^{\infty} k(j,l,|x(l)|) - \sum_{l=1}^{\infty} k(j,l,|y(l)|) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n(x,y,\varepsilon)} |k(j,l,|x(l)|) - k(j,l,|y(l)|)| + \varepsilon \quad \text{dla każdego} \quad j \in N,$$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\varepsilon}{n(x,y,\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k(i,j, \frac{n(x,y,\varepsilon)}{(1-\varepsilon)\eta\varepsilon_1} |k(j,l,|x(l)|) -$$

$$- k(j,l,|y(l)|)|) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j, \frac{|x(l) - y(l)|}{|\varkappa| \eta \delta})$$

dla wszystkich $x,y \in K_{\rho_s}(r)$ oraz każdego $\eta > 0$.

Wówczas A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w siebie w sposób ciągły.

Dowód

Niech $x,y \in K_{\rho_s}(r)$, $\eta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$. Z warunku ii) otrzymamy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in N$, że

$$(1) \quad \left| \sum_{l=1}^{\infty} k(j,l,|x(l)|) - \sum_{l=1}^{\infty} k(j,l,|y(l)|) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n} |k(j,l,|x(l)|) - k(j,l,|y(l)|)| + \eta\varepsilon\varepsilon_1.$$

Wykorzystując wypukłość funkcji k otrzymamy dla $\varepsilon < 1$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho(i, \frac{\varrho(\cdot,x) - \varrho(\cdot,y)}{\eta\varepsilon_1} \leq \frac{1-\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k(i,j, \frac{n}{(1-\varepsilon)\eta\varepsilon_1}$$

$$|k(j,l,|x(l)|) - k(j,l,|y(l)|)|) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,1).$$

Przechodząc w (2) do granicy przy $\varepsilon \to 0$, z założenia ii) mamy

$$(3)\ \sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(i,\ \frac{\rho(\cdot,x)-\rho(\cdot,y)}{\eta\ \varepsilon_1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(i,\ \frac{x-y}{\varkappa\eta\delta}\right).$$

Stąd (patrz twierdzenie 15.3 [1]) mamy, że A jest ciągły w $K_{\rho_s}(r)$.

Twierdzenie 3

Niech spełnione będą założenia twierdzeń 1 i 2 przy $R = r$. Jeżeli istnieje $\alpha > 0$, że dla wszystkich $x,y\in K_{\rho_s}(r)$ oraz dla każdego $\eta > 0$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon}{n(x,y,\varepsilon)}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}k\left(i,j,\ \frac{n(x,y,\varepsilon)}{(1-\varepsilon)\eta}\Big|k(j,l,|x(l)|)\right.$$

$$\left.-\,k(j,l,|y(l)|)\Big|\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(i,\ \frac{\frac{x-y}{\varkappa\eta}}{\alpha}\right),$$

gdzie $n(x,y,\varepsilon)$ spełnia założenie ii) twierdzenia 2, to

$$\|A(x)-A(y)\|_{\rho_s}\leqslant\alpha\|x-y\|_{\rho_s}\quad \text{dla wszystkich}\quad x,y\in K_{\rho_s}(r)$$

Dowód

Rozumując jak w dowodzie twierdzenia 2 przy $\varepsilon_1 = 1$, otrzymamy

$$(1)\ \sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(i,\ \frac{\rho(\cdot,x)-\rho(\cdot,y)}{\eta}\right)\leqslant\frac{1-\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}k\left(i,j,\ \frac{n}{(1-\varepsilon)\eta}\right.$$

$$\left.\Big|k(j,l,|x(l)|)-k(j,l,|y(l)|)\Big|\right)+\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k(i,j,1)$$

dla każdego $\eta > 0$ oraz dla wszystkich $x,y\in K_{\rho_s}(r)$.
Przechodząc w (1) do granicy przy $\varepsilon\to 0$ otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(i,\ \frac{\rho(\cdot,x)-\rho(\cdot,y)}{\eta}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(i,\ \frac{\frac{x-y}{\varkappa\eta}}{\alpha}\right)$$

dla każdego $\eta > 0$ oraz dla wszystkich $x,y\in K_{\rho_s}(r)$.
Stąd (na podstawie twierdzenia 15.4 [1])) otrzymujemy tezę.

Lemat 1

Jeżeli $\sum_{i=1}^{\infty} k(i,j,u) > 0$ dla każdego $u > 0$ oraz dla każdego $j \in N$, to przestrzeń X_{ρ_s} z normą $\|\cdot\|_{\rho_s}$ jest przestrzenią zupełną.

Dowód

Lemat jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia 14.4 [1].

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3 oraz lematu 1, to równanie $x(i) = \varkappa \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|)$ ma w kuli $K_{\rho_s}(r)$ dokładnie jedno rozwiązanie $x = 0$.

Uwaga 1

Założenia i) w twierdzeniach 1 i 2 można osłabić. Wystarczy założyć, że $k(i,j,\frac{|\varkappa|}{R}) < \infty$ dla wszystkich $i,j \in N$ oraz $k(i,j,1) < \infty$ dla wszystkich $i,j \in N$. Istotnie, możemy przyjąć $\varepsilon = \bar{\varepsilon}\, \varepsilon_{ij}$ przy czym ε_{ij} dobieramy tak aby $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{ij} k(i,j,\frac{|\varkappa|}{R}) < \infty$ dla każdego $i \in N$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{ij} k(i,j,1) < \infty$.

Uwaga 2

Twierdzenia 1, 2, 3 pozostaną prawdziwe przy $R = r$ jeżeli założymy, że warunek ii) twierdzenia 2 jest spełniony dla każdego $\lambda \in (0,\lambda_0]$, $\lambda_0 > 0$, a warunek i) ma postać $\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,\lambda_0|\varkappa|) < \infty$ dla każdego $i \in N$.

Uwaga 3

Dla $k(i,j,u) = a_{ij}\varphi(u)$, gdzie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ oraz φ jest funkcją wypukłą, można podać inne warunki, w oparciu o uogólnioną nierówność Jensena, przy czym można je będzie stosować w przypadku, gdy nie będzie można stosować twierdzeń 1, 2, 3.

Twierdzenie 1'

Niech $\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl} \leqslant M$ dla każdego $j \in N$, $0 < r < \infty$, $0 < R < \infty$. Wtedy, dla każdego $\varkappa$ takiego, że

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} a_{il}\varphi(M\lambda|\varkappa x(l)|)}{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}} \leqslant \rho(i,\lambda \tfrac{R}{r}\, x)$$

dla każdego $x \in X_{\rho_s}$, $0 < \lambda \leq \frac{1}{R}$, każdego $i \in N$, A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w $K_{\rho_s}(R)$.

Dowód

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 1 wystarczy wykazać, że $\rho(i,\lambda\varkappa\rho(\cdot,x)) \leq \rho(i,\lambda \frac{R}{r} x)$ dla każdego $x \in X_{\rho_s}$, każdego $i \in N$ oraz każdego λ takiego, że $0 < \lambda \leq \frac{1}{R}$.

Niech $x \in X_{\rho_s}$, $0 < \lambda \leq \frac{1}{R}$ i zachodzi (*). Stosując uogólnioną nierówność Jensena otrzymamy

$$\rho(i,\lambda\varkappa\rho(\cdot,x)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}\varphi(\lambda|\varkappa M x(l)|)}{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}} \leq \rho(i, \lambda \frac{R}{r} x).$$

Twierdzenie 2'

Niech spełnione będą założenia twierdzenia 1' przy R = r i niech $\varkappa$ spełnia (*). Niech ponadto, dla każdego $\beta > 0$ istnieje $\gamma > 0$ takie, że dla każdego $i \in N$ oraz dla wszystkich $x,y \in K_{\rho_s}(r)$ zachodzi nierówność

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}\varphi\left(\left|\frac{x(l)-y(l)}{\beta}\right|\right)}{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}} \leq \rho(i, \frac{x-y}{\gamma})$$

Wtedy A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w $K_{\rho_s}(r)$ w sposób ciągły.

Dowód

Niech $\beta = \frac{\eta\varepsilon}{M}$, $\gamma = \delta\eta|\varkappa|$, $\eta > 0$. Stosując uogólnioną nierówność Jensena otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\rho(i, \frac{\rho(\cdot,x)-\rho(\cdot,y)}{\eta\varepsilon}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}\varphi(\frac{M|x(l)-y(l)|}{\eta\varepsilon})}{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\rho(i, \frac{x-y}{\varkappa\eta\delta}).$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 2 wnosimy stąd,że operator A jest ciągły.

Twierdzenie 3'

Niech spełnione będą założenia twierdzenia 1' przy R = r i niech $\varkappa$ spełnia (*). Niech istnieje $\alpha > 0$, że dla wszystkich $x,y \in K_{\rho_s}(r)$, każdego $\eta > 0$ oraz dla każdego $i \in N$ zachodzi nierówność

$$(***)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}\varphi\left(M \frac{|x(l) - y(l)|}{\eta}\right)}{\sum_{l=1}^{\infty} a_{jl}} \leqslant \rho\left(i, \frac{x - y}{\frac{\varkappa\eta}{\alpha}}\right).$$

Wtedy $\|A(x) - A(y)\|_{\rho_s} \leqslant \alpha \|x - y\|_{\rho_s}$ dla wszystkich $x,y \in K_{\rho_s}(r)$.

Dowód jako analogiczny do dowodu twierdzeń 3 i 2' pomijamy.

Wniosek 1'

Jeżeli istnieje $i \in N$ takie, że $a_{ij} > 0$ dla każdego $j \in N$ oraz spełnione są założenia twierdzenia 3', a $\alpha < 1$, to równanie

$$x(i) = \varkappa \sum_{j=1} a_{ij}\varphi(|x(j)|)$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie w kuli $K_{\rho_s}(r)$.

Uwaga 4

Jeżeli $k(i,j,u) = a_{ij}u$, $a_{ij} \geqslant 0$ dla wszystkich $i,j \in N$, to twierdzenia 1,2,3 można znacznie uprościć. Łatwo zauważyć, że

$$x \in X_{\rho_s} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}|x(j)| < \infty .$$

Istotnie

$$x \in X_{\rho_s} \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0} \rho_s(\lambda x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}|x(j)| \lim_{\lambda\to 0} |\lambda| =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}|x(j)| < \infty$$

Twierdzenie 1″

Jeżeli [R] $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} a_{jl} \leq \frac{R}{r} a_{il}$ dla wszystkich $i,l \in N$, to A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w $K_{\rho_s}(R)$.

Twierdzenie 2″

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 1″ przy $R = r$, to A odwzorowuje $K_{\rho_s}(r)$ w $K_{\rho_s}(r)$ w sposób ciągły.

Twierdzenie 3″

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 1″ przy $R = r$, oraz istnieje $\sigma > 0$ taki, że dla wszystkich $i,j \in N$ $\sum_{l=1}^{\infty} a_{il} a_{lj} \leq \frac{\sigma}{|\varkappa|} a_{ij}$, to $\| A(x) - A(y) \|_{\rho_s} \leq \sigma \| x - y \|_{\rho_s}$ dla wszystkich $x,y \in K_{\rho_s}(r)$.

Przykład 1

Niech $k(i,j,u) = (\frac{1}{3})^{i} (\frac{1}{2})^{j} u$. Wtedy

$$\rho(i,x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{i+j} |x(j)|, \quad \rho_s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{j} |x(j)| .$$

$$\varphi(i,\lambda,\varkappa\rho(\cdot,x)) = \frac{1}{3}\lambda|\varkappa| \sum_{j=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{i+j} |x(j)| \leq \rho(i,\lambda x)$$

dla każdego $x \in X_{\rho_s}$, $\frac{1}{3}|\varkappa| \leq 1$. Stąd $|\varkappa| \leq 3$.

Łatwo sprawdzić, że twierdzenie 3″ zachodzi dla $\sigma \geq \frac{|\varkappa|}{3}$ czyli, jeżeli $\frac{|\varkappa|}{3} < 1$, to równanie $x(i) - \varkappa \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{i+j} |x(j)|$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie równe 0 w przestrzeni X_{ρ_s}.

Przykład 2

Niech $k(i,j,u) = a_{ij}\varphi(u)$, gdzie

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u & \text{dla } u \in [0,2] \\ u-1 & \text{dla } u \in (2,3] \\ 2u-4 & \text{dla } u > 3, \end{cases}$$

$$a_{ij} = (\tfrac{1}{2})^{i+j} .$$

Zauważmy, że: spełnione jest założenie i) twierdzenia 1 i 2, założenie ii a) twierdzenia 1 jest spełnione, bo

$$2a_{ij}u \geqslant a_{ij}\varphi(u) \geqslant \frac{1}{2}\, a_{ij}u,$$

założenie ii b) twierdzenia 1 będzie miało postać

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon}{n} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}a_{jl}\varphi\left(\frac{n}{1-\varepsilon}\lambda \left|\varkappa x(l)\right|\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\varphi\left(\lambda\, \frac{R}{r}\left|x(j)\right|\right),$$

czyli

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon}{n} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{j}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{l}\varphi\left(\left|\frac{n}{1-\varepsilon}\lambda\varkappa\, x(l)\right|\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+j}\varphi\left(\lambda\,\frac{R}{r}\left|x(j)\right|\right)$$

stąd

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon}{3n} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+j}\varphi\left(\frac{n}{1-\varepsilon}\lambda\left|\varkappa\, x(j)\right|\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+j}\varphi\left(\lambda\,\frac{R}{r}\left|x(j)\right|\right),$$

więc $\frac{2}{3}\lambda\left|\varkappa\right| \leqslant \lambda\frac{R}{r}$, czyli $\left|\varkappa\right| \leqslant \frac{3R}{2r}$, skąd dla $R = r$, $\left|\varkappa\right| \leqslant \frac{3}{2}$, twierdzenie 3 jest spełnione dla $\left|\varkappa\right| \leqslant q$, czyli dla $\left|\varkappa\right| < \frac{3}{2}$ równanie $x(i) = \varkappa \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}\varphi\left(\left|x(j)\right|\right)$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie równe 0 w przestrzeni X_{φ_s}.

Przykład 3

Niech $k(i,j,u) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}u^{2}$.

Łatwo sprawdzić, że warunek ii b) twierdzenia 1 nie jest spełniony dla $\varkappa \neq 0$. Mamy jednak $\sum_{j=1}^{\infty} a_{lj} \leqslant \frac{1}{4}$ dla każdego $l \in N$, stąd $M = \frac{1}{4}$.

Warunek (*) ma postać

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{i}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\lambda^{2}\varkappa^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{l}\left|x(l)\right|\right)^{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}} =$$

$$= \frac{1}{16}\lambda^2\varkappa^2 \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^l |x(l)|^2 \leqslant \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^l |x(l)|^2$$

Skąd $\varkappa^2 \leqslant 16\left(\frac{R}{r}\right)^2$, czyli $|\varkappa| \leqslant 4\,\frac{R}{r}$, więc dla $R = r$, $|\varkappa| \leqslant 4$. Warunek (***) wymaga nierówności $\frac{1}{16} \leqslant \left(\frac{\alpha}{\varkappa}\right)^2$, czyli $|\varkappa| \leqslant 4\alpha$, stąd dla $|\varkappa| < 4$ równanie

$$x(i) = \varkappa \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^j |x(j)|^2$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie równe 0 w przestrzeni X_{ρ_s}.

LITERATURA

[1] Musielak J.: Przestrzenie modularne, Poznań 1978.

ВОПРОС О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ НЕКОТОРОГО ОПЕРАТОРА
В МОДУЛЯРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р е з ю м е

В настоящей работе применены результаты и метод работы [1] для исследования разрешимости функционального уравнения $x(i) = \varkappa \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|)$ в модулярном пространстве X_{ρ_s}, где $\rho_s(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|)$.

ON A FIXED POINT OF A CERTAIN OPERATOR IN A MODULAR SPACE

S u m m a r y

In this paper we apply the results of [1] to the investigation of solvability of the equation $x(i) = \varkappa \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|)$ in the modular space X_{ρ_s}, where $\rho_s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k(i,j,|x(j)|)$.

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 13.05.1982 r.