ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Marian PALEJ, Anna POGONOWSKA

O DALSZYCH ZASTOSOWANIACH PEWNEGO PRZEKSZTAŁCENIA PŁASKIEGO

Streszczenie. Praca zawiera rozwinięcie artykułu pt. "O własności pasma stożkowych wynikającej z pewnego przekształcenia płaskiego", opublikowanego w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej s. Matematyka-Fizyka z. 35 (1979). Przedstawione w niej zastosowanie dualnego przekształcenia kwadratowego elementów płaszczyzny do dowodu istnienia, tzw. stożkowej dziewięciu punktów oraz uogólnienia własności pasma stożkowych.

W pracy [1] przedstawiono podstawowe własności przekształcenia płaszczyzny na siebie opartego o następujące założenia: dane są dwie tzw. proste bazy p_1 i p_2 oraz dwa różne punkty - środki rzutów S_1, S_2 spełniające warunki: $S_1 \notin p_1$, $S_2 \notin p_2$. Dowolnemu punktowi A płaszczyzny przyporządkowuje się prostą a przechodzącą przez rzuty tego punktu z środków S_1, S_2 odpowiednio na proste p_1 i p_2. Wykazano, że obrazem dowolnie położonej prostej w tym przekształceniu jest stożkowa, a dowolnego pęku prostych - pasmo stożkowych. Wskazano na możliwość zastosowania tego przekształcenia do dowodu jednego z twierdzeń dotyczących pasma stożkowych.

W pracy niniejszej podjęto próbę szerszego wykorzystania omawianego przekształcenia do ujawnienia własności pasma stożkowych.

Zwróćmy uwagę na własność przekształcenia wyrażoną następującym twierdzeniem:

Twierdzenie 1

Praobrazem pęku prostych jest stożkowa.

Dowód: (rys. 1)

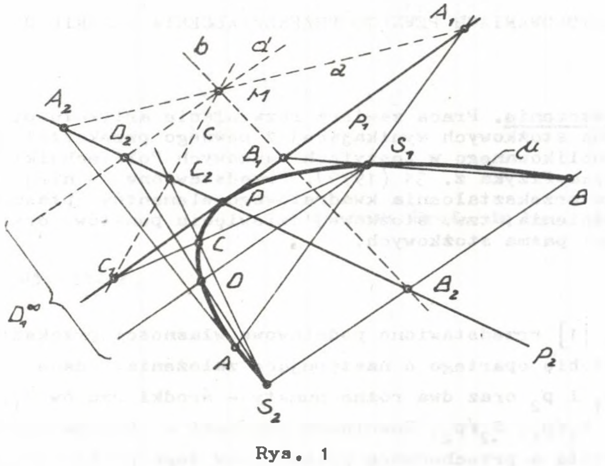
Proste pęku $M(a,b,c \ldots)$ przecinają proste bazy w szeregach punktów $p_1(A_1, B_1 \ldots)$, $p_2(A_2, B_2 \ldots)$. W konstrukcji praobrazów prostych a, b, c punkty szeregu (p_1) rzutujemy z środka S_1 a punkty szeregu (p_2) - z środka S_2.

Oczywiste są zależności:

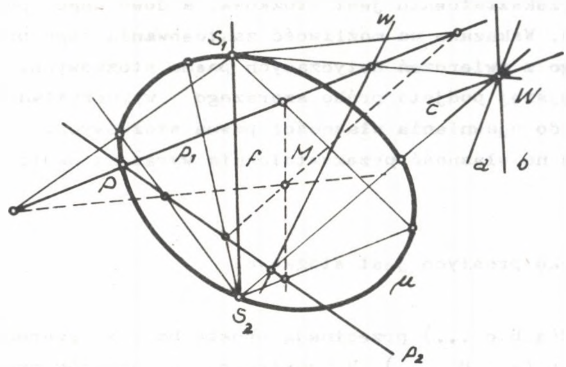
$$(p_1) \overline{\wedge} (p_2) \tag{1}$$

$$(S_1) \overline{\wedge} (S_2) \tag{2}$$

Punkty przecięcia par odpowiednich promieni pęków (S_1) i (S_2) są praobrazami prostych pęku (M) i wobec relacji (2) leżą na stożkowej c.n.d. Zauważmy jeszcze, że dla $M = S_1$ lub $M = S_2$ stożkowa μ degeneruje się do prostych p_1 lub p_2 i $f = S_1S_2$.



Rys. 1



Rys. 2

Przeprowadźmy z kolei następujące rozumowanie. Niech dany będzie dowolny punkt M oraz pasmo stożkowych o prostych podstawowych p_1, p_2, f, w. Rozważmy styczne do stożkowych pasma przechodzące przez punkt M. Wśród nieskończenie wielu tych stycznych (z których każda wraz z prostymi podstawowymi określa poszczególną stożkową pasma) istnieją takie, które z stożkowymi pasma stykają się w tym samym punkcie M. Z twierdzenia o pęku stożkowych można wnosić, że styczne takie są dwie, przy czym mogą one być różne, rzeczywiste lub urojone a także mogą się jednoczyć. Istotnie bowiem jest to zagadnienie dwoiste do stożkowych pęku, stycznych do dowolnie danej prostej m.

Pokażemy jak przy pomocy rozpatrywanego przekształcenia można przeprowadzić dowód powyższej własności pasma stożkowych. Rozważmy w tym celu (rys. 2) praobraz pasma stożkowych, którym jest (1) pęk prostych (W). Skonstruujemy stożkową μ stanowiącą zgodnie z twierdzeniem 1 praobraz pęku prostych o środku M. Poszczególne proste pęku (W) a,b,c, ... przecinają tę stożkową w dwóch punktach, których obrazami są styczne stożkowych pasma α, β, γ... przynależne do punktu M. Weźmy pod uwagę styczne do stożkowej μ przechodzące przez punkt W. Każda z nich zawiera tylko jeden punkt wspólny z stożkową μ, co oznacza, że w przekształceniu odpowie im para stożkowych pasma, których styczne przechodzące przez punkt M ulegają zjednoczeniu. Ponieważ z punktu W wychodzą dwie styczne do stożkowej - istnieć będą dwie stożkowe o powyższej własności, tj. dwie stożkowe pasma przynależne do punktu M, co należało udowodnić.

Rozumowanie powyższe narzuca jednocześnie sposób postępowania przy efektywnej konstrukcji stożkowych pasma przechodzących przez dany punkt M. W tym celu wystarczy uważać dwie dowolne spośród czterech prostych podstawowych za proste bazy p_1, p_2, trzecią - za oś f, na której dowolnie przyjąć można środki rzutów S_1, S_2, a czwartą - za obraz środka pęku prostych W, którego oryginał jest tą drogą ściśle określony. Następnie z środka W należy skonstruować styczne do stożkowej μ będącej praobrazem pęku prostych o środku M. Punkty styczności tych stycznych przekształcają się na proste, które stanowią styczne do szukanych stożkowych w punkcie M.

Dla dalszych rozważań udowodnimy kolejną własność rozpatrywanego przekształcenia:

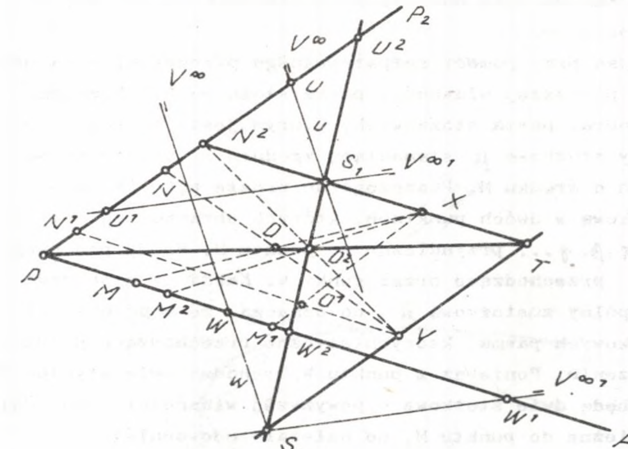
<u>Twierdzenie 2</u>

Praobrazem pęków prostych o środkach współliniowych jest pęk stożkowych.

<u>Dowód</u>

Rozpatrzmy pęki o środkach M, N, R leżących na prostej q. Stożkowe stanowiące praobrazy tych pęków przechodzą przez środki S_1, S_2 jako wierzchołki tworzących je pęków prostych oraz przez punkt P należący do obydwu szeregów (p_1), (p_2) a zatem i do obydwu pęków (S_1), (S_2).
Tak więc stożkowe μ, ν i ρ jako praobrazy (M), (N), (R), mają z sobą powyższe trzy punkty wspólne. Jeżeli ponadto M, N, R leżą na prostej q - praobraz tej prostej, punkt Q winien należeć do praobrazów pęków (M), (N), (R). Jest to czwarty uzasadniający twierdzenie punkt wspólny stożkowych μ, ν, ρ.

Weźmy z kolei pod uwagę praobraz Σ pęków prostych równoległych, tj. takich, których środki leżą na prostej niewłaściwej t^{∞}. Zgodnie z powyższym twierdzeniem, jest nim pęk stożkowych o punktach podstawowych S_1, S_2, P i T, gdy T jest praobrazem prostej niewłaściwej t^{∞} (rys. 3).



Rys. 3

Wybierzmy dowolny punkt niewłaściwy V^{∞} oraz przechodzące przezeń promienie pęków (S_1), (S_2) - u, w. Zauważmy, co wynika z założeń konstrukcji, że praobrazy tych promieni, punkty U, W spełniają warunki: $U \in p_2$, $W \in p_1$. Wyznaczmy środek stożkowej przechodzącej przez punkty S_1, S_2, P, T, U i W, tj. stanowiącej praobraz pęku (V^{∞}). Wystarczy w tym celu społowić równoległe do siebie cięciwy TS_1, PW oraz TS_2, PU. Otrzymane w ten sposób średnice XM i YN przecinają się w punkcie O stanowiącym środek rozpatrywanej stożkowej.

Załóżmy z kolei, że punkt V^{∞} obiega prostą niewłaściwą zajmując kolejne położenie $V^{\infty 1}$, $V^{\infty 2}$ ... . Rozpatrzmy praobrazy pęków $(V^{\infty 1})$, $(V^{\infty 2})$ ... Będą to stożkowe α, β, γ ... należące do pęku o punktach podstawowych S_1, S_2, P, T. Postępując jak wyżej otrzymujemy na prostych p_1, p_2 szeregi o elementach W, W^1, W^2 ... i U, U^1, U^2 ... z zachowaniem relacji:

$$p_1(W, W^1, W^2 \ldots) \overline{\wedge}\, t^{\infty}(V^{\infty}, V^{\infty 1}) \overline{\wedge}\, p_2(U, U^1, U^2 \ldots) \qquad (3)$$

Zachodzi również:

$$p_1(M, M^1, M^2 \ldots) \overline{\wedge}\, p_1(W, W^1, W^2 \ldots)$$

$$p_2(U, U^1, U^2 \ldots) \overline{\wedge}\, p_2(N, N^1, N^2 \ldots) \qquad (4)$$

gdy M^1, M^2 ... N^1, N^2 ... są środkami odpowiednich cięciw PW^i i PU^i.

Wynika stąd rzutowość:

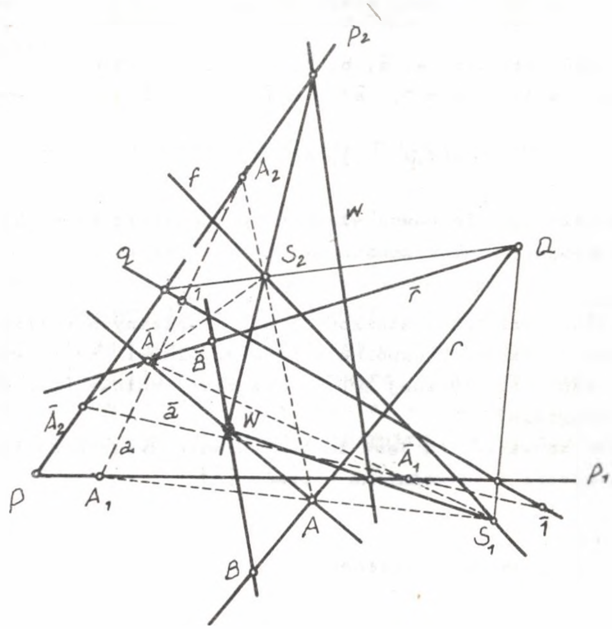
$$(XM^i) \,\overline{\wedge}\, (YN^i) \tag{5}$$

a w rezultacie następujący wniosek:
"Środki stożkowych α, β, γ ... pęku o punktach podstawowych S_1, S_2, P, T leżą na stożkowej".
Jest natychmiast widoczne, że stożkowa ta przechodzi przez:
1) punkty X i Y - środki odcinków TS_1 i TS_2 - jako wierzchołki pęków (X), (Y)

oraz

2) punkt $O^2 = PT \cap S_1S_2$.

Ta ostatnia relacja wynika, jak to łatwo zauważyć z jednokładności trójkątów O^2TS_2 i O^2PU^2 oraz O^2TS_1 i O^2PW^2, w której środkowe odpowiadających sobie boków - proste XM^2 i YN^2 - przechodzą przez środek O^2.
Zauważmy, że dla czworokąta zupełnego o punktach podstawowych S_1, S_2, P, T środki odcinków TS_1, TS_2 są środkami jego dwóch boków, a punkt O^2 - jednym z punktów przekątnych.
Zauważmy wreszcie, że dla danej czwórki punktów podstawowych "rolę" środków rzutów S_1, S_2 oraz punktu węzłowego P możemy widzieć zamiennie, tj. dowolne dwa spośród nich uznać za S_1, S_2 a jeden z pozostałych - za punkt węzłowy P. Wówczas powtarzając powyższe rozumowanie dochodzimy do wniosku,



Rys. 4

że stożkowa, której każdy punkt jest środkiem jednej z stożkowych pęku przechodzi przez środki wszystkich boków oraz przez wszystkie trzy punkty przekątne czworokąta zupełnego utworzonego z punktów podstawowych pęku. Jest to tzw. stożkowa dziewięciu punktów, której istnienia dowodzi się w literaturze [2], [3] na zupełnej innej drodze.

Rozważmy jeszcze jeden przykład zastosowania omawianego przekształcenia do dowodu pewnej własności pasma [4].

Niech dany będzie (rys. 4) dowolny pęk prostych o środku (W) i odpowiadające mu w przekształceniu pasmo stożkowych o prostych podstawowych p_1, p_2, f oraz w, gdzie prosta w jest obrazem punktu W. Przetnijmy pęk (W) dowolnymi dwiema prostymi r, $\bar{r}$.
Otrzymujemy szeregi:

$$r(A,\ B,\ C\ \ldots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ \bar{r}(\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}\ \ldots) \tag{6}$$

Rozważmy obrazy prostych r i $\bar{r}$ - są nimi stożkowe ρ i $\bar{\rho}$, z których każda zawiera proste podstawowe pasma p_1, p_2, f. Stożkowe te oprócz wspólnych stycznych p_1, p_2, f, mają jeszcze wspólną czwartą styczną - prostą q (stanowiącą obraz punktu $Q = r \cap \bar{r}$). Weźmy z kolei pod uwagę obrazy punktów A, B, C ... oraz $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ ... Z zasady przekształcenia wynika, że wyznaczające je pary punktów, np. $A_1\ A_2$, $B_1\ B_2$ ... są elementami rzutowych szeregów (p_1), (p_2). Proste $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2$ ... ($\bar{a} = \bar{A}_1\bar{A}_2$, $\bar{b} = \bar{B}_1\bar{B}_2$ ...) generują na dowolnej stycznej stożkowej ρ ($\bar{\rho}$) szeregi rzutowe do (p_1) i (p_2).
Przetnijmy zbiór prostych a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$, c, $\bar{c}$ ... styczną q. Przyjmując oznaczenia $a \cap q = 1$, $b \cap q = 2$, $\bar{a} \cap q = \bar{1}$, $\bar{b} \cap q = \bar{2}$ ... otrzymujemy:

$$q(1,2\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ q(\bar{1},\bar{2}\ \ldots) \tag{7}$$

Relacja powyższa ujawnia pewną własność pasma stożkowych, którą można wyrazić w następującym twierdzeniu.

<u>Twierdzenie 3</u>

Styczne dowolnych dwóch stożkowych ρ i $\bar{\rho}$ wpisanych w trzy proste podstawowe pasma stożkowych, wspólne z poszczególnymi stożkowymi tego pasma wycinają na wspólnej stycznej $\rho \cap \bar{\rho}$ szeregi rzutowe (tworzą rzutowe pęki stopnia drugiego).

Nie trudno zauważyć, że jest to twierdzenie dwoiste do tego, jakie zostało wyprowadzone i udowodnione w pracy [4].

LITERATURA

[1] M. Palej, A. Pogonowska: O własności pasma stożkowych wynikającej z pewnego przekształcenia płaskiego, ZN Pol. Śląskiej s. Matematyka-Fizyka z.35, Gliwice 1979.

[2] H.S. Cexeter: Diejstwitielnaja projektiwnaja płoskost. Tłum. z ang. - Moskwa 1955, s. 170.

[3] E. Pascal: Repertoryum matematyki wyższej. Tom II. Geometrya Warszawa 1901, s. 711.

[4] M. Palej: Uogólnienie twierdzenia o pewnej własności pęku stożkowych. Materiały ogólnopolskiej konferencji naukowo-dydaktycznej geometrii rzutowej i wykreślnej. Kielce 1979.

ВОПРОС О ДАЛЬНЕЙШЕМ ПРИМЕНЕНИИ
НЕКОТОРОГО ПЛОСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Р е з ю м е

Настоящая работа содержит развитие статьи "Вопрос о свойстве полосы конических сечений следующих из некоторого плоского преобразования" опубликованного в Научных тетрадях Силезского института, математико-физическая специальность № 35 (1979).

В работе представлено применение двойственного квадратического преобразования элементов плоскости для доказательства существования так называемого конического сечения девяти точек, а также для обобщения свойства полосы конических сечений.

ON FURTHER APPLICATION OF A CERTAIN PLANAR TRANSFORMATION

S u m m a r y

The paper includes the amplification of the article entitled: "On the property of a band of conics resulting from a certain planar transformation" published in Zeszyty Naukowe (Scientific Papers) of the Silesian Technical University speciality Mathematics - Physics z. 35 (1979). This paper presents the application of dual square transformation of the elements of a plane to the proof of existence of the so-called conic of nine points as well as the generalizations concerning the properties of a band of conics.

Recenzent: Doc. dr hab. Konrad Dyba

Wpłynęło: 29.05.1981 r.