ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

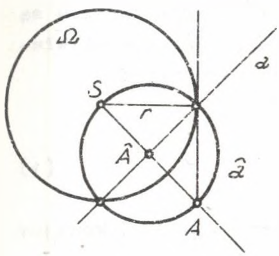
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Marian PALEJ

O PEWNYM UOGÓLNIENIU PŁASKIEGO ZWIĄZKU INWERSJI

Streszczenie. W artykule przedstawia się własności płaskiego związku inwersji, w którym stożkową podstawową jest kolejno hiperbola, elipsa i parabola. Rozważania oparto o złożenie uogólnionych rzutów stereograficznych oraz przekształcenia rzutowe.

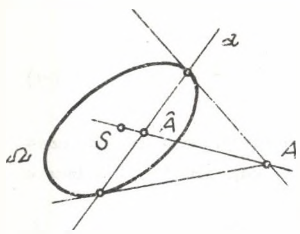
Klasyczna definicja inwersji opiera się na przyjęciu, tzw. okręgu podstawowego Ω o środku S i promieniu r, i określa takie przekształcenie płaszczyzny okręgu na siebie, w którym dowolnemu punktowi A odpowiada obraz $\hat{A}$ leżący na promieniu SA (rys. 1) i spełniający warunek: $\overline{SA} \times \overline{S\hat{A}} = r^2$. Ponieważ dowolnej prostej a odpowiada w tym związku okrąg $\hat{a}$ przynależny do środka S i przechodzący przez punkty $a \cap \Omega$ można, jak wynika to z prostych relacji, parę przyporządkowanych sobie punktów w przekształceniu inwersyjnym określać jako takie, które leżąc na wspólnym promieniu są sprzężone względem okręgu Ω, albo inaczej jako takie, z których jeden leży na biegunowej drugiego względem okręgu podstawowego Ω.



Rys. 1

Ta ostatnia uwaga prowadzi do uogólnienia przekształcenia inwersyjnego, którego zasada sprowadza się również do sprzężoności oryginału i obrazu punktu ale względem dowolnej już stożkowej Ω.

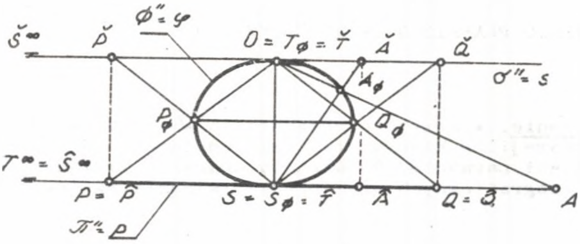
Rozpatrzmy w miejsce okręgu podstawowego dowolną stożkową Ω o środku S (rys. 2). Uogólnioną inwersją nazywać będziemy takie przyporządkowanie sobie punktów w parach leżących na promieniu przynależnym do S, w którym jeden z nich leży na biegunowej drugiego względem stożkowej Ω. Na wstępie udowodnimy twierdzenie umożliwiające szczegółowe zbadanie własności uogólnionego przekształcenia inwersyjnego.



Rys. 2

Twierdzenie 1

W przypadku, gdy stożkowa Ω jest elipsą lub hiperbolą uogólniony związek inwersji możemy otrzymać w wyniku złożenia dwóch rzutów stereograficznych i jednego rzutu prostokątnego.



Rys. 3

Dowód

Przyjmijmy kwadrykę Φ (rys. 3) styczną do płaszczyzny stożkowej Ω w punkcie S, o osi SO prostopadłej do tej płaszczyzny. Kwadrykę tę określamy warunkiem by jej przekrój średnicowy płaszczyzną równoległą do π był stożkową jednokładną do Ω przy skali jednokładności 1/2.
Rozważmy dowolną płaszczyznę λ przechodzącą przez oś kwadryki oraz proste p, s, jej krawędzie z płaszczyznami π i $\sigma \parallel \pi$. Obierzmy dowolny punkt A na prostej p i rozpatrzmy szereg $p(A, P, Q, S, T^{\infty})$, gdzie P i Q są punktami stożkowej Ω, S - jej środkiem, natomiast T^{∞} - punktem niewłaściwym prostej p. Zrzutujmy szereg (p) ze środka O na kwadrykę Φ. Otrzymujemy:

$$\varphi(A_{\Phi}, P_{\Phi}, Q_{\Phi}, S, O) \overline{\overline{\wedge}} (P), \tag{1}$$

gdzie φ jest stożkową przekroju kwadryki Φ płaszczyzną λ. Dokonajmy następnie rzutu szeregu (φ) z punktu O na prostą S. Otrzymujemy:

$$s(\check{A}, \check{P}, \check{Q}, \check{S}^{\infty}, O) \overline{\overline{\wedge}} (\varphi) \tag{2}$$

Wobec (1) zachodzi:

$$(S) \overline{\wedge} (P) \tag{3}$$

Sporządźmy wreszcie prostokątny rzut szeregu (S) na prostą p. W dwóch szeregach rzutowych $p(A, P, Q \ldots) \overline{\wedge} p(\hat{A}, \hat{P}, \hat{Q} \ldots)$, o wspólnej podstawie zauważamy, że:

1° - punkty P, Q jednoczą się odpowiednio z punktami $\hat{P}$, $\hat{Q}$, tj., że są to punkty podwójne tych szeregów,

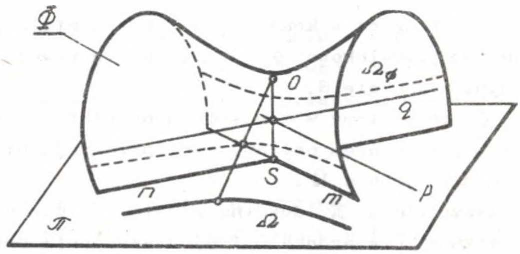
2^{o} - niewłaściwy punkt T^{∞} pokrywa się z $\hat{S}^{\infty}$ a odpowiadający mu $\hat{T}$ jednoczy się z S.

Oznacza to, że para $\hat{T} = S$, $T^{\infty} = \hat{S}^{\infty}$ jest parą inwolucyjną, czyli, że obydwa szeregi, składają się na szereg inwolucyjny o podstawie p. Ponieważ para punktów homologicznych szeregu inwolucyjnego tworzy z parą punktów podwójnych dwustosunek wartości -1 wynika stąd, że punkt A oraz przyporządkowany mu za złożenia dwóch rzutów stereograficznych i jednego rzutu prostokątnego obraz $\bar{A}$ są sprzężone względem stożkowej Ω i pozostają w uogólnionym związku inwersji, co należało dowieść.

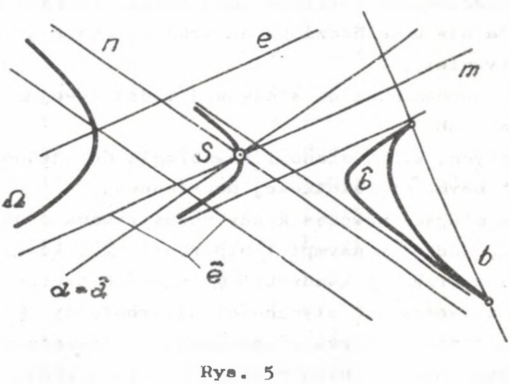
Przypomnijmy jeszcze znaną własność rzutu stereograficznego: jeżeli środek rzutu O jest punktem kwadryki Φ antypodycznym (średnicowo-przeciwnym) względem jej punktu styczności do rzutni wówczas rzuty stożkowych leżących na Φ są "podobne i podobnie ułożone" (1), czyli jednokładne.

Przechodząc do omówienia poszczególnych przypadków rozważmy:

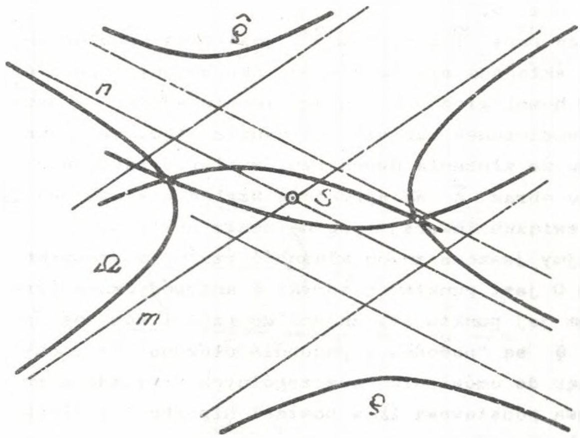
A. Stożkową podstawową Ω w postaci hiperboli o środku S i asymptotach m, n (rys. 4, 5, 6).



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Niech kwadryką pośredniczącą w konstrukcji przekształcenia będzie hiperboloida obrotowa, jednopowłokowa Φ o osi obrotu równoległej do rzutni π i styczna do rzutni w punkcie S.

Hiperboloidę Φ przyjmijmy w ten sposób by rzut stereograficzny ze środka O, (gdzie O jest końcem osi SO) jej przekroju płaszczyzną główną $\lambda \parallel \pi$ pokrywał się z hiperbolą Ω.

Obierzmy na płaszczyźnie π dowolną prostą a i dokonując dwukrotnie rzutu stereograficznego (ze środka O i S) a następnie prostokątnego na π wyznaczmy krzywą $\hat{a}$ będącą uogólnionym, inwersyjnym obrazem prostej a.

Otrzymujemy bezpośrednio następujące wnioski:

1. Jeżeli prosta a przechodzi przez środek uogólnionego związku inwersji, obrazem jej w tym przekształceniu jest zjednoczona z nią prosta $\hat{a}$ oraz prosta niewłaściwa (ta ostatnia jako obraz środka S należącego do a).
2. Jeżeli prosta nie przechodzi przez środek inwersji obrazem jej może być alternatywnie:
   a) hiperbola jednokładna do stożkowej podstawowej Ω przechodząca przez jej środek lub
   b) para prostych, którą stanowi równoległa do jednej z asymptot oraz pozostała asymptota stożkowej podstawowej.

Przypadek b) ma miejsce wówczas kiedy rozpatrywana prosta spełnia warunek równoległości do jednej z asymptot hiperboli Ω. Wówczas bowiem rzutująca ją płaszczyzna przecina kwadrykę Φ w dwóch tworzących. Każda z nich przecina jedną z tworzących styczności hiperboloidy Φ do rzutni (rys. 4), stąd przynależność ich rzutów do punktów niewłaściwych asymptot. Ponieważ, dodatkowo, jedna z nich przechodzi przez punkt O -w rzucie pokrywa się z odpowiednią asymptotą.

Dla ustalenia dalszych własności przekształcenia udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 2

Dowolna, niezdegenerowana stożkowa $\hat{c}$, jednokładna do stożkowej podstawowej Ω jest rzutem stereograficznym ściśle określonej stożkowej c_Φ kwadryki Φ.

Dowód

Obierzmy na stożkowej $\hat{c}$ dowolne trzy punkty A, B, C, i zrzutujmy je na kwadrykę Φ z punktu O. Otrzymujemy punkty A_Φ, B_Φ, C_Φ. Płaszczyzna $\varphi = A_\Phi B_\Phi C_\Phi$ przecina kwadrykę Φ w takiej stożkowej c_Φ, która w rzucie na π ze środka O ma ze stożkową $\hat{c}$ wspólne punkty A, B, C. Ponadto, ponieważ jest to stożkowa jednokładna do Ω, a więc i do $\hat{c}$ ma z tą ostatnią dalsze dwa punkty wspólne - punkty zjednoczone wspólnego szeregu inwolucyjnego punktów sprzężonych o podstawie niewłaściwej. Zatem istotnie stożkowa $\hat{c}$ jest identyczna z rzutem stereograficznym określonej stożkowej $(c_\Phi \in A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi)$ leżącej na Φ.

Jest oczywiste, że dla rozłącznych $\hat{c}, \Omega$ zachodzi również rozłączność c_Φ, Ω_Φ.

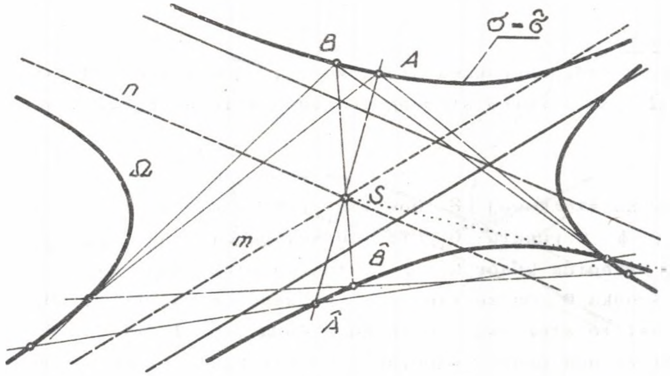
Zauważmy jeszcze, że stożkowa powierzchnia rzutująca krzywą $\hat{c}$ przenika się z kwadryką Φ w zdegenerowanej krzywej rzędu czwartego, na którą wraz z stożkową c_Φ składa się para tworzących przynależnych do środka O. Prawdziwe zatem jest twierdzenie:

Twierdzenie 3

Obrazem dowolnej hiperboli ρ, nieprzynależnej do środka uogólnionej inwersji S i jednokładnej do stożkowej podstawowej Ω jest jednokładna do niej hiperbola $\hat{\rho}$ oraz para prostych; proste te są asymptotami stożkowej podstawowej (rys. 6).

Rozważmy jeszcze przekrój σ_Φ kwadryki Φ płaszczyzną ϑ prostopadłą do rzutni. Wobec równoległości $\lambda \parallel \pi$ stwierdzamy, że stożkowa σ_Φ jest symetryczna względem płaszczyzny głównej λ, a także, że symetryczne względem λ są stożki o wierzchołkach O i S rzutujące krzywą σ_Φ stereograficznie. Jak łatwo z tego wywnioskować obydwa rzuty stereograficzne stożkowej σ_Φ po dokonaniu rzutu prostokątnego ulegną zjednoczeniu, czyli hiperbola $\hat{\sigma}$ pokryje się z częścią swojego obrazu.

Zbadajmy jeszcze warunki, jakim odpowiadają hiperbole jednoczące się z swoimi obrazami. Twierdzenie 3 nakłada warunek jednokładności do stożkowej podstawowej. Warunek dalszy wynika z rozważań przestrzennych. Zauważmy, że styczne do stożkowej w jej punktach wspólnych z praobrazem stereograficznym stożkowej podstawowej Ω_Φ są prostopadłe do rzutni. Rzuty stereograficzne tych stycznych przechodzące przez środek inwersji są stycznymi hiperboli $\hat{\sigma}$. Hiperbole przekształcające się na siebie mają więc styczne w punktach przecięcia z stożkową podstawową przechodzące przez środek S (rys. 7).



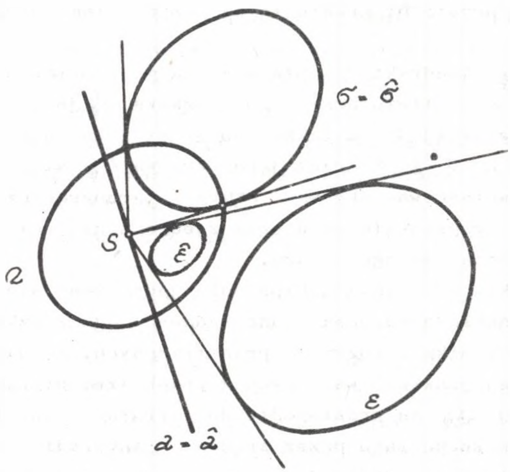
Rys. 7

Na podstawie powyższych uwag można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4

Obrazem hiperboli jednokładnej do stożkowej podstawowej Ω , takiej, do której styczne w punktach przecięcia z Ω przechodzą przez środek uogólnionej inwersji jest ta sama hiperbola oraz para asymptot stożkowej podstawowej.

B. Załóżmy z kolei, że stożkowa podstawowa jest elipsą o środku S (rys. 8).



Rys. 8

Niech kwadryką pośredniczącą w konstrukcji rzutów stereograficznych będzie nieobrotowa elipsoida Φ styczna do rzutni w punkcie S, o osi SO i takim przekroju płaszczyzną główną $\lambda \parallel \pi$, którego rzut z końca osi O pokrywa się z stożkową podstawową Ω.

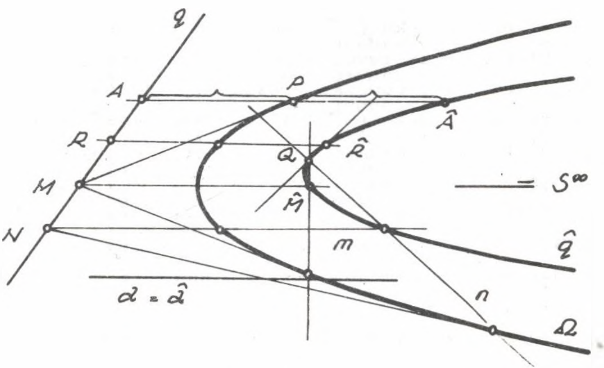
Powtarzając rozumowanie z ustępu A) dochodzimy do podobnych własności tak uogólnionego związku inwersji:

1. Jeżeli prosta przechodzi przez środek S obrazem jej jest zjednoczona z nią prosta oraz prosta niewłaściwa.

2. Jeżeli prosta nie przechodzi przez środek S obrazem jej jest elipsa jednokładna do stożkowej podstawowej, przynależna do S.
3. Obrazem dowolnej elipsy $\mathcal{E}$ jednokładnej do stożkowej podstawowej i nieprzynaleznej do środka S jest jednokładna do niej elipsa $\hat{\mathcal{E}}$; obraz ten uzupełnia para urojonych stycznych stożkowej podstawowej wychodzących z środka S (rzut tworzących przekroju elipsoidy płaszczyzną styczną w punkcie O).
4. Obrazem elipsy jednokładnej do stożkowej podstawowej Ω, takiej, do której styczne w punktach przecięcia z Ω przechodzą przez środek S jest ta sama elipsa uzupełniona parą urojonych stycznych do stożkowej podstawowej przynależnych do S.

Podkreślmy jeszcze istotną różnicę w inwersyjnych obrazach punktów niewłaściwych w przypadkach A i B. W przypadku kiedy stożkowa podstawowa jest elipsą, inwersyjnym obrazem wszystkich punktów niewłaściwych jest środek S, natomiast wówczas kiedy stożkowa podstawowa jest hiperbolą obraz dwóch punktów niewłaściwych ma charakter rozciągły. Są to punkty niewłaściwe stożkowej podstawowej, którym odpowiadają asymptoty. Pozostałe punkty niewłaściwe w przypadku A mają swój obraz w postaci środka S.

C. Przechodząc do omówienia kolejnego przypadku uogólnionej inwersji przyjmijmy dowolną parabolę Ω o środku S^{∞} (rys. 9) jako stożkową podstawową.



Rys. 9

Zauważmy na wstępie, że inaczej niż w przypadkach A i B każdemu punktowi właściwemu odpowiada punkt właściwy a każdemu punktowi niewłaściwemu - ten sam jeden punkt niewłaściwy środek inwersji S^{∞}.

Z warunku sprzężoności punktów A i $\hat{A}$ względem paraboli Ω i współliniowości $A, \hat{A}, S^{\infty}$ wynika warunek $\overline{AP} = \overline{P\hat{A}}$, gdzie $P = AS^{\infty} \cap \Omega$ oraz $P \neq S^{\infty}$.

Wnosimy stąd, że obrazem dowolnej figury Γ w rozpatrywanym przekształceniu inwersyjnym jest symetryczna z nią figura Γ przy założeniu krzywoliniowej osi symetrii Ω i kierunku symetrii S^{∞}.
Udowodnimy:

Twierdzenie 5

W uogólnionym związku inwersji o krzywej podstawowej w postaci paraboli o środku S^{∞} prostej q nie przechodzącej przez środek S^{∞} odpowiada parabola $\hat{q}$ o środku S^{∞}.

W dowodzie obierzmy szereg punktów o podstawie q $(M,N\ \ldots)$ i rozważmy jego biegunowe $Q(m,n\ \ldots)$. Obrazami punktów $M,N\ \ldots$ są punkty przecięcia prostych $S^{\infty}M$, $S^{\infty}N\ \ldots$ z odpowiednimi prostymi $m,n\ \ldots$.
Uwzględniając:

$$(q)\ \overline{\wedge}\ (Q) \tag{4}$$

$$S^{\infty}(S^{\infty}M,\ S^{\infty}N\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ q(M,N\ \ldots) \tag{5}$$

mamy

$$(Q)\ \overline{\wedge}\ (S^{\infty}) \tag{6}$$

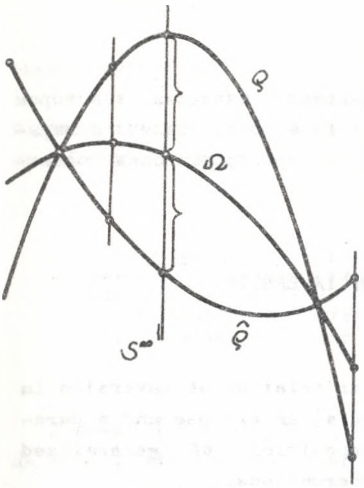
co oznacza, że zbiór punktów stanowiących obrazy elementów szeregu (q) jest stożkową $\hat{q}$.
Zauważmy, że wierzchołek pęku (S^{∞}) należy do tej stożkowej i że jest on jej jedynym punktem niewłaściwym. Gdyby bowiem istniał jeszcze jeden punkt niewłaściwy tej stożkowej, wówczas prosta niewłaściwa byłaby perspektywicznym z nim promieniem pęku (S^{∞}) i łączyłaby z S^{∞} niewłaściwy punkt V^{∞} szeregu (q). Wiadomo jednak, że biegunowa v punktu V^{∞} jest średnicą stożkowej Ω, a więc element wspólny $S^{\infty}V^{\infty} \wedge v$ jest środkiem S^{∞}. Dowiedliśmy zatem, że stożkowa $\hat{q}$ jest parabolą o środku S^{∞}.

Jest oczywiste, że w przypadku szczególnym kiedy prosta a przechodzi przez środek inwersji obrazem jej jest zjednoczona z nią prosta $\hat{a}$ oraz prosta niewłaściwa.
W analogii do przypadków A i B sformułujemy twierdzenie:

Twierdzenie 6

Obrazem paraboli ρ o środku zjednoczonym ze środkiem S^{∞} inwersji jest współśrodkowa z nią parabola $\hat{\rho}$ oraz prosta niewłaściwa (rys. 10).

W dowodzie powyższego twierdzenia zauważmy, że biegunowe punktów szeregu stopnia drugiego o podstawie ρ tworzą pęk stopnia drugiego, którego obwiednią jest parabola π o środku S^{∞}. Istotnie bowiem do pęku tego należy prosta niewłaściwa jako biegunowa punktu S^{∞} szeregu (ρ). Wprowadźmy pęk (S^{∞}) perspektywiczny do szeregu (ρ).



Rys. 10

Ponieważ zachodzi:

$$S^{\infty}(S^{\infty}A, S^{\infty}B \dots) \barwedge \rho(A, B \dots) \qquad (7)$$

oraz

$$O(A,\ B \dots) \barwedge \pi(a,\ b \dots) \qquad (8)$$

mamy do czynienia z utworem powstałym z przecięcia odpowiednich elementów w rzutowych względem siebie pękach stopnia drugiego i pierwszego:

$$\pi(a, b \dots) \barwedge S^{\infty}(S^{\infty}A,\ S^{\infty}B \dots) \qquad (9)$$

Utworem takim jest krzywa rzędu trzeciego c^3. Zauważmy jednak, że częścią krzywej c^3 jest prosta niewłaściwa t^{∞} jako element wspólny stycznej t^{∞} pęku (π) z promieniem $S^{\infty}S^{\infty}$. Okazuje się zatem, że c^3 rozpada się na styczną t^{∞} oraz stożkową $\hat{\rho}$.

Do stożkowej $\hat{\rho}$ należy punkt S^{∞}, przy czym jest to jedyny punkt niewłaściwy gdyż każdemu promieniowi pęku (S^{∞}) odpowiada dokładnie jeden punkt krzywej ρ oraz dokładnie jeden jego obraz - punkt krzywej $\hat{\rho}$.

Wnioskujemy więc, że stożkowa $\hat{\rho}$ jest parabolą, co należało dowieść. Na zakończenie zauważmy, że nie istnieje parabola o środku S^{∞}, różna od stożkowej podstawowej Ω przekształcająca się w rozpatrywanym związku na siebie. Przekształcenie takie musiałoby bowiem mieć charakter tożsamościowy ponieważ każdy promień inwersji przecina parabolę o środku S^{∞} w jednym tylko różnym od niego punkcie.

LITERATURA

[1] Ernesto Pascal: Repertoryum matematyki wyższej, tom II, Geometrya, Warszawa 1901.

ВОПРОС О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ
ПЛОСКОГО СООТНОШЕНИЯ ИНВЕРСИИ

Р е з ю м е

В статье представлены свойства плоского соотношения инверсии, в котором основным коническим сечением поочередно являются гипербола, эллипс и парабола. Рассуждения основаны на сложению обобщенных стереографических проекций и на проективных преобразованиях.

ON CERTAIN GENERALIZATION OF PLANAR RELATION OF INVERSION

S u m m a r y

The article presents the properties of planar relation of inversion in which the basic conic is successively a hyperbola, an ellipse and a parabola. The considerations are based on the superposition of generalized stereographic projections and projective transformations.

Recenzent: Doc. dr hab. Konrad Dyba

Wpłynęło: 29.05.1981 r.