ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

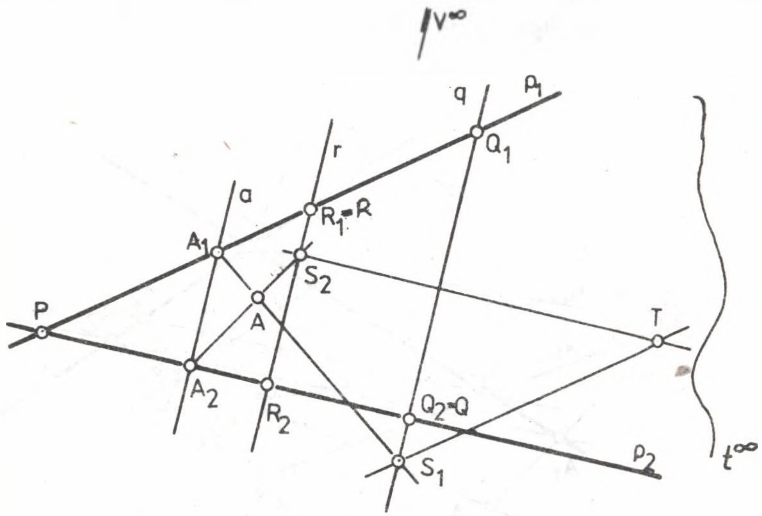
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Anna POGONOWSKA

O PEWNEJ KONSTRUKCJI KRZYWEJ STOPNIA DRUGIEGO OKREŚLONEJ 5 DOWOLNYMI PUNKTAMI

Streszczenie. W pracy omówiono konstrukcję stożkowej jako wynik pewnego dwoistego przekształcenia płaszczyzny. Rozpatrując zastosowanie konstrukcji do rozwiązywania zadań, w których ingeruje sześciokąt wpisany w stożkową ustalono istnienie 60 punktów niewłaściwych spełniających rolę 60 prostych Pascala.

W pracy [1] omawiającej własności pewnego przekształcenia płaszczyzny na siebie udowodniono, między innymi, twierdzenie orzekające o tym, że praobrazem pęku prostych jest stożkowa.



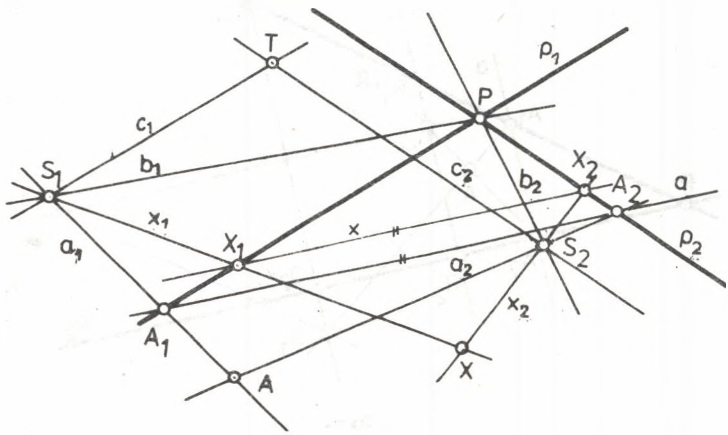
Rys. 1

Zawężając zagadnienie do pęku prostych równoległych zwróćmy uwagę na następującą konstrukcję stożkowej - praobrazu. Niech dane będą: (rys. 1) proste bazy p_1, p_2, środki rzutów S_1, S_2 oraz dowolny punkt niewłaściwy V^∞, stanowiący środek pęku prostych równoległych. Praobrazem dowolnego promienia a pęku (V^{∞}) jest punkt przecięcia promieni rzutujących (z środków S_1, S_2) punktów $A_1 = a \cap p_1$, $A_2 = a \cap p_2$. Wprowadźmy promienie $q \in S_1$, $r \in S_2$, $t = t^{\infty}$. Z konstrukcji jak wyżej otrzymujemy ich praobrazy - punkty Q, R, T, przy czym zachodzi $Q \in p_2$, $R \in p_1$ oraz $TS_1 \| p_1$ $TS_2 \| p_2$. Dysponujemy w ten sposób siedmioma punktami stożkowej stanowiącej praobraz pęku (V^{∞}): S_1, S_2, P, A, Q, R, T. Dowolnie wiele dalszych jej punktów można uzyskać powtarzając konstrukcję punktu A.

W oparciu o powyższe uwagi można zaproponować następującą konstrukcję stożkowej:

Niech dane będzie 5 punktów stożkowej, które dla analogii do poprzednich wyjaśnień opiszmy symbolami S_1, S_2, P, T, A.

Wprowadźmy: $p_1 \in P$, $p_1 \| TS_1$ oraz $p_2 \in P$, $p_2 \| TS_2$. Zrzutujmy z środków S_1, S_2 dany punkt A na odpowiednie proste p_1, p_2 i połączmy z sobą te rzuty. Otrzymana prosta a ustala kierunek promieni pęku (V^{∞}), które na prostych p_1 i p_2 wycinają dwa szeregi perspektywiczne. Proste rzutujące te szeregi z środków S_1 i S_2 przecinają się odpowiednio w punktach należących do szukanej stożkowej. Szczególnie łatwo przy tym uzyskać punkty leżące na prostych p_1 i p_2 przecinając je promieniami odpowiednio przynależnymi do środków S_2 i S_1. Zauważmy, że w konstrukcji powyższej kryje się sposób uzupełnienia dwóch rzutowych pęków prostych. Wyodrębnijmy tę konstrukcję przyjmując, że dane są pęki o środkach S_1, S_2 i promieniach a_1, b_1, c_1 oraz a_2, b_2, c_2 (rys. 2).



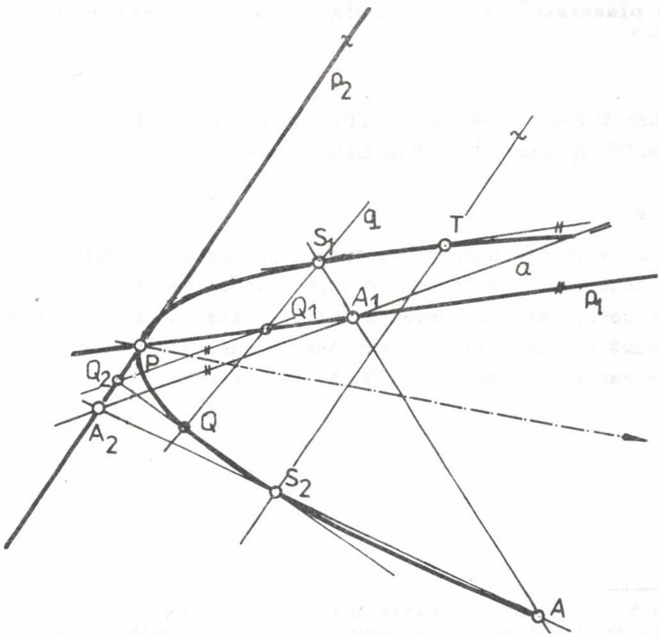
Rys. 2

Rozważmy punkty: $A = a_1 \cap a_2$, $P = b_1 \cap b_2$ i $T = c_1 \cap c_2$. Skonstruujmy: $p_1 \in P$, $p_1 \| S_1T$, $p_2 \in P$, $p_2 \| S_2T$, a następnie prostą a łączącą punkty $p_1 \cap a_1$ i $p_2 \cap a_2$.

Jest to jeden z promieni pęku prostych równoległych wykorzystywanych w omówionych wyżej konstrukcjach. Chcąc znaleźć prostą x_2 odpowiadającą w pęku (S_2) dowolnie wybranemu promieniowi x_1 pęku (S_1) wystarczy przez punkt $p_1 \cap x_1$ poprowadzić prostą $x \| a$, a następnie jej punkt przecięcia z p_2 rzucić z punktu S_2. Promień rzutujący jest szukaną prostą x_2. Łatwo dostrzec, że konstrukcja powyższa jest szczególnym przypadkiem powszechnie stosowanego sposobu uzupełniania pęków rzutowych, w którym proste p_1 i p_2, jako podstawy pomocniczych, perspektywicznych szeregów punktów zostały wybrane równolegle do dwóch odpowiadających sobie promieni (c_1, c_2). Dzięki temu środek perspektywiczności tych szeregów jest punktem niewłaściwym.

Zwróćmy jeszcze uwagę na przypadek szczególny, w którym dwa spośród pięciu danych punktów stożkowej ulegają zjednoczeniu. Konstrukcja upraszcza się wówczas nieco graficznie, gdyż daną styczną można uważać za prostą TS_1 lub TS_2 i nie trzeba jej dodatkowo wykreślać. Pozostałe etapy postępowania nie ulegają zmianie.

Warto jeszcze wskazać na możliwość zastosowania powyższej konstrukcji do wyznaczania punktu przecięcia stożkowej prostą przechodzącą przez jeden z jej danych punktów. Wygodnie jest wówczas daną prostą uważać za jeden z promieni pęku (S_1) lub (S_2), tj. przyjąć, że znany jej punkt jest jednym z środków rzutów S_1 lub S_2.



Rys. 3

Przykład takiej konstrukcji przedstawiono na rys. 3 przyjmując, że daną prostą jest q, a jeden z jej punktów przecięcia stożkowej - środkiem S_1. Rozwiązanie zadania jest natychmiastowe, gdyż ogranicza się do wyznaczenia promienia pęku (V^{∞}) przechodzącego przez $q \cap p_1$. Punkt przecięcia tym promieniem prostej p_2 rzucony z środka S_2 na prostą q daje szukany punkt stożkowej. W ten sposób eliminujemy wprowadzaną zazwyczaj w tego rodzaju zadaniach prostą Pascala. Zauważmy, że analogia pomiędzy konstrukcją Pascala a tą, którą prezentuje niniejsza praca jest dalej idąca. Wiadomo, że w zależności od kolejności rozpatrywania danych punktów stożkowej, a więc od opisu ingerującego w konstrukcji sześciokąta wpisanego, można rozważyć 60 prostych Pascala. W konstrukcji opartej o rozpatrywane przekształcenie mamy również 60 różnych wariantów związanych z kierunkiem promieni równoległych pęku (V^{∞}). Jeżeli bowiem założymy, że dowolną parę spośród 5 danych punktów możemy uważać za parę środków otrzymujemy[x]: $C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$ kombinacji. W każdej jednak tak określonej sytuacji sześciokrotnie różnie można widzieć rolę pozostałych 3 punktów $(P_3 = 3!)$, co prowadzi do wniosku, że istnieje $6 \times 10 = 60$ różnych kierunków pęków prostych równoległych ingerujących w powyższej konstrukcji.

LITERATURA

[1] M. Palej, A. Pogonowska: O dalszych zastosowaniach pewnego przekształcenia płaskiego. ZN Politechniki Śląskiej s. Matematyka-Fizyka nr / 42 Gliwice

ВОПРОС О НЕКОТОРОМ ПОСТРОЕНИИ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОПРЕДЕЛЕННОГО ПЯТЕРЬМИ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ

Р е з ю м е

В настоящей работе было рассмотрено построение конического сечения как результат некоторого двойственного преобразования плоскости. Рассматривая применение построения для решения задач, в которых воздействует шестиугольник вписанный в коническое сечение было установлено существование 60 несобственных точек выполняющих роль 60 прямых Паскаля.

---

x) Zamiana S_1 na S_2 nie zwiększa ilości wariantów, gdyż przy jednoczesnej zamianie oznaczeń prostych bazy p_1 i p_2, co wynika z konstrukcji, kierunek prostej będącej obrazem danego punktu nie ulega zmianie.

ON CERTAIN CONSTRUCTION OF A CURVE OF THE SECOND ORDER DETERMINED BY 5 ARBITRARY POINTS

S u m m a r y

The paper discusses the construction of a conic as a result of a certain dual transformation of plane. Considering the application of the construction to the solution of the problems in which a hexagon inscribed in a conic interferes, it was possible to ascertain the existence of 60 infinite points fulfilling the part of 60 Pascal straight lines.

Recenzent: Doc. dr hab. Konrad Dyba

Wpłynęło: 29.05.1981 r.