ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Jerzy KOGUT

PEWNE WŁASNOŚCI HOMOMORFIZMÓW ILOCZYNU PÓŁPROSTEGO GRUP W DOWOLNĄ GRUPĘ

Streszczenie. Iloczynem półprostym grup G i H nazywamy ich iloczyn kartezjański, który z działaniem $(g,h)\circ(g_1,h_1)=(gg_1,\ h\tau_g(h))$, gdzie: $\tau : G \to \mathrm{Aut}H$ jest homomorfizmem, tworzy grupę. W pracy badam zależności jakie zachodzą pomiędzy homomorfizmami $\varphi : G \times_\tau H \to G_1$ a homomorfizmami $\tilde{\varphi} : G \to G_1$.

Wyznaczanie obiektów liniowych o jednej składowej przestrzeni Kleina opartej na dowolnej podgrupie $H(n,K)\subset GL(n,K)$, K jest ciałem charakterystyki zero, jest równoważne wyznaczeniu wszystkich homomorfizmów $\varphi : H(n,K) \to K^*$.

Każda grupa $H(n,K)$ wyznacza jednoznacznie pewną podgrupę $GH(n,K)$ grupy afinicznej $GA(n,K)$. Nasuwa się pytanie, jaka zależność zachodzi pomiędzy homomorfizmami $\tilde{\varphi} : H(n,K) \to K^*$ a homomorfizmami $\tilde{\varphi} : GH(n,K) \to K^*$?

W artykule tym staram się odpowiedzieć na powyższe pytania rozważając przypadek bardziej ogólny, gdyż każdą podgrupę grupy afinicznej można traktować jako iloczyn półprosty dwóch grup. Podaję warunek konieczny i wystarczający na to, aby homomorfizm $\tilde{\varphi}$ był wyznaczony przez homomorfizm φ. Podaję również pewną własność iloczynu półprostego grup, z której wynika, że dowolny homomorfizm $\tilde{\varphi}$ o wartościach w dowolnej grupie abelowej, jest wyznaczony jednoznacznie przez pewien homomorfizm φ, o wartościach w tej samej grupie.

Niech dane będą dwie grupy G i H oraz homomorfizm $\tau : G \to \mathrm{Aut}H$ grupy G w grupę atomorfizmów grupy H. Przez symbole e_G i e_H oznaczać będziemy element jednostkowy odpowiednio grupy G i H.

Definicja 1

Iloczynem półprostym grup G i H nazywamy grupę $G\times_\tau H$, której elementy są elementami iloczynu kartezjańskiego grup G i H, a działanie jest określone następująco:

(1) dla każdych $(g,h),\ (g_1,h_1)\in G\times H$

$$(g,h)\circ(g_1,h_1) := (gg_1,\ h\tau_g(h_1)).$$

Elementem jednostkowym tej grupy jest para (e_G, e_H). Elementem odwrotnym dla pary $(g,h) \in G \times_\tau H$, jest para $(g^{-1}, \tau_{g^{-1}}(h^{-1}))$.

Wśród wielu podgrup iloczynu półprostego grup G i H wyróżnimy dwie podgrupy, grupę $\vec{G} := G \times \{e_H\}$, która jest izomorficzna z grupą G oraz grupę $\vec{H} := \{e_G\} \times H$, która jest izomorficzna z grupą H.

Każdy homomorfizm $\varphi : G \times_\tau H \to G_1$ odwzorowujący iloczyn półprosty grup G i H w dowolną grupę G_1 można przedstawić w postaci:

$$(2) \quad \forall g \in G \, \forall h \in H \quad \varphi(g,h) = f_1(h)\, f_2(g),$$

gdzie: $f_1(h) := \varphi(e_G, h)$, $f_2(g) := \varphi(g, e_H)$. Odwzorowania $f_1 : H \to G_1$, $f_2 : G \to G_1$, jak łatwo sprawdzić, są homomorfizmami.

Lemat 1

Jeżeli φ jest homomorfizmem grupy $G \times_\tau H$ w grupę G_1, to następujące warunki są równoważne:

a) $\vec{H} \subset \operatorname{Ker} \varphi$

b) $f_1 \equiv e_{G_1}$

c) $\forall g \in G \; \forall h \in H \quad \varphi(g, e_H) = \varphi(g,h)$.

Dowód

Implikacje $(a \Rightarrow b)$, $(b \Rightarrow c)$ są oczywiste. Niech spełniony będzie warunek c, dla każdego $h \in H$

$$(e_G, h) = (g,h) \circ (g^{-1}, e_H).$$

Stąd wynika, że

$$\varphi(e_G, h) = \varphi(g,h)\, \varphi(g^{-1}, e_H) = \varphi(g, e_H)\, \varphi(g^{-1}, e_H) = e_{G_1},$$

a to oznacza, że $\vec{H} \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Tym samym wykazaliśmy prawdziwość implikacji $(c \Rightarrow a)$.

c.n.d.

Przez π_1 oznaczymy odwzorowanie rzutujące iloczyn półprosty $G \times_\tau H$ na pierwszy czynnik tego iloczynu.

Definicja 2

G - faktoryzacją homomorfizmu $\varphi : G \times_\tau H \to G_1$ nazywamy homomorfizm $\varphi_* : G \to G_1$ taki, że następujący diagram

$$\begin{tikzcd} G \times_\tau H \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

jest domknięty, tzn. $\varphi = \varphi_* \circ \pi_1$.

Lemat 2

Jeżeli $\varphi_* : G \to G_1$ jest G - faktoryzacją homomorfizmu $\varphi : G \times_\tau H \to G_1$, to $\varphi_* \equiv f_2$ i $f_1 \equiv e_{G_1}$.

Dowód

Z faktu, że φ_* jest G - faktoryzacją homomorfizmu φ wynika, że dla każdego $g \in G$

$$f_2(g) = \varphi(g, e_H) = (\varphi_* \circ \pi_1)(g, e_H) = \varphi_*(g)$$

oraz dla każdego $h \in H$

$$f_1(h) = \varphi(e_H, h) = (\varphi_* \circ \pi_1)(e_G, h) = \varphi_*(e_G) = e_{G_1}$$

c.n.d.

Twierdzenie 1

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby dla homomorfizmu $\varphi : G \times_\tau H \to G_1$ istniała G - faktoryzacja $\varphi_* : G \to G_1$ jest, aby grupa $\tilde{H}$ była zawarta w $\mathrm{Ker}\varphi$.

Dowód

Przypuśćmy, że $\tilde{H} \subset \mathrm{Ker}\varphi$, z lematu 1 wynika wówczas, że dla każdego $(g,h) \in G \times_\tau H$, $\varphi(g,h) = \varphi(g, e_H)$.
Określimy teraz odwzorowanie $\varphi_* : G \to G_1$ następująco:

$$\forall_{g \in G} \quad \varphi_*(g) := \varphi(g, e_H).$$

Łatwo sprawdza się, że φ_* jest homomorfizmem. Równość $\varphi = \varphi_* \circ \pi_1$ jest oczywista, jest ona zagwarantowana przez warunek c) lematu 1. Co kończy pierwszą część dowodu.
Przypuśćmy, że dla homomorfizmu φ istnieje G - faktoryzacja φ_*. Z lematu 2 wynika, że wtedy $f_1 \equiv e_{G_1}$, a warunek ten jest równoważny, na podstawie lematu 1, warunkowi $\tilde{H} \subset \mathrm{Ker}\varphi$.

c.n.d.

Komutatorem elementów $g, g_1 \in G$ nazywamy element postaci $g^{-1}g_1^{-1}gg_1$. Podgrupę generowaną w G przez wszystkie komutatory nazywamy komutantem grupy G i oznaczamy symbolem $[G, G]$.

Twierdzenie 2

Jeżeli istnieje element $g \in G$ taki, że odwzorowanie $\psi : H \to H$ dane wzorem $\psi(h) = \tau_g(h)h^{-1}$, $h \in H$, jest surjekcją, to $\tilde{H} \subset [G \times_\tau H, G \times_\tau H]$.

Dowód

Niech $(e_G, h) \in \tilde{H}$; wówczas istnieje $h_1 \in H$ takie, że $\psi(h_1) = h$. Stąd otrzymujemy następującą równość

$$(e_G, h) = (e_G, \psi(h_1)) = (e_G, \tau_g(h_1)h_1^{-1}) = (g, e_H) \circ (e_G, h_1) \circ (g^{-1}, e_H) \circ (e_G, h_1^{-1}).$$

Z równości tej wynika, że każdy element grupy przy $\tilde{H}$ jest elementem komutanta grupy $G \times_\tau H$.

c.n.d.

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 2, to dla każdego homomorfizmu $\varphi : G \times_\tau H \to G_1$, G_1 jest grupą abelową, istnieje G - faktoryzacja $\varphi_* : G \to G_1$ taka, że $\varphi = \varphi_* \circ \pi_1$.

Dowód

Na mocy twierdzenia 2 wynika, że $\tilde{H} \subset [G \times_\tau H, G \times_\tau H]$. Wiadomo, że komutant $[G \times_\tau H, G \times_\tau H]$ zawiera się w $\mathrm{Ker}\,\varphi$ dowolnego homomorfizmu o wartościach w dowolnej grupie abelowej. A więc, na podstawie twierdzenia 1, spełniony jest warunek konieczny i wystarczający istnienia G - faktoryzacji dla homomorfizmu φ.

c.n.d.

Pozostaje otwarty problem uogólnienia powyższego wyniku na przypadek homomorfizmów o wartościach w dowolnej grupie nieabelowej.

Na zakończenie zobrazujemy powyższe wyniki przykładami:

Przykład 1

Niech $G = SL(3,\mathbf{R})$, $H = \mathbf{R}^3$, $G_1 = \sqrt{\mathbf{R}^*}$. Homomorfizm $\tau : SL(3,\mathbf{R} \to \mathrm{Aut}\,\mathbf{R}^3$ jest określony następująco:

$$\forall_{A \in \sqrt{SL(3,\mathbf{R})}} \quad \tau(A) := \tau_A$$

$$\forall_{x \in \mathbf{R}^3} \qquad \tau_A(x) := A.x.$$

Rozważmy dowolny homomorfizm $\varphi : SL(3,\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^*$. W tym przypadku warunek istnienia surjekcji $\psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ takiej, że $\psi(x) = \tau_A(x) - x$ jest równoważny istnieniu takiej macierzy $A \in SL(3,\mathbf{R})$, że macierz $A - E$ jest nieosobliwa.

Pokażemy, że w grupie $SL(3,\mathbf{R})$ istnieje macierz spełniająca powyższe warunki.

Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą diagonalną taką, że $a_{ii} = a \neq 1$, $i = 1,2$; $a > 0$; $a_{33} = \frac{1}{a^2}$. Wówczas macierz $A - E$ jest także macierzą diagonalną o następujących elementach $b_{ii} = a - 1$, $i = 1,2$; $b_{33} = \frac{1}{a^2} - 1$; $\det(A - E) = (a - 1)^2 (\frac{1}{a^2} - 1) \neq 0$. Ponieważ grupa $\mathbf{R}^3$ jest abelowa, więc surjekcja ψ wyznaczona przez tak dobraną macierz A jest automorfizmem grupy $\mathbf{R}^3$. Stąd wynika, że każdy homomorfizm $\varphi : SL(3,R) \times_\tau \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^*$ jest wyznaczony jednoznacznie przez pewien homomorfizm $\varphi_* : SL(3,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$.

Istnienie surjekcji ψ jest uzależnione nie tylko od struktury grupy ale także od homomorfizmu τ. Poniższe przykłady zobrazują nam tę zależność.

Przykład 2

Niech $G = DPS(2,\mathbf{R})$, $H = \mathbf{R}^2$, $G_1 = \mathbf{R}^*$. Homomorfizm $\tau : DPS(2,\mathbf{R}) \to Aut\,\mathbf{R}^2$ jest określony następująco:

$$\forall x \in \mathbf{R}^2 \quad \tau_A(x) := A.x$$

Zauważmy, że w tym przypadku nie istnieje surjekcja $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ taka, że $\psi(x) = \tau_A(x) - x$, ponieważ dla każdej macierzy $A \in DPS(2,\mathbf{R})$ macierz $A - E$ jest macierzą osobliwą. Pozostaje otwartym problem istnienia homomorfizmów istotnie zależnych od drugiego czynnika.

Przykład 3

Niech G, H, G_1 będą grupami określonymi jak w przykładzie 2. Homomorfizm $\tau = DPS(2,\mathbf{R}) \to Aut\,\mathbf{R}^2$ określimy następująco:

$$\forall x \in \mathbf{R}^2 \quad \tau_A(x) := B.x,$$

gdzie

$$B = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}.$$

Wtedy, dla każdej macierzy $A \in DPS(2,\mathbf{R})$, $\det A \neq 1$, macierz $B - E$ jest nieosobliwa, a więc istnieje surjekcja $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ taka, że $\psi(x) = \tau_A(x) - x$.

LITERATURA

[1] E.J. Jasińska, M. Kucharzewski: Grundlegende Begriffe der Kleinchen Geometrie. Demonstratio Math. 7(3) (1974), 381-402.

[2] M. Kucharzewski: Über die Orientierung der Kleinschen Geometrien. Ann. Pol. Math. 29 (1975), 363-371.

[3] E. Kapustka: Podstawowe własności geometrii Kleina. Praca doktorska. Kraków 1979.

[4] M.I. Kargapołow, J.I. Mierzlakow: Podstawy teorii grup. PWN, Warszawa 1976.

[5] A. Wawrzyńczyk: Współczesna teoria funkcji specjalnych. PWN, Warszawa 1978.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГОМОМОРФИЗМА ПОЛУПРОСТОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП В ПРОИЗВОЛЬНУЮ ГРУППУ

Р е з ю м е

Полупростым произведением групп G и H считаем их прямое произведение, которое вместе с действием $(g,h).(g_1,h_1) = (gg_1, h\tau_g(h))$, где $\tau : G \to AUtH$ является гомоморфизмом, составляет группу.

В настоящей работе исследую зависимости происходящие между гомоморфизмами $\varphi : G x_{\tau} H \to G_1$ и гомоморфизмами $\tilde{\varphi} : G \to G_1$.

CERTAIN PROPERTIES OF HOMOMORPHISMS OF SEMI-DIRECT PRODUCT OF GROUPS TO AN ARBITRATY GROUP

S u m m a r y

We call the semi-direct product of groups G and H their Cartesian product which with the operation $(g,h)\cdot(g_1,h_1) = (gg_1, h\tau_g(h))$, where $\tau : G \to \mathrm{Aut}H$ is homomorphism, forms a group. In this paper I investigate the dependencies which take place between homomorphisms $\varphi : G x_{\tau} H \to G_1$ and homomorphisms $\tilde{\varphi} : G \to G_1$.

Recenzent: Doc. dr hab. Roman Ger

Wpłynęło: 30.03.1981 r.