ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Mieczysław KUCHARZEWSKI

POJĘCIE PRZESTRZENI KLEINA I JEJ GEOMETRII

Streszczenie. Przestrzeń Kleina jest to trójka (1) (M, G, f), gdzie M jest dowolnym zbiorem, G - dowolną grupą, a f oznacza efektywne działanie G na M. Geometria Kleina lub G-geometria jest to pewna kategoria, której obiektami są obiekty geometryczne przestrzeni (1). Określone zostały również kategorie obiektów abstrakcyjnych i kategoria przestrzeni Kleina oraz podane zostały ich podstawowe własności.

Celem tych rozważań jest przedstawienie pojęcia przestrzeni i geometrii Kleina. Pojęcia te zostały tutaj sprecyzowane i w pewnej mierze zmodyfikowane. W rozważaniach nie ograniczam się do rozmaitości i grup Liego, ale rozpatruję dowolne zbiory i dowolne grupy w nich działające. Wskutek tego pojęcia są ogólniejsze, a rozważania prostsze i jaśniejsze, a więc dostępne dla szerszego kręgu czytelników.

Jak wiadomo pojęcie geometrii określił F. Klein w swoim słynnym Programie z Erlangen [2]. Kto pierwszy wprowadził nazwę "przestrzeń Kleina" nie wiem. B.A. Rozenfeld w swojej monografii z 1969 roku [6] tak pisze na temat ten: "Dlatego po pojawieniu się geometrii przestrzeni nie dopuszczających grupy przekształceń, przestrzenie z grupą przekształceń zaczęto nazywać przestrzeniami Kleina", s. 495. Nie biorąc pod uwagę założeń odnośnie występujących zbiorów i grup można, zgodnie z definicją Kleina, przyjąć, że przestrzeń Kleina jest to para $(N, \mathcal{G})$ złożona ze zbioru niepustego N i grupy przekształceń $\mathcal{G}$ tego zbioru na siebie.

W roku 1930 E. Cartan w [7] wprowadził pojęcie przestrzeni jednorodnej i później wielu autorów nazywało, moim zdaniem nie słusznie, przestrzeń jednorodną przestrzenią Kleina. Zgodnie z definicją Cartana przestrzeń jednorodna jest to przestrzeń Kleina, w której grupa działa tranzytywnie. Ważne są również przestrzenie z nietranzytywną grupą przekształceń, np. przestrzeń wektorowa. Dlatego wygodniej jest usunąć z definicji przestrzeni Kleina założenie tranzytywności, ponieważ ogranicza zakres pojęcia.

R. Sulanke i P. Wintgen w podręczniku [4] określają przestrzeń Kleina jako tranzytywną lewostronną grupę przekształceń, tzn. jako trójkę (M,G,f), gdzie M jest zbiorem, G - grupą, a f - tranzytywnym lewostronnym działaniem grupy G na M. Uważam, że należy odrzucić z tej definicji tranzytywność jako nieistotne ograniczenie, a dodać efektywność działania grupy G. Tak zostało określone pojęcia przestrzeni Kleina w tej pracy. Założenie

efektywności wydaje mi się zgodne z intuicją Kleina, bo grupa przekształceń zawsze działa efektywnie. Poza tym grupa G jest wtedy izomorficzna z wyznaczoną przez nią grupą przekształceń. Taką trójkę (M, G, f) z działaniem efektywnym wprowadziliśmy wspólnie z E.J. Jasińską w pracy [1] w roku 1972. Pojęcie to zostało przedstawiane już wcześniej w roku 1971 na Ogólnopolskiej Konferencji z Geometrii Różniczkowej w Zawoi w referacie, który tam wygłosiłem. Trójkę taką nazwaliśmy wtedy niewłaściwie "geometrią Kleina". W tej pracy proponuję zmienić tę nazwę na "przestrzeń Kleina" rezerwując termin "geometria" dla innego pojęcia, zgodnie z definicją podaną przez R. Sulanke w [3].

Pojęcie geometrii jako tzw. G-geometrii, gdzie G jest grupą Liego określił R. Sulanke w roku 1970 w pracy [3].
Pojęcie to zostało przedstawione również w podręczniku R.Sulanke i P.Wintgena [4]. G-geometria wędług Sulanke jest to pewna kategoria związana z grupą G. Taką definicję geometrii przyjmuję również w tej pracy nie zakładając jednak, że G musi być koniecznie grupą Liego i nazywam także geometrią Kleina grupy G, ponieważ określona w ten sposób geometria jest związana z pewną przestrzenią Kleina, w której działa grupa przekształceń izomorficzna z G.
Wydaje się, że tak określona geometria najbardziej odpowiada tym intuicjom, które zawarte są w oryginalnej definicji Kleina.Ich dokładne sprecyzowanie możliwe było dopiero na gruncie teorii kategorii, która powstała stosunkowo niedawno. Tym tłumaczy się fakt, że dopiero teraz można było podać dokładną definicję geometrii. Jednocześnie jeszcze raz uwydatnia się genialność intuicji Kleina.

W pracy wprowadzam trzy kategorie. Kategorię obiektów abstrakcyjnych OA, która jest uogólnieniem kategorii lewnych grup przekształceń wprowadzonej przez P. Sulanke w [1], kategorię przestrzeni Kleina PK i kategorię OG, która jest właśnie G-geometrią lub geometrią Kleina grupy G. PK i OG są podkategoriami kategorii OA. Obiektami G-geometrii są obiekty geometryczne odpowiedniej przestrzeni Kleina, a morfizmami są odwzorowania niezmiennicze. W ten sposób G-geometria zawiera wszystkie własności niezmiennicze względem danej grupy przekształceń, zgodnie z sugestią Kleina.

Kategoria obiektów geometrycznych została przedstawiona w pracy [8], która jest streszczeniem referatu wygłoszonego na Międzynarodowej Konferencji Geometrycznej w Debreczynie w roku 1975. Pewne własności tej kategorii badał E. Zaporowski w pracy [9].

1. Kategoria obiektów abstrakcyjnych

Przejdę teraz do określenia wyżej wspomnianych kategorii.Definicja kategorii podana jest w książce Z. Semadeniego i A. Wiwegera [5]. W myśl definicji kategoria składa się z klasy obiektów, zbiorów morfizmów przy-

porządkowanych każdej parze obiektów i prawa kompozycji, które spełniają pewne postulaty.

Najpierw określę kategorię obiektów abstrakcyjnych OA. Obiektami tej kategorii są tzw. obiekty abstrakcyjne, morfizmami - odwzorowania ekwiwariantne, które są parami odwzorowań spełniających pewne warunki, a kompozycją - składanie par odwzorowań. Pojęcia te określę kolejno.

Przez obiekt abstrakcyjny o włóknie $\mathfrak{M}$, grupie G i działaniu F rozumiem trójkę

$$(\mathfrak{M}, G, F), \tag{1}$$

gdzie działanie F jest to odwzorowanie produktu $\mathfrak{M} \times G$ w $\mathfrak{M}$ spełniające dwa warunki:
równanie translacji (fundamentalne)

$$\bigwedge_{\omega \in \mathfrak{M}} \quad \bigwedge_{g_1, g_2 \in G} \quad F(F(\omega, g_1)g_2) = F(\omega, g_2 g_1) \tag{2}$$

warunek identyczności

$$F(\omega, e) = \omega, \tag{3}$$

e jest elementem neutralnym grupy G.
F nazywa się również lewostronnym działaniem grupy G na $\mathfrak{M}$, a trójka (1) lewostronną grupą przekształceń na $\mathfrak{M}$. Działanie F oznacza się również algebraicznie $F(\omega, g) = g\,\omega$.

Niech $(\mathfrak{M}_1, G_1, F_1)$ będzie innym obiektem abstrakcyjnym. Odwzorowaniem ekwiwariantnym obiektu (1) w ten obiekt nazywać będę za Sulanke parę odwzorowań

$$(h, \varphi) \tag{4}$$

gdzie $h = \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_1$, a φ jest homomorfizmem grupy G w G_1, która spełnia warunek

$$\bigwedge_{\omega \in \mathfrak{M}} \quad \bigwedge_{g \in G} \quad F_1(h(\omega), \varphi(g)) = h(F(\omega, g)) \tag{5}$$

Warunek ten można zapisać w postaci diagramu:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M} \times G \arrow[r, "h \times \varphi"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr] & \mathfrak{M}_1 \times G_1 \arrow[d, "F_1"] \\
\mathfrak{M} \arrow[r, "h"] & \mathfrak{M}_1
\end{tikzcd}$$

Oznacza on następującą równość odwzorowań:

$$F_1 \circ (h \times \varphi) = h \circ F.$$

Kategorię, w której obiektami są obiekty abstrakcyjne (1), morfizmami - odwzorowania ekwiwariantne (4), a kompozycją - składanie par odwzorowań, nazywam kategorią obiektów abstrakcyjnych i oznaczam symbolem OA.

Podam teraz pewne własności trójek (1), na które należy zwrócić uwagę. Oznaczmy przez F_g odwzorowanie $\mathfrak{M}$ w $\mathfrak{M}$ otrzymane z F przez ustalenie elementu g grupy G,

$$F_g : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}, \bigwedge \omega \in \mathfrak{M} \qquad F_g(\omega) := F(\omega, g) \tag{6}$$

Prosty przykład pokazuje, że jeżeli F spełnia tylko warunek (2), to F_g nie musi być bijekcją. Wystarczy wziąć trójkę (R, R_*, F), gdzie R jest zbiorem liczb rzeczywistych, R_* grupą multiplikatywną liczb rzeczywistych niezerowych, a F jest określone wzorem $F(\omega, g) := |g\omega|$. Natomiast zachodzi

Lemat 1

Jeżeli są spełnione warunki (3) i (2), to dla każdego $g \in G$, F_g jest bijekcją $\mathfrak{M}$ na $\mathfrak{M}$.
Zbiór tych bijekcji $\mathcal{G}(G) := \{F_g;\ g \in G\}$ ze składaniem tworzy grupę przekształceń $\mathfrak{M}$ na siebie. Grupa $\mathcal{G}(G)$ jest homomorficznym obrazem grupy G.

Dowód

Z równań (3) i (2) wynikają związki dla każdego $g \in G$, $F_g \circ F_{g^{-1}} = F_{g^{-1}} F_g = F_e = id|_{\mathfrak{M}}$, a więc F_g są bijekcjami i $F_g^{-1} = F_{g^{-1}}$.
Z równania translacji (2) wynika dalej, że $\bigwedge g_1, g_2 \in G\ F_{g_2} F_{g_1} = F_{g_2 g_1}$
Wynika stąd, że zbiór $\mathcal{G}(G)$ bijekcji tworzy grupę przekształceń, bo złożenie dwóch przekształceń i przekształcenie odwrotne do tego zbioru należą. Oznaczmy przez $\varphi : G \to \mathcal{G}(G)$ odwzorowanie określone wzorem:

$$\bigwedge g \in G\ \varphi(g) := F_g.$$

Z równania translacji (2) wynika, że φ jest homomorfizmem. Homomorfizm ten jest na podstawie definicji grupy $\mathcal{G}(G)$ epimorfizmem.

Wiadomo, że obraz homomorficzny grupy w półgrupę jest grupą. A więc, jeżeli tylko spełnione jest równanie translacji (2), to $\mathcal{G}(G)$ jest grupą i istnieje homomorfizm grupy G na $\mathcal{G}(G)$. Ale wtedy $\mathcal{G}(G)$ nie musi być grupą przekształceń zbioru $\mathfrak{M}$ na siebie.

Lemat 2 pokazuje, że w definicji obiektu abstrakcyjnego warunek (3) można zastąpić innymi warunkami.

Lemat 2

Jeżeli istnieje takie $g \in G$, że F_g jest injekcją lub F_g jest surjekcją i zachodzi równanie translacji, to zachodzi warunek identyczności (3).

Dowód

Niech F_g będzie injekcją. Weźmy dowolne $\omega \in \mathfrak{M}$. Mamy $F(F(\omega,e), g) = F(\omega,g)$. Ponieważ F_g jest różnowartościowe, zachodzi więc warunek identyczności $F(\omega,e) = \omega$. Niech teraz F_g będzie surjekcją. Weźmy dowolne $\omega \in \mathfrak{M}$. Dla tego ω istnieje takie $\omega_0 \in \mathfrak{M}$, że $F(\omega_0,g) = \omega$. Wynika stąd na podstawie równania translacji (2) $F(\omega,e) = F(F(\omega_0,g),e) = F(\omega_0,e.g) = F(\omega_0,g) = \omega$. A więc zachodzi również warunek identyczności (3).

Lemat 2 wskazuje, że warunek identyczności (3) można zastąpić warunkiem, że choć jedno F_g jest injekcją lub choć jedno F_g jest surjekcją. Wtedy już wszystkie F_g muszą być bijekcjami. Ale nawet wtedy, gdy $\mathcal{G}(G)$ jest grupą przekształceń, grupa ta nie musi być izomorficzną z G. Pokazuje to następujący przykład. Niech $\mathfrak{M} = R$, $G = GL(n,R)$, a działanie F jest określone wzorem $F(\omega,A) := (\mathrm{Det}\, A)\omega$. Trójka $(R, GL(n,R), F)$ jest obiektem abstrakcyjnym, ale grupa $\mathcal{G}(G) = \left\{F_A;\ A \in GL(n,R)\right\} = \left\{f_\lambda : R \to R, \lambda \in R, \lambda \neq 0,\ f_\lambda(\omega) := \lambda\omega\right\}$ nie jest dla $n \geq 2$ izomorficzną z $GL(n,R)$.
Aby G i $\mathcal{G}(G)$ były izomorficzne należy przyjąć dodatkowe założenie, np. założenie, że G działa na $\mathfrak{M}$ efektywnie. Dla uniknięcia nieporozumień przypomnimy definicję efektywności.

Działanie F grupy G na $\mathfrak{M}$ nazywamy efektywnym, jeżeli zachodzi implikacja

$$\bigwedge \omega \in \mathfrak{M} \quad F(\omega,g) = \omega \Rightarrow g = e. \tag{7}$$

Zachodzi

Lemat 3

Jeżeli G działa na $\mathfrak{M}$ efektywnie, to G i grupa przekształceń $\mathcal{G}(G)$ są izomorficzne.

Dowód

Wystarczy pokazać, że jądro epimorfizmu φ określonego w dowodzie lematu 2 jest elementem neutralnym grupy G.
Mamy $\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathrm{id}|\mathfrak{M}) = \left\{g \in G;\ \varphi(g) = \mathrm{id}|\mathfrak{M}\right\} = \left\{g \in G;\ F_g = \mathrm{id}|\mathfrak{M}\right\} = \left\{g \in G;\ F_g(\omega) = \omega, \bigwedge \omega \in \mathfrak{M}\right\} = \left\{g \in G;\ F(\omega,g) = \omega\right\} = \left\{e\right\}$.
Ponieważ chcemy, aby grupa G jednoznacznie wyznaczała grupę przekształceń i odwrotnie, naturalnym będzie przyjąć, że w przestrzeni Kleina grupa G działa efektywnie. W ten sposób dochodzimy do następującej definicji przestrzeni Kleina.

Definicja

Przestrzenią Kleina nazywamy obiekt abstrakcyjny, efektywny, tzn. trójkę

$$(M, G, f), \tag{8}$$

gdzie: M jest zbiorem niepustym, G - dowolną grupą, a f efektywnym działaniem grupy G na M. M nazywamy również przestrzenią, a jej elementy - punktami.

Z lematu 3 wynika, że grupa G i grupa przekształceń $\mathcal{G}(G)$ indukowana przez f są izomorficzne. W ten sposób trójkę (8) możemy zastąpić parę

$$(M, \mathcal{G}(G)). \tag{9}$$

Związek między (8) i (9) usprawiedliwia nazwę przestrzeni Kleina również dla trójki (8). Zostanie on rozpatrzony nieco dokładniej na gruncie teorii kategorii.

2. Kategoria przestrzeni Kleina PK

Określimy teraz kategorię przestrzeni Kleina. Jako klasę obiektów tej kategorii weźmiemy klasę przestrzeni Kleina określonych przez (8). Morfizmy i kompozycję określamy tak, jak w kategorii obiektów abstrakcyjnych. W ten sposób kategoria PK jest podkategorią kategorii obiektów abstrakcyjnych OA. Nie wiem czy jest to podkategoria pełna?

Określimy teraz inną jeszcze kategorię, której obiektami będą także przestrzenie Kleina, ale traktowane jako pary $(M, \mathcal{G})$, gdzie M jest dowolnym zbiorem niepustym, a $\mathcal{G}$ jest grupą przekształceń zbioru M na siebie. Kategorię tę dla odróżnienia oznaczymy przez $\widetilde{PK}$. Morfizmem pary $(M, \mathcal{G})$ w parę $(M_1, \mathcal{G}_1)$ w tej kategorii będziemy nazywać parę odwzorowań (h, φ), gdzie h jest odwzorowaniem M w M_1, a φ homomorfizmem grupy $\mathcal{G}$ w $\mathcal{G}_1$. Odwzorowania te spełniają warunek ekwiwariantności

$$\bigwedge_{g \in \mathcal{G}} h \circ g = \varphi(g) \circ h. \tag{10}$$

Kompozycją będzie tak jak poprzednio składanie par odwzorowań.

Okazuje się, że istnieje funktor kowariantny kategorii PK na kategorię $\widetilde{PK}$, który izomorficzne trójki (8) odwzorowuje na izomorficzne pary $(M, \mathcal{G})$. Funktor $\mathcal{F}$ obiekty i morfizmy kategorii PK odwzorowuje w sposób następujący:

$$\bigwedge_{(M, G, f)} \mathcal{F}((M, G, f)) := (M, \mathcal{G}(G))$$

$$\bigwedge_{(h,\varphi) \in \mathrm{Hom}((M, G, f), (M_1, G_1, f_1))}$$

$$\mathcal{F}(h, \varphi) := (h, \tilde{\varphi}) \in \mathrm{Hom}((M, \mathcal{G}(G)), (M_1, \mathcal{G}(G_1)))$$

takie, że

$$\tilde{\varphi}(f_g) := f_{1\varphi(g)}$$

Natomiast funktor do niego odwrotny na obiektach i morfizmach kategorii $\widetilde{PK}$ przyjmuje wartości niżej podane.

$$\Lambda(M,\mathcal{G}) \quad \mathcal{F}^{-1}((M,\mathcal{G})) = (M, \mathcal{G}, f) \quad f(x,g) := g(x)$$

$$\mathcal{F}^{-1}((h,\tilde{\varphi})) = (h,\tilde{\varphi}) \in \mathrm{Hom}((M, \mathcal{G}, f), (M_1, \mathcal{G}_1, f_1)).$$

Obie te kategorie mają te same własności. Trójka (8) jest tylko innym przedstawieniem pary $(M,\mathcal{G})$. W różnych sytuacjach różne przedstawienia mogą być wygodniejsze i dlatego znajomość różnych przedstawień może być pożyteczna.

3. Geometria Kleina grupy G

Określę teraz wspomnianą we wstępie G-geometrię czyli geometrię Kleina grupy G. Najpierw zdefiniuję obiekt geometryczny w przestrzeni Kleina (8).

Definicja

Obiektem geometrycznym w przestrzeni Kleina (8) nazywam obiekt abstrakcyjny o tej samej grupie G, która występuje w (8), tzn. trójkę

$$(\mathfrak{M}, G, F) \tag{11}$$

gdzie $\mathfrak{M}$ jest dowolnym zbiorem, G - grupą występującą w (8), a F - niekoniecznie efektywnym działaniem grupy G na $\mathfrak{M}$. Zbiór $\mathfrak{M}$ nazywamy włóknem obiektu (11). Nie ma żadnego związku między włóknem obiektu $\mathfrak{M}$ i przestrzenią Kleina M.

Jedynym elementem, który łączy obiekt geometryczny z przestrzenią Kleina, dla której jest utworzony, jest grupa G.

Klasa obiektów (11) z tą samą grupą G, z morfizmami określonymi przez pary odwzorowań $(h, \mathrm{id}|G)$ ekwiwariantnych i składaniem par odwzorowań jako kompozycją tworzy kategorię.

Definicja

Kategorię tę nazywamy za Sulanke G-geometrią lub geometrią Kleina grupy G.

Odwzorowania h, które są składowymi morfizmów w G-geometrii nazywają się również odwzorowaniami niezmienniczymi.

Niech $(\mathfrak{M}, G, F)$ i $(\mathfrak{M}_1, G, F_1)$ będą dwoma obiektami w tej samej geometrii, a $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_1$ odwzorowaniem niezmienniczym. Jeżeli h jest ponadto surjekcją, tzn. $h(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_1$, to obiekt $(\mathfrak{M}_1, G, F_1)$ nazywamy komitantą obiektu $(\mathfrak{M}, G, F)$. Głównym zadaniem w każdej geometrii jest wyznaczanie obiektów, ich komitant, odwzorowań niezmienniczych czyli morfizmów i ba-

danie równoważności obiektów, tzn. izomorfizmów w odpowiednich kategoriach.

Jak widać G-geometria jest podkategorią kategorii obiektów abstrakcyjnych OA, natomiast nie jest podkategorią przestrzeni Kleina PK, G-geometria nie jest podkategorią pełną.

Z ujęcia obiektów abstrakcyjnych przestrzeni Kleina i obiektów geometrycznych jako obiektów pewnych kategorii wynika szereg ogólnych własności tych pojęć. W szczególności daje się określić pojęcie równoważności obiektów abstrakcyjnych, przestrzeni Kleina i obiektów geometrycznych w sposób jednolity jako izomorfizmów w odpowiednich kategoriach. Mimo szerokiego zainteresowania się od wielu lat przestrzeniami Kleina nie spotkałem dotychczas ścisłej definicji równoważności takich przestrzeni. Na gruncie teorii kategorii definicja taka nasuwa się w sposób automatyczny.

LITERATURA

[1] E.J..Jasińska, N. Kucharzewski: Kleinische Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte, Colloq.Math. 26 (1972), s. 271-279.

[2] F. Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872, Math. Ann. 43 (1893).

[3] R. Sulanke: Zu den Grundlagen der Differentialgeometrie, Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Math. - Mat. R. 19 (1970) 6, s. 589-592.

[4] R. Sulanke und P. Wintgen: Differentialgeometrie und Faserbündel, Berlin 1972, (tłumaczenie polskie, Warszawa 1977).

[5] Z. Semadeni i A. Wiweger: Wstęp do teorii kategorii i funktorów, Warszawa 1978.

[6] B.A. Rozenfeld: Neewklidowy prostranstwa, Moskwa 1969.

[7] E. Cartan: La theorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs, Mémorial des sciences mathematiques, 42 Paris 1930.

[8] M. Kucharzewski: Über die Grundlagen der Kleinschen Geometrie, Periodica Math. Hungarica 8 (1), (1977), s. 83-89.

[9] E. Zaporowski: Podstawowe własności kategorii obiektów abstrakcyjnych Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 560, s. Matematyka-Fizyka z. 30 Gliwice 1979 s. 235-242.

ПОНЯТИЕ ПРОСТРАНСТВА КЛЕИНА И ЕГО ГЕОМЕТРИИ

Р е з ю м е

Пространство Клеина это тройка (1) (M, G, f), где M - произвольное множество, G - произвольная группа, а f - обозначает эффективное действие G на M. Геометрия Клейна или G-геометрия это некоторая категория, объектами которой являются геометрические объекты пространства (1). Одновременно были определены категория абстрактных объектов и категория пространств Клеина, а также их основные свойства.

THE CONCEPT OF KLEIN SPACE AND ITS GEOMETRY

S u m m a r y

The Klein space is the three (1) (M, G, f), where M is an arbitrary set, G is an arbitrary group and f denotes effective acting of the group G on M. The Klein geometry is a category whose objects are the geometric object of Klein space (1). Categories of abstract objects and of Klein space are also introduced and their basic properties are given.

Recenzent: Doc. dr St. Midura

Wpłynęło: 27.I.1981 r.