ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Grażyna KOZŁOWSKA

APROKSYMACJA W UOGÓLNIONYCH PRZESTRZENIACH ORLICZA, RODZINĄ OPERATORÓW LINIOWYCH $\mathcal{H}$ -OGRANICZONYCH

Streszczenie. Pewne wyniki uzyskane przez J. Musielaka w pracy [3] przeniesiono na uogólnione przestrzenie Orlicza, aproksymując w tych przestrzeniach funkcje dwóch zmiennych, rodziną operatorów liniowych $\mathcal{H}$ -ograniczonych.

Wstęp

Niech $\Omega_i \subset R$ $(i = 1,2)$ będą przedziałami, mogą być niewłaściwe. X_1 niech będzie przestrzenią funkcji $x=x(.,t_2)$ dla prawie wszystkich t_2 określonych i mierzalnych na Ω_1 o wartościach rzeczywistych, prawie wszędzie skończonych.

Niech $\varphi = \varphi(t_1,u) : \Omega_1 \times R \to R_+ = [0,\infty)$ będzie φ - funkcją z parametrem t_1 ([3]), a $\rho_1[x(*,t_2)] = \int_{\Omega_1} \varphi[t_1,x(t_1,t_2)]\,dt_1$ modularem w X_1 dla prawie wszystkich $t_2 \in \Omega_2$ ([3]), przy czym $\rho_1[x(*,t_2)]$ jest funkcją mierzalną na Ω_2 o wartościach prawie wszędzie skończonych.

$L^{*\varphi} = X_{\rho_1}$ niech oznacza przestrzeń modularną generowaną modularem ρ_1 ([3]).

Niech X_2 będzie przestrzenią funkcji $x=x(t_1,*)$ dla prawie wszystkich t_1 określonych i mierzalnych na Ω_2 o wartościach rzeczywistych, prawie wszędzie skończonych.

$\psi = \psi(t_2,u) : \Omega_2 \times R \to R_+$ niech będzie φ - funkcją z parametrem t_2, a $\rho_2[x(t_1,*)] = \int_{\Omega_2} \psi[t_2,x(t_1,t_2)]\,dt_2$ modularem w X_2 dla prawie wszystkich $t_1 \in \Omega_1$.

Niech $L^{*\psi} = X_{\rho_2}$ oznacza przestrzeń modularną generowaną modularem ρ_2.

$X = X(\Omega)$ niech będzie przestrzenią funkcji $x=x(t_1,t_2)$ określonych i mierzalnych w $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ o wartościach rzeczywistych, prawie wszędzie skończonych.

Niech $\rho(x) = \rho_2[\rho_1(x)] = \int_{\Omega_2} \psi\left\{t_2, \int_{\Omega_1} \varphi[t_1,x(t_1,t_2)]\,dt_1\right\} dt_2$, prawdziwe są wtedy następujące własności:

Własność 1

$\rho(x) = \rho_2[\rho_1(x)]$ jest modularem, gdy ρ_1 jest modularem wypukłym.

Dowód

1) $\rho(x) = \rho_2[\rho_1(x)] = \int_{\Omega_2} \psi\left\{t_2, \int_{\Omega_1} \varphi[t_1, x(t_1,t_2)]\,dt_1\right\} dt_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\Omega_1} \varphi[t_1, x(t_1,t_2)]\,dt_1 = 0$ dla prawie wszystkich t_2. Podobnie ostatnia równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x(t_1,t_2) = 0$ dla prawie wszystkich t_1. Ponadto, można wykazać, że jeśli $\exists_{B,\,|B|=0} \forall_{t_2 \in B'} \exists_{A_{t_2},\,|A_{t_2}|=0} \forall_{t_1 \in A'_{t_2}} x(t_1,t_2) = 0$, to $x(t_1,t_2) = 0$ prawie wszędzie w $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Zatem $\rho(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x(t_1,t_2) = 0$ prawie wszędzie.

2) Oczywiście $\rho(-x) = \rho(x)$.

3) Jeśli $a>0$, $b>0$, $a+b=1$, $x \in X$, $y \in X$ i ρ_1 jest modularem wypukłym, to $\rho(ax+by) = \rho_2[\rho_1(ax+by)] \leq \rho_2[a\rho_1(x) + b\rho_1(y)] \leq \rho_2[\rho_1(x)] + \rho_2[\rho_1(y)] = \rho(x) + \rho(y)$.

Własność 2

$\rho(x) = \rho_2[\rho_1(x)]$ jest modularem wypukłym, gdy ρ_1 i ρ_2 są wypukłe. Dowód jest oczywisty (własność 1 punkt 3).

Niech $L^{\varphi,\psi} = L^{\varphi,\psi}[\Omega] = X\rho$ oznacza przestrzeń modularną generowaną modularem ρ (uogólniona przestrzeń Orlicza), wtedy $|x|_\rho = \inf\{u>0: \rho(x/u) \leq u\}$ jest F normą w $L^{\varphi,\psi}$ ([4], tw. 1.5) i prawdziwa jest własność 3.

Własność 3

Zbieżność $x_n \to 0$ według F normy $|x|_\rho$ w $L^{\varphi,\psi}$ jest równoważna warunkowi $\forall_{a>0} \rho_2[\rho_1(ax_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dowód wynika z twierdzenia 1.6 w pracy [4].

Niech V będzie niepustym zbiorem par(v_1,v_2), $\mathcal{F}$ filtrem w rodzinie podzbiorów zbioru V ([1] str. 20). Mówimy, że funkcja $g: V \to R$ dąży do zera w sensie $\mathcal{F}$ tzn. $g(v_1,v_2) \xrightarrow{\mathcal{F}} 0$ jeśli $\forall_{\varepsilon>0} \exists$ zbiór $V_0 \in \mathcal{F}$ taki, że $|g(v_1,v_2)| < \varepsilon$ dla wszystkich $(v_1,v_2) \in V_0$.

Rodzina $T = (T_{v_1,v_2})_{(v_1,v_2)\in V}$ operatorów liniowych $T_{v_1,v_2}: L^{\varphi,\psi} \to L^{\varphi,\psi}$ nazywa się $\mathcal{F}$-ograniczoną, jeśli istnieją liczby dodatnie k_1, k_2 i funkcja $g: V \to R_+$ taka, że $g(v_1,v_2) \xrightarrow{\mathcal{F}} 0$ i dla każdego $x \in L^{\varphi,\psi}$ istnieje zbiór $V_x \in \mathcal{F}$ dla którego $\rho_2[\rho_1(T_{v_1,v_2}x)] \leq k_1\rho_2[\rho_1(k_2x)] + g(v_1,v_2)$ dla wszystkich $(v_1,v_2) \in V_x$.

Jeśli ρ_2 jest modularem wypukłym, to można stałą k_1 przyjąć równą 1.

Mówimy, że $x_n \xrightarrow{(\rho_1,\rho_2)} 0$ (zbieżność modularna w $L^{\varphi,\psi}$), jeśli istnieje $a>0$ takie, że $\rho_2[\rho_1(ax_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ρ_1,ρ_2) - domknięciem zbioru $S \in L^{\varphi,\psi}$ nazywa się zbiór wszystkich elementów $x \in L^{\varphi,\psi}$ takich, że $x_n - x \xrightarrow{(\rho_1,\rho_2)} 0$ dla ciągu $x_n \in S$.

$\omega_T(x,V) = \sup_{(v_1,v_2)\in V} \rho_2\left[\rho_1(T_{v_1,v_2}x-x)\right]$ dla każdego $V \in \mathcal{N}$ oznacza T - moduł gładkości elementu $x \in L^{\varphi,\psi}$.

Aproksymacja w przestrzeniach modularnych

Twierdzenie 1

Niech $T = (T_{v_1,v_2})_{(v_1,v_2)\in V}$ będzie $\mathcal{N}$-ograniczoną rodziną liniowych operatorów $T_{v_1,v_2}: L^{\varphi,\psi} \to L^{\varphi,\psi}$, gdzie φ jest funkcją wypukłą ze względu na u i niech $S_o \subset X$ spełnia warunki:

(a) dla każdego $x \in S_o$ i dla każdego $a>0$ $\rho_2\left\{\rho_1\left[a(T_{v_1,v_2}x-x)\right]\right\} \xrightarrow{\mathcal{N}} 0$

(b) $L_S^{\varphi,\psi}$ jest (ρ_1,ρ_2) - domknięciem w $L^{\varphi,\psi}$ zbioru S wszystkich skończonych liniowych kombinacji elementów zbioru S_o. Wtedy dla każdego $x \in L_S^{\varphi,\psi}$ istnieje $b>0$ takie, że $\rho_2\left\{\rho_1\left[b(T_{v_1,v_2}x-x)\right]\right\} \xrightarrow{\mathcal{N}} 0$.

Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia 1 w pracy [3].

Posługując się pojęciem T-modułu gładkości można tw. 1 zapisać w postaci tw. 2.

Twierdzenie 2

Niech $T = (T_{v_1,v_2})_{(v_1,v_2)\in V}$ będzie $\mathcal{N}$ ograniczoną rodziną operatorów liniowych $T_{v_1,v_2}: L^{\varphi,\psi} \to L^{\varphi,\psi}$, gdzie φ jest funkcją wypukłą ze względu na u i niech S_o będzie podzbiorem X,

Jeśli dla każdego $x \in S_o$ i dla każdego $a>0$ $\omega_T(ax,V) \xrightarrow{\mathcal{N}} 0$, to zbieżność ta zachodzi również dla każdego $x \in L_S^{\varphi,\psi}$ ze stałą a zależną od x.

W dalszych rozważaniach zakłada się stale wypukłość ze względu na u funkcji φ, aby uzyskać wypukłość modularu ρ_1 ([4] str. 8) i tym samym zgodnie z własnością 1 zapewnić to, by ρ był modularem.

Aproksymacja w uogólnionych przestrzeniach Orlicza

Niech $\Omega_i = [0,b) \subset R$, $0<b<\infty$ dla i=1,2. $\tau_{v_1,v_2}: X \to X$ niech będzie operatorem translacji $\tau_{v_1,v_2}x(t_1,t_2) = x(t_1+v_1, t_2+v_2)$, gdzie x jest funkcją wszędzie określoną, b - okresową ze względu na każdą zmienną.

Niech $V \subset R \times R$ i $\mathcal{N}$ będzie filtrem wszystkich otoczeń zera w R x R. $\tau = (\tau_{v_1,v_2})_{(v_1,v_2)\in R\times R}$ niech oznacza rodzinę operatorów translacji.

Mówimy, że S jest (ρ_1,ρ_2)-gęstym w $L^{\varphi,\psi}$ jeśli $L_S^{\varphi,\psi} = L^{\varphi,\psi}$.

Niech φ i ψ będą funkcjami b-okresowymi na całej osi ze względu na parametry $t_i \in [0,b)$ = 1,2 dla każdego $u \in R$.

Funkcję φ nazywamy τ-ograniczoną, jeśli istnieją dodatnie stałe k_1 i k_2 takie, że $\varphi(t-v,u) \leqslant k_1\varphi(t,k_2u) + f(t,v)$ dla $u,v,t \in R$, przy czym funkcja $f: R\times R \to R_+$ jest mierzalną i b-okresową ze względu na pierwszą zmienną i taka, że przyjmując dla każdego $v \in R$ oznaczenie $h(v) = \int_0^b f(t,v)dt$ otrzymujemy $H = \sup_{v\in R} h(v) < \infty$ i $h(v) \to 0$, gdy $v \to 0$ (patrz [3]).

Twierdzenie 3

(a) Jeśli φ i ψ są τ-ograniczone i $1 \in L^{*\psi}$, to rodzina τ operatorów translacji jest $\mathfrak{M}$-ograniczona.

(b) Jeśli dla każdego $a > 0$ $\int_{\Omega_2} \psi\left\{t_2, \int_{\Omega_1} \varphi[t_1,a]dt_1\right\}dt_2 < \infty$, to kombinacje liniowe elementów zbioru S_0 wszystkich funkcji charakterystycznych podzbiorów zbioru $[0,b; 0,b)$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a tworzą (ρ_1,ρ_2) - gęsty zbiór w $L^{\varphi,\psi}$ i dla każdego $x \in L^{\varphi,\psi}$ i pewnego $a > 0$ zależnego od x $\rho_2\left\{\rho_1\left[a(\tau_{v_1,v_2}x-x)\right]\right\} \xrightarrow{\mathfrak{M}} 0$.

Dowód

(a) $\mathfrak{M}$-ograniczoność rodziny τ wynika z nierówności

$$\rho_2\left[\rho_1(\tau_{v_1,v_2}x)\right] = \int_0^b \psi\left\{t_2, \int_0^b \varphi\left[t_1, x(t_1+v_1, t_2+v_2)\right]dt_1\right\}dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^b \psi\left\{t_2-v_2, \int_0^b \left[\varphi\left[t_1, kx(t_1,t_2)\right] + f_1(t_1,v_1)\right]dt_1\right\}dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^b \left\{k_1\psi\left\{t_2, k_2\int_0^b (\varphi\left[t_1, kx(t_1,t_2)\right] + f_1(t_1,v_1))dt_1\right\} + f_2(t_2,v_2)\right\}dt_2 =$$

$$= k_1\rho_2\left\{k_2\rho_1\left[kx(t_1,t_2)\right] + k_2\int_0^b f_1(t_1,v_1)dt_1\right\} + \int_0^b f_2(t_2,v_2)dt_2 =$$

$$= k_1\rho_2\left\{k_2\rho_1\left[kx(t_1,t_2)\right] + k_2h_1(v_1)\right\} + h_2(v_2) \leqslant$$

$$\leqslant k_1\rho_2\left\{2k_2\rho_1\left[kx(t_1,t_2)\right]\right\} + k_1\rho_2\left[2k_2h_1(v_1)\right] + h_2(v_2).$$

Jeśli $2k_2 < 1$, to $\rho_2\left\{2k_2\rho_1\left[kx(t_1,t_2)\right]\right\} \leqslant \rho_2\left\{\rho_1\left[kx(t_1,t_2)\right]\right\}$.

Jeśli $2k_2 \geqslant 1$, to z wypukłości ρ_1 wynika, że $\rho_1(\alpha x) \leqslant \alpha\rho_1(x)$, dla $\alpha \leqslant 1$ stąd $\frac{1}{\alpha}\rho_1(\alpha x) \leqslant \rho_1(x)$, gdzie $\frac{1}{\alpha} \geqslant 1$, więc

$$2k_2\rho_1\left[kx(t_1,t_2)\right] = 2k_2\rho_1\left[\frac{1}{2k_2}2k_2kx(t_1,t_2)\right] \leqslant \rho_1\left[2k_2kx(t_1,t_2)\right].$$

Niech $k_3 = \begin{cases} k & \text{gdy } 2k_2 < 1 \\ 2k_2k & \text{gdy } 2k_2 \geqslant 1 \end{cases}$ wtedy $\rho_2\left[\rho_1(\tau_{v_1,v_2}x)\right] \leqslant k_1\rho_2\left\{\rho_1\left[k_3x(t_1,t_2)\right]\right\} +$

$+ k_1\rho_2\left[2k_2h_1(v_1)\right] + h_2(v_2)$.

Gdy $v_1 \to 0$, to $2k_2h_1(v_1) \to 0$. Stąd i z tego, że $1 \in L^{*\psi}$ $\rho_2\left[2k_2h_1(v_1)\right] \to 0$, gdy $V_1 \to 0$

Zatem $\forall_{\varepsilon_1>0} \exists_{V_1 \subset R} \forall_{v_1 \in V_1} \rho_2\left[2k_2h_1(v_1)\right] < \varepsilon_1$.

Wiadomo również, że $\forall_{\varepsilon_2>0} \exists_{V_2 \subset R} \forall_{v_2 \in V_2} h_2(v_2) < \varepsilon_2$.

Niech $V_o = V_1 \times V_2$. Wtedy dla wszystkich par $(v_1,v_2) \in V_o$ $0 \leq g(v_1,v_2) = k_1\rho_2\left[2k_2h_1(v_1)\right] + h_2(v_2) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, a zatem $g(v_1,v_2) \xrightarrow{\mathcal{M}^*} 0$.

Jest więc rodzina $\mathcal{Z}$ $\mathcal{M}^*$-ograniczona.

(b) Niech $A_i \subset [0,b;0,b)$ $i=1,\dots,n$ będą zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a $\chi_{A_i}(t_1,t_2) \in S_o$;

$$x_n(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(t_1,t_2); \quad x_n \in S.$$

Wykażemy, że zbiór S jest (ρ_1,ρ_2) - gęsty w $L^{\varphi,\psi}$.

Niech $x \in L^{\varphi,\psi}$ i $x(t_1,t_2) \geq 0$. Istnieje wtedy niemalejący ciąg funkcji prostych całkowalnych $\{x_n\}$ taki, że $0 \leq x_n(t_1,t_2) \nearrow x(t_1,t_2)$ dla wszystkich $(t_1,t_2) \in [0,b;\ 0,b)$ ([5] str. 34).

Z ciągłości funkcji φ wynika, że przy ustalonym $\lambda > 0$ $\varphi\left[t_1,\lambda|\ x_n(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] \downarrow 0$.

Ponadto $\varphi\left[t_1,\lambda|x_n(t_2,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] \leq \varphi\left[t_1,\lambda|x_1(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right]$ i z założeń wynika, że dla każdego $t_2 \in [0,\ b)$ $\rho_1\left[\lambda\ |x_1(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] =$

$$= \int_0^b \varphi\left[t_1,\ \lambda|x_1(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] dt_1 \leq \int_0^b \varphi\left[t_1,2\lambda|x(t_1,t_2)|\right] dt_1 < \infty .$$

Stosując więc twierdzenie Lebesgue'a o przechodzeniu do granicy otrzymujemy, że dla każdego $t_2 \in [0,b)$

$$\int_0^b \varphi\left[t_1,\lambda|x_n(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] dt_1 \downarrow 0.$$

Stąd i z ciągłości funkcji ψ

$$\psi\left\{t_2,\ \int_0^b \varphi\left[t_1,\lambda|x_n(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] dt_1\right\} \leq$$

$$\leq \psi\left\{t_2,\ \int_0^b \varphi\left[t_1,\ \lambda|x_1(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] dt_1\right\}.$$

Z założeń $\rho_2\left\{\rho_1\left[\lambda|x_1(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right]\right\} =$

$$= \int_0^b \psi\left\{t_2,\ \int_0^b \varphi\left[t_1,\lambda|x_1(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] dt_1\right\} dt_2 \leq$$

$$\leq \int_0^b \psi\left\{t_2,\ \int_0^b \varphi\left[t_1,2\lambda|x(t_1,t_2)|\right] dt_1\right\} dt_2 < \infty .$$

Stosując ponownie twierdzenie Lebesgue'a otrzymujemy

$$\int_0^b \psi\left\{t_2, \int_0^b \varphi\left[t_1, \lambda|x_n(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right] dt_1\right\} dt_2 \downarrow 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

czyli $L^{\varphi,\psi}$ jest (ρ_1,ρ_2) - domknięciem zbioru S.
Zatem S jest (ρ_1,ρ_2) - gęstym w $L^{\varphi,\psi}$.

Jeśli odrzucić założenie o nieujemności funkcji x, to twierdzenie uzyskujemy poprzez przedstawienie funkcji x jako różnicy części dodatniej i ujemnej.

Niech $x(t_1,t_2) = x_+(t_1,t_2) - x_-(t_1,t_2)$ i niech $A_+ = \{(t_1,t_2) \in [0,b;0,b] : x(t_1,t_2) > 0\}$ oraz $A_- = [0,b;0,b) \setminus A_+$.
Wtedy, zgodnie z wykazanym poprzednio, istnieją ciągi $\{x_{+n}\}$, $\{x_{-n}\}$ funkcji prostych odpowiednio w A_+ i A_- takie, że istnieje $\alpha > 0$ przy którym $\rho_2\{\rho_1[\alpha|x_{+n}(t_1,t_2) - x_+(t_2,t_2)|]\} \to 0$, gdy $n \to \infty$ i istnieje $\beta > 0$, dla którego $\rho_2\{\rho_1[\beta|x_{-n}(t_1,t_2) - x_-(t_1,t_2)|]\} \to 0$, gdy $n \to \infty$.
Biorąc $x_n(t_1,t_2) = x_{+n} - x_{-n}$ i $2\lambda = \min(\alpha,\beta)$ otrzymujemy stąd, że istnieje $\lambda > 0$ dla którego

$$\rho_2\left\{\rho_1\left[\lambda|x_n(t_1,t_2) - x(t_1,t_2)|\right]\right\} \leq$$
$$\leq \rho_2\left\{\rho_1\left[\tfrac{1}{2}\, 2\lambda|x_{+n} - x_+| + \tfrac{1}{2}\, 2\lambda|x_{-n} - x_-|\right]\right\} \leq$$
$$\leq \rho_2\left\{\rho_1\left[2\lambda|x_{+n} - x_+|\right]\right\} + \rho_2\left\{\rho_1\left[2\lambda|x_{-n} - x_-|\right]\right\} \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

Część pierwsza tezy (b) jest prawdziwa również, gdy S_0 oznacza zbiór wszystkich funkcji charakterystycznych podzbiorów zbioru $[0,b;0,b)$, mierzalnych w sensie Lebesgue'a, postaci $P = B_1 x B_2$, gdzie $B_i \subset [0,b)$ $i=1,2$. Wynika to stąd, że A_i będąc sumami przeliczalnej ilości prostokątów rozłącznych $(A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_i)$ na miarę $\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j)$, a więc

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n>N} \left|\mu(A_i) - \sum_{j=1}^{n} \mu(P_j)\right| < \varepsilon.$$

Jeśli x jest funkcją charakterystyczną zbioru $A = B_1 x B_2$, gdzie $B_i \subset [0,b)$ dla $i=1,2$, to z założeń wynika, że dla każdej pary

$$(v_1,v_2) \in R x R \quad \rho_2\left\{\rho_1\left[a(\tau_{v_1,v_2} x - x)\right]\right\} =$$

$$= \int_0^b \psi\left\{t_2, \int_0^b \varphi\left[t_1, a(\tau_{v_1,v_2} x - x)\right] dt_1\right\} dt_2 =$$

$$= \int_{(B_2 - v_2)\setminus B_2} \psi\left[t_2, \int_{B_1 - v_1} \varphi(t_1,a) dt_1\right] dt_2 +$$

$$= \int_{(B_2 - v_2)\cap B_2} \psi\left[t_2, \int_{(B_1 - v_1)\setminus B_1} \varphi(t_1,a) dt_1\right] dt_2 +$$

$$+\int_{B_2}\psi\Big[t_2,\int_{B_1\setminus(B_1-v_1)}\varphi(t_1,a)dt_1\Big]dt_2+$$

$$+\int_{B_2\setminus(B_2-v_2)}\psi\Big[t_2,\int_{B_1\cap(B_1-v_1)}\varphi(t_1,a)dt_1\Big]dt_2<\infty .$$

Ponadto jeśli $(v_1,v_2)\to 0$, to miary zbiorów po których liczone są cztery ostatnie całki dążą do zera. Stąd wynika, że $\rho_2\Big\{\rho_1\big[a(\tau_{v_1,v_2}x-x)\big]\Big\}\to 0$, gdy $(v_1,v_2)\to 0$.

Z twierdzeń 2 i 3 wynika twierdzenie następujące

Twierdzenie 4

Jeśli φ i ψ są τ-ograniczone i dla każdego $\alpha>0$

$$\int_{\Omega_2}\psi\Big\{t_2,\int_{\Omega_1}\varphi[t_1,a]dt_1\Big\}dt_2<\infty ,$$

to dla każdego $x\in L^{\varphi,\psi}$ i pewnego $c>0$ zależnego od x $\omega_\tau(cx,\delta_1,\delta_2)=$

$$=\sup_{\substack{|v_1|\le\delta_1\\|v_2|\le\delta_2}}\int_0^b\psi\Big\{t_2,\int_0^b\varphi\big[t_1,c(x(t_1+v_1,\ t_2+v_2)-x(t_1,\ t_2))\big]\,dt_1\Big\}dt_2\to 0,$$

gdy $\delta_1\to 0^+$ i $\delta_2\to 0^+$.

Niech $T_{w_1,w_2}x(s_1,s_2)=\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1-s_1,\ t_2-s_2)x(t_1,\ t_2)dt_1dt_2$ dla wszystkich (w_1,w_2) należących do pewnego zbioru W i $\mathcal{M}$ niech będzie filtrem w W.

Niech $K_{w_1,w_2}:[0,b)\times[0,b)\to R_+$ będzie funkcją okresową o okresie b ze względu na każdą zmienną w $R\times R$ spełniającą dla $(w_1,w_2)\in W$ warunki

$$\sigma(w_1,w_2)=\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2\xrightarrow{\mathcal{M}}1,$$

$$\sigma_\delta(w_1,w_2)=\int_\delta^{b-\delta}\int_\delta^{b-\delta}K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2\xrightarrow{\mathcal{M}}0\quad\text{dla każdego}\quad 0<\delta<\frac{b}{2}$$

$$\sigma=\sup_{(w_1,w_2)\in W}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2<\infty .$$

Twierdzenie 5

Niech φ i ψ będą wypukłymi τ-ograniczonymi φ-funkcjami z parametrem i niech $1\in L^{*\psi}$. Wtedy $T=(T_{w_1,w_2})_{(w_1,w_2)\in W}$ jest $\mathcal{M}$-ograniczony.

Dowód

Wykorzystując b-okresowość $\varphi(.,u_1)$, $\psi(.,u_2)$ i $x(.,.)$, nierówność Jensena ([2]) i τ-ograniczoność φ i ψ z $k_1 = 1$, $k_2 > 1$, $k_3 \geqslant 1$ otrzymujemy dla $x \in L^{\varphi,\psi}$

$$\rho_2\left[\rho_1(T_{w_1,w_2}x)\right] =$$

$$= \int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1, \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\sigma(w_1,w_2)x(s_1+t_1,s_2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t_2)dt_1dt_2\right]ds_1\right\}ds_2 \leqslant \int_0^b \psi\left\{s_2, \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\varphi\left[s_1,\sigma(w_1,w_2)x(s_1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t_1,s_2+t_2)\right]dt_1dt_2ds_1\right\}ds_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1,\sigma(w_1,w_2)x(s_1+t_1,s_2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t_2)\right]ds_1\right\}dt_1dt_2ds_2 = \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2) \int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1,\right.\right.$$

$$\left.\left.\sigma(w_1,w_2)x(s_1+t_1,s_2+t_2)\right]ds_1\right\}ds_2dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2) \int_0^b \psi\left\{u_2-t_2, \int_0^b \varphi\left[u_1-t_1, \sigma(w_1,w_2)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.x(u_1,u_2)\right]du_1\right\}du_2dt_1dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2) \int_0^b (\psi\left\{u_2,\bar{k}_2 \int_0^b \left[\varphi(u_1,k_2\sigma(w_1,w_2)x(u_1,u_2)) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ f_1(u_1,t_1)\right]du_1\right\} + f_2(u_2,t_2))du_2dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)(\int_0^b \psi(u_2,\bar{k}_2\left\{\int_0^b \varphi\left[u_1,k_2\sigma(w_1,w_2)x(u_1,u_2)\right]du_1 +\right.$$

$$\left.\left.+ h_1(t_1)\right\})du_2 + h_2(t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\left\{\int_0^b \frac{1}{2}\psi\left[u_2,2\bar{k}_2 \int_0^b \varphi\left[u_1,k_2\sigma(w_1,w_2)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.x(u_1,u_2)\right]du_1 + \frac{1}{2}\psi\left[u_2,2\bar{k}_2h_1(t_1)\right]\right)du_2 + h_2(t_2)\right\}dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)} \int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\left\{\frac{1}{2}\rho_2\left[2\bar{k}_2\rho_1(k_2\sigma(w_1,w_2)x(u_1,u_2))\right] +\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^b \psi\left[u_2, 2\bar{k}_2 h_1(t_1)\right] du_2 + h_2(t_2)\Big\} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_2\left\{2\bar{k}_2\rho_1\left[k_2\,\sigma(w_1,w_2)x(u_1,u_2)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\rho_2\left[2\bar{k}_2 h_1(t_1)\right] dt_1 dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)h_2(t_2)dt_1 dt_2 \leqslant \rho_2\left[\rho_1(k_2\sigma x)\right] + g(w_1,w_2),$$

gdzie $g(w_1,w_2) = \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\left\{\frac{1}{2}\rho_2\left[2\bar{k}_2 h_1(t_1) + h_2(t_2)\right]\right\} dt_1 dt_2$

Wystarczy teraz wykazać, że $g(w_1,w_2) \xrightarrow{\mathcal{M}^*} 0$, a stąd już wyniknie, że T jest $\mathcal{M}^*$-ograniczony.

Niech $F(t_1,t_2) = K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\left\{\frac{1}{2}\rho_2\left[2\bar{k}_2 h_1(t_1)\right] + h_2(t_2)\right\}$, wtedy dla

$$0 < \delta < \frac{b}{2}\quad g(w_1,w_2) = \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\sum_{i=1}^{9} I_i, \text{ gdzie} \tag{1}$$

$$I_1 = \int_0^\delta\int_0^\delta F(t_1,t_2)dt_1 dt_2 \qquad I_2 = \int_\delta^{b-\delta}\int_0^\delta F(t_1,t_2)dt_1 dt_2$$

$$I_3 = \int_{b-\delta}^{b}\int_0^\delta F(t_1,t_2)dt_1 dt_2 \qquad I_4 = \int_0^\delta\int_\delta^{b-\delta} F(t_1,t_2)dt_1 dt_2$$

$$I_5 = \int_0^\delta\int_{b-\delta}^{b} F(t_1,t_2)dt_1 dt_2 \qquad I_6 = \int_\delta^{b-\delta}\int_\delta^{b-\delta} F(t_1,t_2)dt_1 dt_2$$

$$I_7 = \int_{b-\delta}^{b}\int_{b-\delta}^{b} F(t_1,t_2)dt_1 dt_2 \qquad I_8 = \int_\delta^{b-\delta}\int_{b-\delta}^{b} F(t_1,t_2)dt_1 dt_2$$

$$I_9 = \int_{b-\delta}^{b}\int_\delta^{b-\delta} F(t_1,t_2)dt_1 dt_2$$

Wiadomo, że $\forall_{\varepsilon_2>0}\ \exists_{\delta_2>0}\ \forall_{t_2<\delta_2}\ h_2(t_2)<\varepsilon_2$ i $\forall_{\varepsilon_1>0}\ \exists_{\delta_1>0}\ \forall_{t_1<\delta_1}\ 2\bar{k}_2 h_1(t_1)<\varepsilon_1$.

Ponadto ponieważ $1 \in L^{*\varphi}$, więc

$$\forall_{\varepsilon_3>0}\ \exists_{\varepsilon_1>0}\ \forall_{2\bar{k}_2 h_1(t_1)<\varepsilon_1}\ \frac{1}{2}\rho_2\left[2\bar{k}_2 h_1(t_1)\right] < \varepsilon_3.$$

Przyjmujemy $\delta > 0$ mniejsze od $\min(\delta_1,\delta_2)$.

Oznaczając $H_1 = \sup_{t_1 \in [0,b)} h_1(t)$, $H_2 = \sup_{t_2 \in [0,b)} h_2(t_2)$ otrzymujemy

$$I_1 \leq \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)dt_1dt_2 < \varepsilon_4\, \sigma(w_1,w_2)$$

$$I_2 \leq \int_{\delta}^{b-\delta}\int_0^{\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\left[\tfrac{1}{2}\rho_2(2\bar{k}_2H_1) + H_2\right]dt_1dt_2 \leq$$

$$\leq c\int_{\delta}^{b-\delta}\int_0^{\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

ale $\forall_{\varepsilon_5>0}\ \exists_{\delta_3>0}\ \forall_{\delta<\delta_3} \int_0^{\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_2 < \varepsilon_5$ dla prawie wszystkich t_1, więc

$$\int_{\delta}^{b-\delta}\left[\int_0^{\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_2\right]dt_1 < \varepsilon_6, \quad \text{czyli} \quad I_2 < c\,\varepsilon_6 = \varepsilon_7.$$

Analogicznie $I_3 < \varepsilon_8$ $I_4 < \varepsilon_9$ $I_5 < \varepsilon_{10}$.

Z założenia wynika, że dla $(w_1,w_2) \in W_1 \in \mathfrak{M}$ $I_6 < \varepsilon_{12}$. Jest również prawdą, że $\forall_{\varepsilon_{13}>0}\ \exists_{\delta_4>0}\ \forall_{\delta<\delta_4} \int_{b-\delta}^{b} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_2 < \varepsilon_{13}$ dla prawie wszystkich

t_1, więc $\int_{b-\delta}^{b}\left[\int_{b-\delta}^{b} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_2\right]dt_1 < \varepsilon_{13}$, a stąd $I_7 < c\,\varepsilon_{13} = \varepsilon_{14}$.

Analogicznie $I_8 < \varepsilon_{15}$, $I_9 < \varepsilon_{16}$.

Przyjmując $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_4)$ otrzymujemy z (1)

$$g(w_1,w_2) < \varepsilon_4 + \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\,\varepsilon_{17} \quad \text{dla} \quad (w_1,w_2) \in W_1.$$

Ponieważ $\sigma(w_1,w_2) \xrightarrow{\mathfrak{M}} 1$, więc dla $(w_1,w_2) \in W_2 \in \mathfrak{M}$ przy zachowaniu warunku, że $(w_1,w_2) \in W_1$ otrzymujemy $g(w_1,w_2) < \varepsilon$ dla $(w_1,w_2) \in W_1 \cap W_2$. Zatem $g(w_1,w_2) \xrightarrow{\mathfrak{M}} 0$.

<u>Twierdzenie 6</u>

Niech φ i ψ będą wypukłymi τ-ograniczonymi φ-funkcjami z parametrem i dla każdego $a > 0$ $\int_{\Omega_2} \psi\left\{t_2, \int_{\Omega_1} \varphi\left[t_1, a\right]dt_1\right\}dt_2 < \infty$. Wtedy operatory $T_{w_1,w_2} : L^{\varphi,\psi} \to L^{\varphi,\psi}$ spełniają warunek $\rho_2\left\{\rho_1\left[a(T_{w_1,w_2}x - x)\right]\right\} \xrightarrow{\mathfrak{M}} 0$ dla każdego $x \in L^{\varphi,\psi}$ przy pewnym $a > 0$.

<u>Dowód</u>

Niech $x \in L^{\varphi,\psi}$ wtedy z twierdzenia 4 wiadomo, że $\omega_{\tau}(cx, \delta_1, \delta_2) \to 0$, gdy $\delta_1 \to 0^+$, $\delta_2 \to 0^+$ dla $c > 0$.

Wybierzmy $a>0$ tak, by $2a\sigma \leqslant c$ i $\rho_2\left[\rho_1(4\sigma kax)\right]<\infty$, gdzie k jest równe stałej k_2 z definicji τ-ograniczoności φ, a $k_1 = 1$. Możemy przyjąć $k_2 \geqslant 1$. Stąd

$$\rho_2\left\{\rho_1\left[a(T_{w_1,w_2}x-x)\right]\right\} =$$

$$= \int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1, \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\sigma(w_1,w_2)ax(s_1+t_1,s+t_2)dt_1dt_2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - ax(s_1,s_2)\right] ds_1\right\} ds_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1, \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\sigma(w_1,w_2)a(x(s_1+t_1,s_2+t_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x(s_1,s_2))dt_1dt_2 + \sigma(w_1,w_2)ax(s_1,s_2)\right] ds_1\right\} ds_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^b \psi\left\{s_2, \frac{1}{2}\int_0^b \varphi\left[s_1, \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)2\sigma(w_1,w_2)a(x(s_1+t_1,s_2+t_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x(s_1,s_2))dt_1dt_2\right] ds_1 + \frac{1}{2}\int_0^b \varphi\left[s_1, 2a(\sigma(w_1,w_2) - 1)x(s_1,s_2)\right] ds_1\right\} ds_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1, \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)2\sigma(w_1,w_2)a(x(s_1+t_1,s_2+t_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x(s_1,s_2))dt_1dt_2\right] ds_1\right\} ds_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1, 2a(\sigma(w_1,w_2) - 1)x(s_1,s_2)\right] ds_1\right\} ds_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^b \psi\left\{s_2, \frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\int_0^b \varphi\left[s_1, 2\sigma(w_1,w_2)a(x(s_1+t_1,s_2+t_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x(s_1,s_2))\right] ds_1 dt_1 dt_2\right\} ds_2 + \frac{1}{2}\rho_2\left\{\rho_1\left[2a(\sigma(w_1,w_2) - 1)x(s_1,s_2)\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\int_0^b\int_0^b K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1, 2\sigma a(x(s_1+t_1,s_2+t_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x(s_1,s_2))\right] ds_1\right\} ds_2 dt_1 dt_2 + \frac{1}{2}\rho_2\left\{\rho_1\left[2a(\sigma(w_1,w_2) - 1)x(s_1,s_2)\right]\right\}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$G(t_1,t_2) = K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\int_0^b \psi\left\{s_2, \int_0^b \varphi\left[s_1, 2\sigma a(x(s_1+t_1,s_2+t_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x(s_1,s_2))\right] ds_1\right\} ds_2$$ otrzymujemy $\rho_2\left\{\rho_1\left[a(T_{w_1,w_2}x-x)\right]\right\} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma(w_1,w_2)}\sum_{i=1}^{7} I_i +$

$+ \frac{1}{2}\rho_2\left\{\rho_1\left[2a(\sigma(w_1,w_2) - 1)x(s_1,s_2)\right]\right\}$, gdzie

$$I_1 = \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} G(t_1,t_2)dt_1dt_2 \qquad I_2 = \int_{b-\delta}^{b}\int_{b-\delta}^{b} G(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

$$I_3 = \int_{\delta}^{b-\delta}\int_{\delta}^{b-\delta} g(t_1,t_2)dt_1dt_2 \qquad I_4 = \int_{b-\delta}^{b}\int_{0}^{b-\delta} G(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

$$I_5 = \int_{0}^{b-\delta}\int_{b-\delta}^{b} G(t_1,t_2)dt_1dt_2 \qquad I_6 = \int_{\delta}^{b-\delta}\int_{0}^{\delta} G(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

$$I_7 = \int_{0}^{\delta}\int_{\delta}^{b-\delta} G(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

$$I_1 \leq \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\rho_2\left\{\rho_1\left[26a(\tau_{t_1,t_2}x-x)\right]\right\}dt_1dt_2 \leq \omega_\tau(26ax,\delta,\delta)\sigma(w_1,w_2)$$

$$I_2 \leq \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} K_{w_1,w_2}(b-u_1,b-u_2)\rho_2\left\{\rho_1\left[26a(\tau_{-u_1,-u_2}x-x)\right]\right\}du_1du_2 \leq$$

$$\leq \omega_\tau(26ax,\delta,\delta)\sigma(w_1,w_2)$$

$$I_3 \leq \frac{1}{2}\int_{\delta}^{b-\delta}\int_{\delta}^{b-\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\left\{\rho_2\left[\rho_1(46a\tau_{t_1,t_2}x)\right] + \rho_2\left[\rho_1(46ax)\right]\right\}dt_1dt_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{b-\delta}\int_{\delta}^{b-\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)\left\{\frac{1}{2}\rho_2\left[\rho_1(4k6ax)\right] + \frac{1}{2}b\psi\left[2h_1(t_1)\right] + h_2(t_2) + \right.$$

$$\left. + \rho_2\left[\rho_1(46ax)\right]\right\}dt_1dt_2 \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}\rho_2\left[\rho_1(4k6ax)\right] + \frac{1}{2}b\psi(2H_1) + \right.$$

$$\left. + H_2\right\}\int_{\delta}^{b-\delta}\int_{\delta}^{b-\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

Stąd i z założeń $\forall_{\varepsilon_1>0}\ \exists_{W_1\in\mathfrak{M}}\ \forall_{(w_1,w_2)\in W_1}\ I_3 < \varepsilon_1$

$$I_4 \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}\rho_2\left[\rho_1(4k6ax)\right] + \frac{1}{2}b\psi(2H_1) + H_2\right\}\int_{b-\delta}^{b}\int_{0}^{b-\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

ale $\forall_{\varepsilon_2>0}\ \exists_{\delta_1>0}\ \forall_{\delta<\delta_1}\ \int_{b-\delta}^{b} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1 < \varepsilon_2$ dla prawie wszystkich t_2,

więc $\int_{b-\delta}^{b}\int_{0}^{b-\delta} K_{w_1,w_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2 < \varepsilon_3$, czyli $I_4 < \varepsilon_4$.

Analogicznie $I_5 < \varepsilon_5$, $I_6 < \varepsilon_6$, $I_7 < \varepsilon_7$.

Jest więc $\rho_2\left\{\rho_1\left[a(T_{w_1,w_2}x-x)\right]\right\} \leq \omega_\tau(2\delta ax,\delta,\delta) + \frac{1}{2\delta(w_1,w_2)}\varepsilon_8 +$

$+ \frac{1}{2}\rho_2\left\{\rho_1\left[2a(\delta(w_1,w_2)-1)x(s_1,s_2)\right]\right\}$ dla wszystkich $(w_1,w_2)\in W_1$ i $\delta<\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$, gdzie δ_2, δ_3, δ_4 pojawiają się odpowiednio przy I_5, I_6, I_7.

Zgodnie z twierdzeniem 4 biorąc $\delta>0$ dostatecznie małe otrzymamy, że pierwszy składnik prawej strony jest $<\varepsilon_9$.

Stąd, że $\delta(w_1,w_2)\xrightarrow{\mathcal{M}} 1$ wynika, że dla $(w_1,w_2)\in W_2\in\mathcal{M}$ drugi składnik jest $<\varepsilon_{10}$ a trzeci $<\varepsilon_{11}$ dla $(w_1,w_2)\in W_3\in\mathcal{M}$.
Stąd dla $(w_1,w_2)\in W_1\cap W_2\cap W_3$ otrzymujemy, że $\rho_2\left\{\rho_1\left[a(T_{w_1,w_2}x-x\right]\right\}<\varepsilon$ a zatem $\rho_2\left\{\rho_1\left[a(T_{w_1,w_2}x-x)\right]\right\}\xrightarrow{\mathcal{M}} 0$.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. Warszawa 1969.

[2] Bari N.K.: Trigonometriczeskije rjady. Moskwa 1961.

[3] Musielak J.: Modular approximation by a filtered family of linear operators. Proceedings of the Conference on Functional Analysis and Approximation Oberwolfach, August 9-16, 1980. Birkhäuser Verlag 1981, 99-110.

[4] Musielak J.: Przestrzenie modularne. Poznań 1978.

[5] Musielak J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. Warszawa 1979.

АППРОКСИМАЦИЯ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА СЕМЕЙСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{M}$-ОГРАНИЧЕННЫХ

Р е з ю м е

Некоторые результаты полученные И. Муселяком в работе [3] были перенесен в обобщенные пространства Орлича, аппроксимируя в этих пространствах функции двух переменных семейством линейных операторов $\mathcal{M}$-ограниченных.

APPROXIMATION BY A FAMILY OF $\mathcal{W}$ - BOUNDED LINEAR OPERATORS IN THE GENERALIZED ORLICZ SPACES

S u m m a r y

In this paper the functions two variables from generalized Orlicz spaces are approximated by a family of $\mathcal{W}$ - bounded linear operators.

In order to put theorems on convolution operators and on moduli of smoothness the technique of filters (like in work [3] by J. Musielak was adopted.

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 07.12.1981 r.