ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Anna LASKOWSKA

O WARIACJACH MIESZANYCH RZĘDU DRUGIEGO (I)

Streszczenie. W pracy zdefiniowane zostały wariacje mieszane rzędu drugiego względem potęg $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ dla funkcji rzeczywistej, określonej na R^2, 2π-okresowej ze względu na każdą zmienną i mierzalnej.
Podane zostały podstawowe własności tych wariancji oraz zdefiniowana norma w przestrzeni $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ złożonej z funkcji o ograniczonych wariancjach mieszanych rzędu drugiego.

Niech f będzie funkcją rzeczywistą, określoną na R^2, 2π-okresową ze względu na każdą zmienną i mierzalną.

Definicja 1

Dla $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ wariacjami mieszanymi rzędu drugiego funkcji f nazywamy wyrażenia postaci

$$v^{(1)}(f) = \sup_{a,y} \sup_{\pi_a} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2} \left| f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + f(x_{k-1},y) \right| \right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}},$$

gdzie π_a jest podziałem $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = a + 2\pi)$ przedziału $[a, a + 2\pi]$,

$$v^{(2)}(f) = \sup_{b,x} \sup_{\pi_b} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2} \left| f(x,y_i) - 2f\left(x, \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) + f(x,y_i) \right| \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

gdzie: π_b jest podziałem $(b = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b + 2\pi)$ przedziału $[b, b + 2\pi]$,

$$v^{(3)}(f) = \sup_{a,b} \sup_{\pi_{ab}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{1}{4} \left| \Delta^{(2)}_{xy}(f;\, x_{k-1}, x_k, y_{i-1}, y_i) \right| \right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

gdzie: $\pi_{ab} = \pi_a \times \pi_b$,

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f;\, x_{k-1}, x_k, y_{i-1}, y_i) =$$

$$= f(x_k, y_i) - 2f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2},\, y_i\right) + f(x_{k-1},\, y_i) -$$

$$- 2f\left(x_k,\, \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2},\, \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right) - 2f\left(x_{k-1},\, \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right) +$$

$$+ f(x_k, y_{i-1}) - 2f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2},\, y_{i-1}\right) + f(x_{k-1}, y_{i-1}).$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\Delta_x^{(2)}(f;\, x_{k-1}, x_k) = f(x_k, y) - 2f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}, y\right) + f(x_{k-1}, y),$$

$$\Delta_y^{(2)}(f, y_{i-1}, y_i) = f(x, y_i) - 2f\left(x,\, \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right) + f(x, y_{i-1}),$$

$$v^{(1)}(f; \alpha, \beta) = \sup_{y} \sup_{\pi_\alpha} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2} \left|\Delta_x^{(2)}(f; t_{k-1}, t_k)\right|\right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}},$$

gdzie $\pi_\alpha = (\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta)$,

$$v^{(2)}(f; \gamma, \delta) = \sup_{x} \sup_{\pi_\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2} \left|\Delta_y^{(2)}(f; l_{i-1}, l_i)\right|\right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

gdzie $\pi_\gamma = (\gamma = l_0 < l_1 < \ldots < l_n = \delta)$,

$$v^{(3)}(f; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sup_{\pi_{\alpha\gamma}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{1}{4} \left|\Delta_{xy}^{(2)}(f; t_{k-1}, t_k, l_{i-1}, l_i)\right|\right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

gdzie: $\pi_{\alpha\gamma} = \pi_\alpha \times \pi_\gamma$

Wariacje $v^{(i)}$ dla $i = 1,2,3$ posiadają następujące własności:

1. $v^{(i)}(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| v^{(i)}(f) + |\beta| v^{(i)}(g)$

dla α, β rzeczywistych, g spełniających założenia jak f, $v^{(i)}(f)$, $v^{(i)}(g) < \infty$

Nierówność tę dostajemy uwzględniając liniowość $\Delta^{(2)}$ i stosując nierówność Minkowskiego (dla $V^{(3)}$ podwójnie).
Definiując wariacje mieszane na przedziałach dowolnych i uwzględniając powyższe oznaczenia otrzymamy kolejne własności.

2. Dla k_i i l_i całkowitych i takich, że $l_i - k_i$ jest podzielne przez 2 dla $i = 1,2$ zachodzą

a) $\sup\limits_{a}{}' V^{(1)}(f;\ k_1\pi,\ l_1\pi) \leq (l_1-k_1-1)V^{(1)}(f)$,

b) $\sup\limits_{b} V^{(2)}(f;\ k_2\pi,\ l_2\pi) \leq (l_2-k_2-1)V^{(2)}(f)$,

c) $\sup\limits_{a,b} V^{(3)}\ f;(k_1\pi,\ l_1\pi,\ k_2\pi,\ l_2\pi) \leq (l_1-k_1-1)(l_2-k_2-1)V^{(3)}(f)$.

Dowód

Dla dowolnego przedziału $[a+\alpha,\ a+\beta]$ i $\gamma \in (a+\alpha,\ a+\beta)$ oraz y ustalonego mamy

$$\sup_{\pi a+\alpha} \sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;\ a+\alpha,\ a+\beta)\right|\right)^{p_1} \leq$$

$$\leq \sup_{\pi_1} \sum_{k=1}^{m_1} \left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;\ a+\alpha,\ a+\gamma)\right|\right)^{p_1} + \sup_{\pi_2} \sum_{k=1}^{m_1} \left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;\ a+\gamma,a+\beta)\right|\right)^{p_1} +$$

$$+ \sup_{t_1,t_2} \Bigg\{ \left(\tfrac{1}{2}\left|f(a+t_1,y) - 2f\left(a + \tfrac{t_1+t_2}{2},\ y\right) + f(a+t_2,y)\right|\right)^{p_1} -$$

$$- \left(\tfrac{1}{2}\left|f(a+t_1,y) - 2f\left(a + \tfrac{t_1+\gamma}{2},y\right) + f(a+\gamma,y)\right|\right)^{p_1} -$$

$$- \left(\tfrac{1}{2}\left|f(a+\gamma,y) - 2f\left(a + \tfrac{\gamma+t_2}{2},y\right) + f(a+t_2,y)\right|\right)^{p_1},\ a+\alpha\leq a+t_1\leq a+\gamma\leq a+t_2< \alpha+\beta \Bigg\},$$

gdzie π_1 i π_2 są dowolnymi skończonymi podziałami przedziałów odpowiednio $[a+\alpha,\ a+\gamma]$ i $[a+\gamma,\ a+\beta]$.
Podnosząc teraz obie strony nierówności do potęgi $\frac{1}{p_1}$ i biorąc po obu stronach $\sup\limits_{a,y}$, po uwzględnieniu okresowości funkcji f prawą stronę szacujemy przez

$$\sup_{a} V^{(1)}(f;\ a+\alpha,\ a+\gamma) + \sup_{a} V^{(1)}(f;\ a+\gamma,\ a+\beta) + V^{(1)}(f).$$

Stąd wynika a). Analogicznie otrzymuje się b). W celu wykazania c) korzystamy z powyższej części dowodu dwa razy (iteracyjnie).

3. Wariacje mieszane rzędu drugiego są funkcjami monotonicznymi przedziału

a) $\sup\limits_{a} V^{(1)}(f;\ a+c,\ a+d) \leqslant \sup\limits_{a} V^{(1)}(f;\ a+c',\ a+d')$,

b) $\sup\limits_{b} V^{(2)}(f;\ b+e,\ b+g) \leqslant \sup\limits_{b} V^{(2)}(f;\ b+e',\ b+g')$,

c) $\sup\limits_{a,b} V^{(3)}(f;\ a+c, a+d, b+e, b+g) \leqslant \sup\limits_{a,b} V^{(3)}(f;\ a+c', a+d', b+e', b+g')$,

gdzie

$$c' < c < d \leqslant d' \quad \text{i} \quad e' \leqslant e < g \leqslant g'.$$

Dowód wynika z nierówności poniższej, gdzie π_i dla $i=1,2,3$ są dowolnymi skończonymi podziałami przedziałów odpowiednio $[a+c',\ a+c]$, $[a+c,\ a+d]$ i $[a+d,\ a+d']$:

$$\sup_{\pi_1} \sum_{k=1}^{m_1} \left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;a+c',a+c)\right|\right)^{p_1} + \sup_{\pi_2} \sum_{k=1}^{m_2} \left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;a+c,a+d)\right|\right)^{p_1} +$$

$$+ \sup \sum_{k=1}^{m_3} \left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;a+d,a+d')\right|\right)^{p_1} \leqslant \left(\sup_{a} V^{(1)}(f;a+c',a+d')\right)^{p_1}.$$

Dla b) dowód przebiegnie analogicznie. Dla c) korzystamy dwa razy z analogicznej nierówności.

<u>Definicja 2</u>

Zbiór funkcji f, dla których $V^{(i)}(f)$ dla $i=1,2,3$ są skończone oznaczać będziemy przez $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeśli $f \in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$, to f jest funkcją ograniczoną. Dowód przebiega analogicznie jak w [1].

Ponieważ funkcja mierzalna, rzeczywista, 2π-okresowa ze względu na każdą zmienną, dla której spełnione są następujące trzy warunki:

$$(1)\quad \sup_{a,y}\sup_{\pi_a}\sum_{k=1}^{m}\Phi_1\left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k)\right|\right)<\infty,$$

$$(2)\quad \sup_{b,x}\sup_{\pi_b}\sum_{i=1}^{n}\Phi_2\left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_y^{(2)}(f;\ y_{i-1},y_i)\right|\right)<\infty,$$

$$(3)\quad \sup_{a,b}\sup_{\pi_{ab}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Phi_3\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k y_{i-1},y_i)\right|\right)<\infty,$$

gdzie Φ_i $(i=1,2,3)$ są funkcjami silnie rosnącymi, ciągłymi w zerze, określonymi na $[0,\infty)$ i $\Phi_i(0)=0$, jest funkcją ograniczoną, więc z implikacji

$$(4)\quad v^{(1)}(f)<\infty \Rightarrow (1) \text{ zachodzi dla } \Phi_1=u^{p_1},\ 1\leqslant p_1<\infty,$$

$$(5)\quad v^{(2)}(f)<\infty \Rightarrow (2) \text{ zachodzi dla } \Phi_2=u^{p_2},\ \leqslant p_2<\infty,$$

$$(6)\quad v^{(3)}(f)<\infty \Rightarrow (3) \text{ zachodzi dla } \Phi_3=u^{p_1p_2},\ 1\leqslant p_1,p_2<,\infty$$

wynika ograniczoność $f\in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.

Twierdzenie 2

Jeśli $f\in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$, to w każdym ustalonym punkcie (x_o,y_o) istnieją skończone granice

$$f(x_o\pm 0,\ y_o)\equiv\lim_{\varepsilon\to 0^+}f(x_o\pm\varepsilon,\ y_o),$$

$$f(x_o,y_o\pm 0)\equiv\lim_{\varepsilon\to 0^+}f(x_o,y_o\pm\varepsilon)$$

i

$$f(x_o\pm 0,\ y_o\pm 0)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}f(x_o\pm\varepsilon,\ y_o\pm\delta).$$

Dowód

Ponieważ dla funkcji spełniających nierówności (1), (2), (3) w twierdzeniu 1 granice te istnieją, więc istnieją też dla $f\in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ (patrz [1]).

Twierdzenie 3

Wyrażenie

$$\|f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} = V^{(1)}(f) + V^{(2)}(f) + V^{(3)}(f) + |f(0,0)|$$

spełnia własności normy w $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.

Wykażemy warunek

$$\|f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

Wynikanie $f \equiv 0 \Rightarrow \|f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} = 0$ jest oczywiste.

Przypuśćmy, że $\|f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} = 0$. Wtedy $\underset{a}{\forall}$ $\forall$ y ustalonego

$$\underset{\substack{x_{k-1}\\ x_k}}{\forall} \left|f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + f(x_{k-1},y)\right| = 0.$$

Stąd i z okresowości funkcji względem x oraz po uwzględnieniu czwartego składnika w normie mamy $0 = f(0,0) = f(2\pi,0)$. Podstawiając teraz do powyższego wyrażenia z modułem za x_{k-1} i x_k odpowiednio wartości 0 i 2π, otrzymujemy $f(\pi,0) = 0$. Dla wykazania, że $f(x,0) = 0$ dla dowolnego punktu $x = x_o$ i takiego, że $0 < 2x_o < 2\pi$ wykorzystujemy równość z modułem dla ciągu $0, x_o, 2x_o, 3x_o, \ldots, nx_o$ i dostajemy układ

$$(*)\qquad \begin{aligned}
&f(0,0) - 2f(x_o,0) + f(2x_o,0) = 0\\
&f(x_o,0) - 2f(2x_o,0) + f(3x_o,0) = 0\\
&f(2x_o,0) - 2f(3x_o,0) + f(4x_o,0) = 0\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&f((n-2)x_o,0) - 2f((n-1)x_o,0) + f(nx_o,0) = 0.
\end{aligned}$$

Z układu tego mamy

$$nf(x_o,0) = f(nx_o,0).$$

Z ograniczoności funkcji wynika, że $|nf(x_o,0)| = |f(nx_o,0)| \leq M$, stąd $|f(x_o,0)| \leq \frac{M}{n}$, co wobec dowolności n daje $f(x_o,0) = 0$.
Ponieważ

$$f(-x_o,0) - 2f(0,0) + f(x_o,0) = 0,$$

więc

$$f(-x_o,0) = f(2\pi - x_o,0) = 0$$

jak wyżej dla $0 < -2x_o < 2\pi$.
Stosujemy podobne rozumowanie przy wykazywaniu, że $f(0,y) = 0$ dla dowolnego y. Aby wykazać, że $f(x,y) = 0$ dla dowolnego x i dla każdego ustalonego $y=\bar{y}$ lub dla dowolnego y i dla każdego ustalonego $x=\bar{x}$ budujemy układy równań jak wyżej przyjmując za pierwsze składniki w pierwszych równaniach odpowiednio $f(0,y)$ i $f(x,0)$. Są one zerami z powyższego.

Niech teraz (x_1,y_1) będzie takim punktem przedziału $[a,a+2\pi] \times [b,b+2\pi]$, że $f(x_1,y_1) \neq 0$.
Wtedy z układu analogicznego do (*) postaci

$$\begin{aligned}
&f(0,y_1) - 2f(x_1,y_1) + f(2x_1,y_1) = 0\\
&f(x_1,y_1) - 2f(2x_1,y_1) + f(3x_1,y_1) = 0\\
&\vdots\\
&f\left[(n-2)x_1,y_1\right] - 2f\left[(n-1)x_1,y_1\right] + f(nx_1,y_1) = 0
\end{aligned}$$

otrzymujemy $f(x_1,y_1) = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $f(x,y) \not\equiv 0$.

LITERATURA

[1] T.I. Achobadze: Funkcii ograničennoj obobščennoj vtoroj variacii. Matematičeskij sbornik, novaja serija, T. 109(151): 2(6), 1979, s.291-326.

[2] E.R. Love: A generalization of absolute continuity. The Journal of the London Mathematical Society Vol. 26 Part I, Jan. 1951, No 101, s. 1-13.

О МИКСИРОВАННЫХ ВТОРЫХ ВАРИАЦИЯХ (I)

Р е з ю м е

В работе вводятся миксированные вторые вариации для степеней $1 \leq p_1$, $p_2 < \infty$ и действительной, измеримой функции, определённой на R^2, 2π-периодической относительно каждой из переменных. Изучаются некоторые свойства этих вариаций и определяется норма в пространстве $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$, которое состоит из функций о ограниченными вариациями того же типа.

ON MIXED VARIATIONS OF THE SECOND ORDER (I)

S u m m a r y

In the paper there were defined mixed variations of the second order in relation to the powers $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ for a real function, determined on R^2, 2π-periodical considering every variable and measurable. The basic properties of these variations were given and there was defined the norm in the space $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ composed of the functions with bounded mixed variations of the second order.

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 16.02.1982 r.