ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Anna LASKOWSKA

O WARIACJACH MIESZANYCH RZĘDU DRUGIEGO (II)

Streszczenie. Praca jest kontynuacją pracy [2]. Zostało tu wykazane, że przestrzeń $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ x) jest nieośrodkową przestrzenią Banacha. Ponadto wprowadzona została druga norma w tej przestrzeni, równoważna z normą podaną w [2] i udowodnione twierdzenie o oszacowaniu obu tych norm przy pomocy granicy norm ciągu $f_r \in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.
Będziemy używać nadal wszystkich oznaczeń i definicji wprowadzonych w [2].

Twierdzenie 1

Przestrzeń $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ jest przestrzenią zupełną.

Przypuśćmy, że spełniony jest warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N}\ \forall_{r,s>N}\ \|f_r - f_s\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} < \varepsilon .$$

Wykażemy, że $\exists_{f^*}$, że $f_r \to f^*$ względem normy $\sup\limits_{x,y}|f(x,y)|$.

Oznaczmy $f_r - f_s = f$,

$$M(y) = \sup_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} f(x,y)$$

i

$$m(y) = \inf_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} f(x,y).$$

Niech $f(0,y) < M(y)$.

---

x) $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ zdefiniowana została w [2].

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy dla dowolnego K istnieje $x_1 = x_1(K) \in (0,2\pi)$ takie, że $f(x_1,y) > M(y) - \frac{\varepsilon}{K}$.

Niech $2x_1 \in (0,2\pi)$.

Wykorzystując teraz dla każdego ustalonego $y \in [0,2\pi]$ następującą nierówność wynikającą z założenia $(V^{(1)}(f) < \varepsilon)$

$$\frac{1}{2}\left|f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + f(x_{k-1},y)\right| < \varepsilon$$

oraz uwzględniając własności kresu mamy

$$-\varepsilon < \frac{1}{2}\left[f(0,y) - 2f(x_1,y) + f(2x_1,y)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2} f(0,y) - M(y) + \frac{\varepsilon}{K} + \frac{1}{2} f(2x_1,y)\right].$$

Następnie, ponieważ $f(2x_1,y) \leqslant M(y)$ dostajemy

$$-2\varepsilon < f(0,y) - 2M(y) + \frac{2\varepsilon}{K} + M(y).$$

Stąd

$$-\varepsilon\left(2 + \frac{2}{K}\right) < f(0,y) - M(y),$$

$$\varepsilon\left(2 + \frac{2}{K}\right) > M(y) - f(0,y),$$

$$\varepsilon\left(2 + \frac{2}{K}\right) > f(x,y) - f(0,y).$$

(Gdy $f(0,y) = M$, nierówność pozostanie bez zmian).

Prowadząc podobne rozumowanie dla kresu dolnego dostajemy

$$-\varepsilon\left(2 + \frac{2}{K}\right) < f(x,y) - f(0,y),$$

a stąd

$$|f(x,y) - f(0,y)| < \varepsilon\left(2 + \frac{2}{K}\right).$$

Nierówność ta zachodzi dla x dowolnego i dla każdego y ustalonego.

Powtarzamy to rozumowanie dla $z = f(x,y)$ przy ustalonym x. Niech teraz

$$M = \sup_{0 \leq y \leq 2\pi} f(0,y),$$

$$m = \inf_{0 \leq y \leq 2\pi} f(0,y)$$

oraz $f(0,0) < M$.
(Dla $f(0,0) = M$ dalszy ciąg dowodu przebiegnie bez zmian).
Korzystamy z nierówności

$$\frac{1}{2}\left|f(x_1,y_i) - 2f(x_1, \frac{y_i+y_{i-1}}{2}) + f(x_1 y_1)\right| < \varepsilon, \quad (V^{(2)}(f) < \varepsilon)$$

i z własności kresów - istnieje dla dowolnego K (ε ustalamy)

$$y_1 = y_1(K) \in (0,2\pi),$$

że

$$f(0,y_1) > M - \frac{\varepsilon}{K}$$

i zakładamy, że $2y_1 \in (0,2\pi)$.
Otrzymujemy

$$f(0,0) + f(0,2y_1) \leq f(0,0) + M,$$

$$-2\varepsilon < f(0,0) - 2f(0,y_1) + f(0,2y_1) \leq f(0,0) - 2M + \frac{2\varepsilon}{K} + M.$$

Stąd

$$\frac{2\varepsilon}{K} + 2\varepsilon > M - f(0,0) > f(0,y) - f(0,0).$$

Wykorzystując kres dolny otrzymujemy

$$-(\frac{2\varepsilon}{K} + 2\varepsilon) < f(0,y) - f(0,0),$$

czyli

$$|f(0,y) - f(0,0)| < 2\varepsilon(1 + \frac{1}{K}).$$

Ponieważ $|f(0,0)|<\varepsilon$, czyli $|f(0,y)|<\varepsilon(3+\frac{2}{K})$, więc

$$|f(x,y)|\leqslant|f(x,y)-f(0,y)|+f(0,y)<7\varepsilon.$$

Otrzymaliśmy jednostajną zbieżność $f_r\to f^*$ do pewnej funkcji f^* wg normy $\sup\limits_{x,y}|f(x,y)|$. Przechodząc teraz do granicy przy $s\to\infty$ w warunku Cauchy'ego dostajemy $V^{(i)}(f_r-f^*)<\varepsilon$ dla $i=1,2,3$.
Stąd

$$\|f_r-f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}}<\varepsilon,$$

$$f^*\in H^{(2)}_{(p_1,p_2)},\quad \text{bo}\quad f_r-f^*\in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}.$$

Twierdzenie 2

Przestrzeń $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ nie jest ośrodkowa.

Podobnie jak w [3] budujemy funkcje okresowe

$$f_{x_0,y_0}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{dla } 2k\pi\leqslant x\leqslant x_0+2k\pi,\\ & \quad 2k\pi\leqslant y\leqslant y_0+2k\pi,\\ & k \text{ całkowitego}, x_0\in[0,2\pi),\ y_0\in[0,2\pi)\\ 1, & \text{dla pozostałych punktów płaszczyzny}\end{cases}$$

Wówczas dla $x_0\neq x_0'$ i $y_0\neq y_0'$ mamy

$$\|f_{x_0,y_0}-f_{x_0',y_0'}\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}V^{(i)}(f_{x_0,y_0}-f_{x_0',y_0'})+|f_{x_0,y_0}(0,0)-f_{x_0,y_0}(0,0)|=3.$$

Twierdzenie 3

Niech $1<p_1,\ p_2<\infty$ oraz $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$ i $\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1$.

Wyrażenie postaci

$$\|f\|^{\circ}=\sup_{\sum\limits_{k=1}^{m}|\alpha_k|^{q_1}\leqslant1}\ \sup_{a,y}\sup_{\pi_a}\sum_{k=1}^{m}\tfrac{1}{2}\Big[f(x_k,y)-2f(\tfrac{x_k+x_{k-1}}{2},y)+f(x_{k-1},y)\Big]\alpha_k+$$

$$+ \sup_{\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^{q_2}\leq 1} \sup_{b,x} \sup_{\pi_b} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[f(x,y_i) - 2f\left(x, \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) + f(x,y_{i-1})\right]\beta_i +$$

$$+ \sup_{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}|\gamma_{ik}|^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\leq 1} \sup_{a,b} \sup_{\pi_{ab}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\gamma_{ik} + |f(0,0)|,$$

gdzie:

$$\pi_a = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = a+2\pi),$$

$$\pi_b = (b = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b+2\pi),$$

$$\pi_{ab} = \pi_a \times \pi_b$$

są podziałami przedziałów odpowiednio $[a, a+2\pi]$, $[b, b+2\pi]$ i $[a, a+2\pi] \times [b, b+2\pi]$ jest normą w przestrzeni $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.

Warunek $f \equiv 0 \Rightarrow \|f\|^o = 0$ jest oczywisty.
Niech teraz $\|f\|^o = 0$. Ponieważ każdy z trzech pierwszych składników jest nieujemny, wobec dowolności znaków α_k, β_i i γ_{ik} wnosimy, że

$$\forall_{y \text{ ustalonego}} \; f(x_k,y) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2}, y\right) + f(x_{k-1},y) = 0 \left(\forall_{x_{k-1},x_k}\right),$$

$$\forall_{x \text{ ustalonego}} \; f(x,y_i) - 2f\left(x, \frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) + f(x,y_{i-1}) = 0 \left(\forall_{y_{i-1},y_i}\right),$$

oraz

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f; x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i) = 0 \left(\forall_{\substack{x_{k-1},x_k \\ y_{i-1},y_i}}\right).$$

Z twierdzenia 3 zawartego w [2] mamy $f \equiv 0$.
Warunek $|\alpha| \, \|f\|^o = \|\alpha f\|^o$ otrzymuje się dla ujemnych α przez zmianę znaku wszystkich α_k, β_i i γ_{ik} w $\|f\|^o$.

Nierówność $\|f+g\|^o \leq \|f\|^o + \|g\|^o$ dostaje się z addytywności $\Delta^{(2)}$, własności supremum sumy i nierówności trójkąta dla modułu.
Normę $\|\cdot\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}}$ oznaczać będziemy teraz $\|.\|$.

Twierdzenie 4

Jeśli $1<p_1,\ p_2<\infty$ oraz $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$ i $\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1$, to istnieją takie $\alpha_k,\ \beta_i,\ \gamma_{ik}$ dla $k=1,2,\dots,m$; $i=1,2,\dots,n$ i takie, że

$$\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|^{q_1}=1,\quad \sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^{q_2}=1,\quad \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m}|\gamma_{ik}|^{q_1}\Big)^{\frac{q_2}{q_1}}=1,$$

że zachodzi

$$\|f\| = \sup_{\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|^{q_1}=1}\ \sup_{a,y}\ \sup_{\pi_a}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}\Big[f(x_k,y)-2f\Big(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\Big)+f(x_k,y)\Big]\alpha_k +$$

$$+\sup_{\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^{q_2}=1}\ \sup_{x,b}\ \sup_{\pi_b}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Big[f(x,y_i)-2f\Big(x,\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\Big)+f(x,y_{i-1})\Big]\beta_i +$$

$$+\sup_{\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{k=1}^{m}|\gamma_{ik}|^{q_1}\big)^{\frac{q_2}{q_1}}=1}\ \sup_{a,b}\ \sup_{\pi_{ab}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{4}\Big[\Delta^{(2)}_{xy}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\Big]\gamma_{ik}+|f(0,0)|$$

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 1 w [1]. Weźmy za α_k, β_i i γ_{ik} następujące wyrażenia

$$\alpha_k=\frac{\operatorname{sgn}\Delta^{(2)}_x(f;x_{k-1},x_k)\big(\frac{1}{2}|\Delta^{(2)}_x(f;x_{k-1},x_k)|\big)^{p_1-1}}{\Big(\sum_{k=1}^{m}\big(\frac{1}{2}|\Delta^{(2)}_x(f,x_{k-1},x_k)|\big)^{p_1}\Big)^{\frac{p_1-1}{p_1}}},$$

$$\beta_i = \frac{\operatorname{sgn} \Delta_y^{(2)}(f;y_{i-1},y_i)(\frac{1}{2}|\Delta_y^{(2)}(f;y_{i-1},y_i)|)^{p_2-1}}{(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}|\Delta_y^{(2)}(f;y_{i-1},y_i)|)^{p_2})^{\frac{p_2-1}{p_2}}},$$

$$\vartheta_{ik} = \frac{\operatorname{sgn}\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)|)^{p_1-1}\left(\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f)|)^{p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)|)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}}$$

gdzie

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f) = \Delta_{xy}^{(2)}(f;\ x_{k-1},x_k\ y_{i-1},y_i).$$

Wtedy

$$\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|^{q_1} = 1,\ \sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^{q_2} = 1,\ \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{m}|\vartheta_{ik}|^{q_1})^{\frac{q_2}{q_1}} = 1,$$

a ponadto

$$\sup_{a,y}\ \sup_{\pi_a} \frac{\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{2}|\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k)|)^{p_1-1}(\frac{1}{2}\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k))\operatorname{sgn}\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k)}{\left(\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{2}|\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k)|)^{p_1}\right)^{\frac{p_1-1}{p_1}}}$$

$$= \sup_{a,y}\ \sup_{\pi_a}(\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{2}|\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k)|)^{p_1})^{1-\frac{p_1-1}{p_1}}$$

$$= \sup_{a,y}\ \sup_{\pi_a}\left(\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{2}|\Delta_x^{(2)}(f;x_{k-1},x_k)|)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

Podobnie dla drugiego składnika. Dla trzeciego składnika będziemy mieli (oznaczając dodatkowo

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f) = \Delta_{xy}^{(2)}(f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i))$$

$$\sup_{a,b}\sup_{\mathcal{X}_{ab}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f)\operatorname{sgn}\frac{1}{4}\Delta_{xy}^{(2)}(f)\left(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}|\right)^{p_1-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f)|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f)|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}} =$$

$$= \sup_{a,b}\sup_{\mathcal{X}_{ab}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f)|\right)^{p_1}\right)^{1+\frac{p_2-p_1}{p_1}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f)|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}} =$$

$$= \sup_{a,b}\sup_{\mathcal{X}_{ab}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}|\Delta_{xy}^{(2)}(f)|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

<u>**Wniosek**</u>

$$\|f\|^{o} = \|f\|.$$

Nierówność $\|f\|^{o}\leqslant\|f\|$ otrzymujemy z nierówności Höldera, $\|f\|\leqslant\|f\|^{o}$ zaś z tez twierdzeń 3 i 4.

<u>Twierdzenie 5</u>

Jeśli $f_r\in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ oraz $f_r(x,y)\xrightarrow[r\to\infty]{} f(x,y)$ w $[a,\ a+2\pi]\times[b,\ b+2\pi]$, to $\|f\|\leqslant \underline{\lim}_{r\to\infty}\|f_r\|$ dla $1\leqslant p_1,p_2<\infty$ i $\|f\|^{o}\leqslant \underline{\lim}_{r\to\infty}\|f_r\|^{o}$ dla $1<p_1,p_2<\infty$. Dowód przeprowadzamy analogicznie jak w [3].

Niech

$$g_i = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ V^{(i)}(f_r), \qquad i = 1,2,3$$

Wybieramy takie podciągi $f^{*}_{r_s}$, $f^{**}_{r_s}$, $f^{***}_{r_s}$ ciągu f_r, że

$$V^{(1)}(f^{*}_{r_s}) \to g_1,\quad V^{(2)}(f^{**}_{r_s}) \to g_2 \quad \text{i} \quad V^{(3)}(f^{***}_{r_s}) \to g_3.$$

Dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje takie s_0, że jeśli $s > s_0$, to (1)

$$(1)\qquad V^{(1)}(f^{*}_{r_s}) < g_1 + \varepsilon,\ V^{(2)}(f^{**}_{r_s}) < g_2 + \varepsilon,\ V^{(3)}(f^{***}_{r_s}) < g_3 + \varepsilon$$

i przechodząc do granicy przy $s \to \infty$ mamy

$$V^{(1)}(f) \leq g_1 + \varepsilon,\ V^{(2)}(f) \leq g_2 + \varepsilon,\ V^{(3)}(f) \leq g_3 + \varepsilon.$$

Stąd

$$V^{(i)}(f) \leq \overline{\lim_{r\to\infty}}\ V^{(i)}(f_r), \qquad i = 1,2,3$$

oraz $\lim_{r\to\infty} |f_r(0,0)| = |f(0,0)|$ z założenia. Biorąc teraz $g = g_1+g_2+g_3 + |f(0,0)|$ dostajemy tezę.

Wyrażam serdeczne podziękowanie Panu prof. Z. Zahorskiemu za pomoc w dowodzie tw. 7.

LITERATURA

[1] A. Benedek and R. Panzone: The space L^p with mixed norms, Duke Math. J.,V 28,nr 3 (1961),s. 301-324.

[2] A. Laskowska: O wariacjach mieszanych rzędu drugiego (I), ZN Pol. Śl. nr 747, seria Mat.-Fiz. z. 42.

[3] J. Musielak, Wł. Orlicz: On generalized variations (I), Studia Mathematica, tom XVIII Fasc. 1, 1959, s.11-41.

МИКСИРОВАННАЯ ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ (II)

Резюме

Настоящая работа является продолжением работы [2]. Доказывается, что пространство $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ x) является несепарабельным банаховым пространством. Кроме того, была введена вторая норма в этом пространстве, эквивалентная основной норме ([2]) и была доказана теорема об оценке обоих норм при использовании предела норм последовательности $f_r \in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.

ON MIXED SECOND VARIATIONS (II)

Summary

This is a continuation of [2]. It is proved that $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ xx) is a non-separable Banach space. A norm in this space which is equivalent to that of [2] is defined. Finally, a theorem concerning the estimation of both these norms using the sequence f_r is introduced.

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 16.02.1982 r.

x) $H^{(2)}(p_1,p_2)$ была определена в [2].

xx) $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ is defined in [2].