ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Anna LASKOWSKA

APROKSYMACJA ŚREDNIMI FEJÉRA W PRZESTRZENI $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$

Streszczenie. W pracy obok twierdzenia aproksymacyjnego średnimi Fejéra w przestrzeni $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ x) zostały wprowadzone dwa lematy. Lematy te dotyczą pewnych własności funkcji spełniających założenia $V^{(j)}(f_{h\cdot}-f)\to 0$ dla $h\to 0^+$ i $V^{(j)}(f_{\cdot t}-f)\to 0$ dla $t\to 0^+$ $(j=1,2,3)$, gdzie $V^{(j)}(f)$ są wariacjami mieszanymi rzędu drugiego zdefiniowanymi w [2].
W pracy uogólniono pewne wyniki zawarte w [4] i podane tam dla funkcji jednej zmiennej.

Będziemy zakładać, że funkcja f jest określona na R^2 i przyjmująca wartości rzeczywiste, mierzalna, 2π-okresowa ze względu na każdą zmienną. Oznaczenia i definicje zamieszczone w [2] będą tu nadal aktualne, a ponadto będziemy oznaczać

$$f(x+h,y+t) = f_{ht}$$

$$f(x+h,y) = f_{h\cdot}$$

$$f(x,y+t) = f_{\cdot t}$$

Lemat 1

Jeśli $V^{(j)}(f_{h\cdot}-f)\to 0$ dla $h\to 0^+$ i $V^{(j)}f_{\cdot t}-f)\to 0$ dla $t\to 0^+$, to

$$\sup_a V^{(1)}(f_{ht} - f;\ a - 2\pi,\ a + 2\pi),$$

$$\sup_b V^{(2)}(f_{ht} - f;\ b - 2\pi,\ b + 2\pi),$$

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f_{ht} - f;\ a - 2\pi, a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi)$$

x) $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ - przestrzeń funkcji o ograniczonych wariacjach rzędu drugiego zdefiniowana została w [2].

są skończone dla $-\pi \leq h \leq \pi$, $-\pi \leq t \leq \pi$ i dążą do zera dla h i $t \to 0$.

Dowód przebiega analogicznie jak w [4].

Przeprowadzimy tu tylko część dowodu dla $j=3$. Otrzymujemy oszacowania

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f_{ht}-f;\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi) \leq$$

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h,y+t) - f(x+h,y);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi) +$$

$$+ \sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h,y) - f(x,y);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi), \tag{1}$$

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h,y) - f(x,y);\ a-5\pi,\ a+5\pi,\ b-5\pi,\ b+5\pi) \leq$$

$$\leq 81\, V^{(3)}(f_{h,}-f), \quad (\text{p. } [2]), \tag{2}$$

a to jest skończone dla $0<h\leq\frac{\pi}{m}$, i pewnego m naturalnego z założenia. Weźmy teraz $0<h\leq\pi$ i podstawmy $h_v = \frac{vh}{m'}$ i $u = x+h_{v-1}$, wtedy

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h,y) - f(x,y);\ a-3\pi,\ a+3\pi,\ b-3\pi,\ b+3\pi) \leq \tag{3}$$

$$\leq \sum_{v=1}^{m'} \sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h_v,y) - f(x+h_{v-1},y);\ a-3\pi,\ a+3\pi,\ b-3\pi,\ b+3\pi) =$$

$$= \sum_{v=1}^{m'} \sup_{a,b} V^{(3)}(f(u + \tfrac{h}{m'},y) - f(u,y);\ a-5\pi,\ a+5\pi,\ b-5\pi,\ b+5\pi),$$

a to jest skończone z (2) dla $0< \frac{h}{m'} \leq \frac{\pi}{m'}$, i dąży do zera dla $h \to 0^+$. Z (3) i własności 3 dla wariacji mieszanych z [2]

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h,y) - f(x,y);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi)$$

jest skończone dla $0<h\leq\pi$ i dąży do zera dla $h \to 0^+$.

Dla h ujemnych mamy

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h,y) - f(x,y);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi) \leqslant \tag{4}$$

$$\leqslant \sup_{a,b} V^{(3)}(f(u-h,y) - f(u,y);\ a-3\pi,\ a+3\pi,\ b-3\pi,\ b+3\pi),$$

a to jest skończone dla $0<-h\leqslant\pi$ z (3) i dąży do zera dla $-h\to 0^+$. Chcąc oszacować pierwszy składnik (1) podstawiamy $x+h = u$, $y+t_{\mu-1} = v$. Otrzymujemy wtedy

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f,(u,y+t) - f(u,y);\ a-2\pi+h,\ a+2\pi+h,\ b-2\pi,\ b+2\pi) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a,b} V^{(3)}(f(u,y+t) - f(u,y);\ a-3\pi,\ a+3\pi,\ b-3\pi,\ b+3\pi) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{n'} \sup_{a,b} V^{(3)}(f(u,y+t_\mu) - f(u,y+t_{\mu-1});\ a-3\pi,\ a+3\pi,\ b-3\pi+t_{\mu-1},\ b+3\pi+t_{\mu-1})$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{n'} \sup_{a,b} V^{(3)}(f(u,v+\tfrac{t}{n'}) - f(u,v);\ a-5\pi,\ a+5\pi,\ b-5\pi,\ b+5\pi)$$

dla pewnego n' naturalnego i to jest skończone dla $0<\frac{t}{n'}\leqslant\frac{\pi}{n'}$, czyli dla $0<t\leqslant\pi$ i dąży do zera dla $t\to 0^+$ z założenia i nierówności następującej

$$\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x,y+t) - f(x,y);\ a-5\pi,\ a+5\pi,\ b-5\pi,\ b+5\pi)\leqslant 81\, V^{(3)}(f_{\cdot t}-f).$$

Dla t ujemnych z przedziału $[-\pi,0)$ postępujemy analogicznie jak w (4). Dla $h\to 0^{\pm}$ i $t=0$ oraz $t\to 0^{\pm}$ i $h=0$ dowód jest szczególnym przypadkiem powyższego. Stąd teza dla $j=3$.

Lemat 2

Niech

$$\Phi_{ht}(x,y) = \Phi(x,h,y,t) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[f(x+h,y+t) + f(x-h,y+t) + f(x+h,y-t) + f(x-h,y-t)\right] - f(x,y).$$

Jeśli spełnione są założenia lematu 1, wtedy odpowiednio $V^{(j)}(\Phi_{ht})$ jest skończone i ciągłe dla $j=1,2,3$, $0\leq h\leq\pi$ i $0\leq t\leq\pi$.
Dowód przebiega analogicznie jak w [4].
Wykażemy nierówność

$$\left|V^{(j)}(f)-V^{(j)}(g)\right|\leq V^{(j)}(f-g)\quad \text{dla } j=1,2,3.$$

$$2V^{(j)}(f)=V^{(j)}\left[(f-g)+(f+g)\right]\leq V^{(j)}(f-g)+V^{(j)}(f)+V^{(j)}(g),$$

stąd

$$V^{(j)}(f)-V^{(j)}(g)\leq V^{(j)}(f-g).$$

$$2V^{(j)}(g)=V^{(j)}\left[(g-f)+(g+f)\right]\leq V^{(j)}(f-g)+V^{(j)}(f)+V^{(j)}(g),$$

stąd

$$-V^{(j)}(f-g)\leq V^{(j)}(f)-V^{(j)}(g),$$

czyli

$$\left|V^{(j)}(f)-V^{(j)}(g)\right|\leq V^{(j)}(f-g).$$

Dowód dla $j=3$ przebiega następująco

$$V^{(3)}(\Phi_{ht})\leq \sup_{a,b} V^{(3)}(f_{ht}-f;\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi)+$$

$$+\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x-h,y+t)-f(x,y);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi)+$$

$$+\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x+h,y-t)-f(x,y);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi)+$$

$$+\sup_{a,b} V^{(3)}(f(x-h,y-t)-f(x,y);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi),$$

a to jest skończone dla $0\leq h\leq\pi$ i $0\leq t\leq\pi$ z lematu 1.
W celu wykazania ciągłości $V^{(3)}(\Phi_{ht})$ skorzystamy z powyższej nierówności z modułem. Dla $0\leq s_1<h\leq\pi$ i $0\leq s_2\leq t\leq\pi$ otrzymamy

$$\left|V^{(3)}(\Phi_{ht})-V^{(3)}(\Phi_{s_1s_2})\right|\leq V^{(3)}(\Phi_{ht}-\Phi_{s_1s_2})\leq$$

$$\leq \frac{1}{4} V^{(3)}\left[f(x+h,y+t) - f(x+s_1,y+s_2)\right] + \frac{1}{4} V^{(3)}\left[f(x-h,y+t) - f(x-s_1,y+s_2)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4} V^{(3)}\left[f(x+h,y-t) - f(x+s_1,y-s_2)\right] + \frac{1}{4} V^{(3)}\left[f(x-h,y-t) - f(x-s_1,y-s_2)\right].$$

Podstawiając teraz za

$$\begin{aligned} &x+s_1 = u, \quad y+s_2 = v \quad \text{dla składnika I,}\\ &x-s_1 = u, \quad y+s_2 = v \quad \text{dla składnika II,}\\ &x+s_1 = u, \quad y-s_2 = v \quad \text{dla składnika III,}\\ &x-s_1 = u, \quad y-s_2 = v \quad \text{dla składnika IV,} \end{aligned} \tag{5}$$

mamy

$$\left|V^{(3)}(\Phi_{ht}) - V^{(3)}(\Phi_{s_1s_2})\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \sup_{a,b} V^{(3)}\left[f(u-s_1+h,v-s_2+t) - f(u,v);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi\right] +$$

$$+ \frac{1}{4} \sup_{a,b} V^{(3)}\left[f(u+s_1-h,v-s_1+t) - f(u,v);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi\right] +$$

$$+ \frac{1}{4} \sup_{a,b} V^{(3)}\left[f(u-s_1+h,v+s_2+t) - f(u,v);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi\right] +$$

$$+ \frac{1}{4} \sup_{a,b} V^{(3)}\left[f(u-s_1-h,v+s_2-t) - f(u,v);\ a-2\pi,\ a+2\pi,\ b-2\pi,\ b+2\pi\right].$$

Prawa strona tej nierówności dąży do zera z lematu 1 przy $h-s_1 \to 0$ i $t-s_2 \to 0$.

Niech $\sigma_{mn} f(x,y)$ oznacza m,n-tą sumę Fejéra funkcji f.

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeśli $f \in L$ oraz

$$V^{(j)}(f_{h\cdot}-f) \to 0 \quad \text{dla} \quad h \to 0^+ \quad \text{i} \quad V^{(j)}(f_{\cdot t}-f) \to 0 \quad \text{dla} \quad t \to 0^+,$$

gdzie $j=1,2,3$, to

$$V^{(j)}(\sigma_{mnf} - f) \to 0 \quad \text{dla} \quad m,n \to \infty, \quad j=1,2,3.$$

Jeśli ponadto f jest funkcją ciągłą w $(0,0)$, wtedy

$$\| \sigma_{mn} f - f \|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} \to 0 \quad \text{dla} \quad m,n \to \infty$$

Oznaczmy

$$\tau_{mn}(x,y) = \sigma_{mn} f(x,y) - f(x,y).$$

Mamy wtedy

$$\sup_{a,y} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2} \left| \tau_{mn}(x_k,y) - 2\tau_{mn}\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + \tau_{mn}(x_{k-1},y) \right| \right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= \sup_{a,y} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2} \left| \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left\{ \Phi(x_k,h,y,t) - 2\Phi\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},h,y,t\right) + \Phi(x_{k-1},h,y,t) \right\} \cdot \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cdot F_m(h) F_n(t) dh dt \right| \right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}, \tag{6}$$

gdzie:

$$F_k(x) = \frac{1}{k\pi} \left[\frac{\sin \frac{1}{2} kx}{\sin \frac{1}{2} x} \right]^2.$$

Całka podwójna pod ostatnią sumą istnieje, bo z lematu 2 $V^{(i)}(\Phi_{ht})$ dla $j = 1,2,3$ są funkcjami ciągłymi i skończonymi dla $0 \leq h, \ t \leq \pi$.

Zastosujemy teraz do wyrażenia (6) dwa razy uogólnioną nierówność Minkowskiego

$$\left(\int_a^b \left| \int_c^d f(x,y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy,$$

gdzie $f(x,y)$ jest funkcją mierzalną w przedziale $[a,b]\times[c,d]$, $1\leq p$ i prawa strona nierówności jest skończona.
Otrzymujemy następujące oszacowanie (6) przez

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} V^{(1)}(\Phi_{ht})F_m(h)F_n(t)\,dh\,dt. \tag{7}$$

Całka ta istnieje, bo $V^{(1)}(\Phi_{ht})$ z lematu 2 jest ciągłe dla $0\leq h\leq\pi$ i $0\leq t\leq\pi$.
W celu wykazania pierwszej części tezy twierdzenia dla j=1 przeprowadzimy analogiczne rozumowanie jak w dowodzie lematu o zbieżności całki z jądrem dodatnim (patrz [1] s. 508).
Z ciągłości $V^{(1)}(\Phi_{ht})$ w $(h,t)=(0,0)$ możemy do danej liczby $\varepsilon>0$ dobrać takie $0<\delta_1<\pi$ i $0<\delta_2<\pi$, że

$$\left|V^{(1)}(\Phi_{ht})\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{przy} \quad 0\leq h\leq\delta_1 \quad \text{i} \quad 0\leq t\leq\delta_2. \tag{8}$$

Całkę podwójną w (7) zapiszemy teraz jako sumę całek $I_1+I_2+I_3+I_4$, gdzie całkować będziemy w I_i dla $i=1,2,3,4$ odpowiednio po przedziałach $[0,\delta_1]\times[0,\delta_2]$, $[0,\delta_1]\times[\delta_2,\pi]$, $[\delta_1,\pi]\times[\delta_2,\pi]$, $[\delta_1,\pi]\times[0,\delta_2]$.
Uwzględniając (8) oraz następującą nierówność dla jądra Fejéra

$$\sup_{\delta\leq x\leq\pi} F_k(x)\leq\frac{1}{k\pi}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}$$

otrzymujemy oszacowania

$$|I_1|<\frac{\varepsilon}{4}\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2}F_m(h)F_n(t)\,dh\,dt\leq\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|I_2|=\int_0^{\delta_1}\int_{\delta_2}^{\pi}V^{(1)}(\Phi_{ht})F_m(h)F_n(t)\,dh\,dt\leq\frac{1}{n\pi}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta_2}\int_0^{\delta_1}\int_{\delta_2}^{\pi}V^{(1)}(\Phi_{ht})F_m(h)\,dh\,dt<\frac{\varepsilon}{4}$$

dla n dostatecznie dużych,

$$|I_3| = \int_{\delta_1}^{\pi}\int_{\delta_2}^{\pi} V^{(1)}(\Phi_{ht})F_m(h)F_n(t)\,dh\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m\pi}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta_1}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{\pi\sin^2\frac{1}{2}\delta_2}\int_{1}^{\pi}\int_{2}^{\pi} V^{(1)}(\Phi_{ht})\,dh\,dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

dla m, n dostatecznie dużych,

$$|I_4| = \int_{\delta_1}^{\pi}\int_{0}^{\delta_2} V^{(1)}(\Phi_{ht})F_m(h)F_n(t)\,dh\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m\pi}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta_1}\int_{\delta_1}^{\pi}\int_{0}^{\delta_2} V^{(1)}(\Phi_{ht})F_n(t)\,dh\,dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

dla n dostatecznie dużych.
Stąd mamy oszacowanie (7) przez ε.
Wykazaliśmy więc pierwszą część twierdzenia dla j=1.
Analogicznie otrzymuje się tezę dla j=2.
W dowodzie dla j=3 wykorzystamy uogólnioną nierówność Minkowskiego dla potęg mieszanych (patrz [5])

$$\left(\int_c^d\left(\int_a^b\left|\int_\gamma^\lambda\left(\int_\alpha^\beta f(x,y,t,z)\,dt\right)dz\right|^{p_1}dx\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dy\right)^{\frac{1}{p_2}} <$$

$$\int_\gamma^\lambda\left[\int_\alpha^\beta\left(\int_c^d\left(\int_a^b|f(x,y,t,z)|^{p_1}dx\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dy\right)^{\frac{1}{p_2}}dt\right]dz,\quad \text{gdzie}\quad f(x,y,t,z)$$

jest funkcją mierzalną w przedziale $[a,b]\times[c,d]\times[\alpha,\beta]\times[\gamma,\lambda]$, $1\leq p_i<\infty$ dla i=1,2 i prawa strona nierówności jest skończona.

Otrzymujemy

$$\sup_{a,b}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\Delta_{xy}^{(2)}(\Phi_{ht};\ x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)F_m(h)F_n(t)dhdt\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}}\leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} V^{(3)}(\Phi_{ht})F_m(h)F_n(t)dhdt. \tag{9}$$

Następnie szacujemy odpowiednie I_i dla $i=1,2,3,4$ jak wyżej przyjmując za $V^{(1)}(\Phi_{ht})$, $V^{(3)}(\Phi_{ht})$, które z lematu 2 jest również ciągłe dla $0\leqslant h\leqslant\pi$ i $0\leqslant t\leqslant\pi$

Aby wykazać drugą część tezy należy pokazać, że

$$|\sigma_{mn}f(0,0) - f(0,0)| =$$

$$=\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}\left[f(h,t)+f(-h,t)+f(h,-t)+f(-h,-t)\right]-f(0,0)\right)F_m(h)F_n(t)dhdt\right|$$

dąży do zera dla m i $n\to\infty$.

Postępujemy analogicznie jak w dowodzie pierwszej części twierdzenia dla $j=1$ biorąc teraz za $V^{(1)}(\Phi_{ht})$, $\Phi_{ht}(0,0)$ i korzystając z założenia ciągłości funkcji $f(x,y)$ w $(0,0)$, czyli z założenia analogicznego jak (8) dla $\Phi_{ht}(0,0)$ (dla danego ε i dobranych $0<\delta_1$, $\delta_2<\pi$ takich, że $0\leqslant h\leqslant\delta_1$ i $0\leqslant t\leqslant\delta_2$ $|\Phi_{ht}(0,0)|<\varepsilon$).

Następnie szacujemy odpowiednie I_1, I_2, I_3, I_4 jak dla $V^{(1)}(\Phi_{ht})$.

LITERATURA

[1] G.M. Fichtenholz: Rachunek różniczkowy i całkowy, T. III, Wydanie czwarte, Warszawa 1975, PWN.

[2] A. Laskowska: O wariacjach mieszanych rzędu drugiego (I), ZN Pol.Śl., seria Mat.-Fiz. z. 42.

[3] A. Laskowska: O wariacjach mieszanych rzędu drugiego (II), ZN Pol.Śl. seria Mat.-Fiz. z. 42.

[4] E.R. Love: Generalization of absoluty continuity, The Journal of the London Mathematical Society vol 26 Part I, Jan. 1951,No 101, s. 1-13.

[5] G. Kozłowska: Aproksymacja funkcji okresowych dwóch zmiennych pewnymi całkami osobliwymi. ZN Pol.Śl. nr 386, seria Mat.-Fiz. z. 24, 1974 s. 111-125.

АППРОКСИМАСИЯ СРЕДНИМИ ФЕЙЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$

Р е з ю м е

В настоящей работе одновременно с теоремой аппроксимации средними Фейера в пространстве $H^{(2)}_{(p_1 p_2)}$ x) были введены две леммы. Эти леммы относятся к некоторым свойствам функции выполняющих условия: $V^{(j)}(f_{h\cdot}-f)\to 0$ для $h\to 0^+$ и $V^{(j)}(f_{\cdot t}-f)\to 0$ для $t\to 0^+$ $(j=1,2,3)$ где $V^{(j)}(f)$ являются миксированными вторыми вариациями определенными в [2].

APPROXIMATION BY FEJÉR MEANS IN THE SPACE $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$

S u m m a r y

In this paper there is proved an approximation theorem by Fejer means in the space $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ and two lemmas dealing with functions for which $V^{(j)}(f_{h\cdot}-f)\to 0$, $h\to 0^+$ and $V^{j}(f_{\cdot t}-f)\to 0$, $t\to 0^+$ $j=1,2,3$ xx).

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 16.02.1982 r.

x) $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ – пространство функций с ограниченными вариациями второго порядка было определено в [2].

xx) $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ and $V^{(j)}(f)$ is defined in [2].