ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Anna LASKOWSKA

APROKSYMACJA FUNKCJAMI STIEKŁOWA I CAŁKAMI OSOBLIWYMI W PRZESTRZENI $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$

Streszczenie. W pracy zamieszczone są dwa twierdzenia aproksymacyjne funkcjami Stiekłowa i całkami osobliwymi w przestrzeni $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ x). Twierdzenia te są przeniesieniem twierdzeń aproksymacyjnych podanych w pracy [3] w przestrzeni funkcji zespolonych jednej zmiennej o ograniczonych wariacjach V_M. Użyto tu definicji i oznaczeń występujących w pracach [1] i [2].

Niech $f(x,y)$ nadal jak w [1] i [2] będzie funkcją rzeczywistą, określoną na R^2, 2π-okresową ze względu na każdą zmienną i mierzalną. Oznaczmy

$$f(x+h,\ y+t) = f_{ht},$$
$$f(x+h,\ y) = f_{h\cdot},$$
$$f(x,\ y+t) = f_{\cdot t}.$$

Twierdzenie 1

Jeśli $f \in L$ oraz

$$V^{(j)}(f_{h\cdot} - f) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{i} \quad V^{(j)}(f_{\cdot t} - f) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dla } j=1,2,3,$$

to dla funkcji Stiekłowa

$$f_{r,s}(x,y) = rs\int_x^{x+\frac{1}{r}}\int_y^{y+\frac{1}{s}} f(u,v)\,du\,dv,$$

gdzie r i s naturalne

zachodzi $V^{(j)}(f_{r,s} - f) \to 0$ dla $r,s \to \infty$ dla $j=1,2,3$.

x) $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ - przestrzeń funkcji o ograniczonych wariacjach mieszanych rzędu drugiego zdefiniowano w [1].

Jeśli ponadto f jest funkcją ciągłą w $(0,0)$, to

$$\|f_{r,s}-f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} \to 0 \quad \text{dla } r \text{ i } s \to \infty^{x)}$$

Dowód

$$V^{(1)}(f_{r,s}-f) =$$

$$= \sup_{a,y} \sup_{\pi_a} \Big(\sum_{k=1}^{m} (\tfrac{1}{2}|f_{r,s}(x_k,y) - 2f_{r,s}(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y) + f_{r,s}(x_{k-1},y) - f(x_k,y) +$$

$$+ 2f(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y) - f(x_{k-1},y)|\,)^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}},$$

$$f_{rs}(x,y) - f(x,y) = rs \int_x^{x+\frac{1}{r}} \int_y^{y+\frac{1}{s}} f(u,v)\,du\,dv - f(x,y) =$$

$$= rs \int_0^{\frac{1}{r}} \int_0^{\frac{1}{s}} f(w+x,z+y)\,dw\,dz - f(x,y) = rs \int_0^{\frac{1}{r}} \int_0^{\frac{1}{s}} \Big[f(w+x,z+y) - f(x,y)\Big]\,dw\,dz,$$

gdzie

$$u = w+x,\ v = z+y; \quad du = dw,\ dv = dz.$$

Będziemy mieli po zastosowaniu uogólnionej nierówności Minkowskiego

$$V^{(1)}(f_{r,s}-f) =$$

$$= \sup_{a,y} \sup_{\pi_a} \Big(\sum_{k=1}^{m} (\tfrac{1}{2}\Big|rs \int_0^{\frac{1}{s}} \int_0^{\frac{1}{s}} \Big[f_{wz}(x_k,y) - f(x_k,y) - 2f_{wz}(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y) +$$

$$+ 2f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},y) + f_{wz}(x_{k-1},y) - f(x_{k-1},y)\Big]\,dw\,dz\Big|\,)^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant \qquad (1)$$

---

x) Definicja $V^{(j)}(f)$ oraz $\|f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}}$ zamieszczone są w pracy [1].

$$\leqslant \sup_{a,y}\ \sup_{\mathcal{J}a}\ rs \int_0^{\frac{1}{r}}\int_0^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f_{wz}-f;x_{k-1},x_k)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} dwdz =$$

$$= rs\int_0^{\frac{1}{s}}\int_0^{\frac{1}{s}} V^{(1)}(f_{wz}-f_{w\cdot}+f_{w\cdot}-f)\,dwdz \leqslant$$

$$\leqslant\ rs\int_0^{\frac{1}{r}}\int_0^{\frac{1}{s}}\left[V^{(1)}(f_{\cdot z}-f) + V^{(1)}f_{w\cdot}-f)\right]dwdz.$$

Prawa strona ostatniej nierówności w (1) dąży do zera przy r i $s\to\infty$, bo z założenia twierdzenia wynika, że pkt $(w,z) = (0,0)$ jest punktem Lebesgue'a.

Dowód dla $j = 2$ przebiegnie analogicznie.

W dowodzie dla $j=3$ wykorzystujemy również uogólnioną nierówność Minkowskiego otrzymując

$$V^{(3)}(f_{r,s}-f)\leqslant$$

$$\sup_{a,b}\ \sup_{\mathcal{J}ab}\ rs\int_0^{\frac{1}{r}}\int_0^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f_{wz}-f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} dwdz \leqslant$$

$$\leqslant\ rs\int_0^{\frac{1}{r}}\int_0^{\frac{1}{s}}\left[V^{(3)}(f_{\cdot z}-f) + V^{(3)}(f_{w\cdot}-f)\right]dwdz\to 0 \quad \text{dla } r,s\to\infty$$

z założenia twierdzenia.

W celu wykazania drugiej części tezy twierdzenia korzystamy z założenia ciągłości funkcji f w $(0,0)$ i mamy

$$\left| rs\int_0^{\frac{1}{r}}\int_0^{\frac{1}{s}}\left[f(w,z) - f(0,0)\right]dwdz\right|\to 0 \quad \text{dla } r,s\to\infty$$

Lemat. Niech $f \in H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.
Oznaczmy przez

$$I_{r,s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_r(u)R_s(v)f(x+u,y+v)dudv$$

oraz

$$\Theta_r = \int_0^{2\pi} K_r(u)du < \infty$$

i

$$\eta_s = \int_0^{2\pi} R_s(v)dv \leq \infty .$$

Jeśli

$$K_r(u),\ R_s(v) \geq 0,\ V^{(j)}(f_{h\cdot}-f)\to 0 \quad \text{dla } h\to 0^+$$

i

$$V^{(j)}(f_{\cdot t}-f)\to 0 \quad \text{dla } t\to 0^+,$$

to

$$V^{(j)}(I_{r,s}) \leq \Theta_r\eta_s\, V^{(j)}(f) \quad \text{dla } j=1,2,3.$$

Dowód

$$\sup_{a,y}\sup_{\pi a}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\tfrac{1}{2}\left|I_{r,s}(x_k,y) - 2I_{r,s}\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + I_{r,s}(x_{k-1},y)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= \sup_{a,y}\sup_{\pi a}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\tfrac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x_k+u,y+v) - 2f\left(\frac{x_k+x_{k-1}}{2}+u,y+v\right) + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + f(x_{k-1}+u,y+v)\right]K_r(u)R_s(v)dudv\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq$$

$$\leq \sup_{a,y}\sup_{\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f_{uv};x_{k-1},x_k)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} K_r(u)R_s(v)dudv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} V^{(1)}(f)K_r(u)R_s(v)dudv = V^{(1)}(f)\Theta_r\eta_s.$$

Dla j=2 szacowanie to przebiega analogicznie.
Dla j=3 będzie ono miało postać

$$v^{(3)}(I_{r,s}) = \sup_{a,b}\sup_{\mathcal{T}ab}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f_{uv};\, x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)\right|\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\, K_r(u)R_s(v)\,du\,dv\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v^{(3)}(f)K_r(u)R_s(v)\,du\,dv = v^{(3)}(f)\Theta_r\eta_s .$$

Zastosowaliśmy tu uogólnioną nierówność Minkowskiego.

Twierdzenie 2

Jeśli spełnione są założenia lematu i ponadto

$$\int_0^{2\pi} K_r(u)du \to 1 \quad \text{dla } r\to\infty \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} R_s(v)dv \to 1 \quad \text{dla } s\to\infty$$

oraz

$$\int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_1} K_r(u)du \to 0 \quad \text{dla } r\to\infty \quad \text{i} \quad \int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_2} R_s(v)dv \to 0 \quad \text{dla } s\to\infty$$

gdzie $0<\delta_1,\ \delta_2<\pi$, wtedy

$$v^{(j)}(I_{r,s}-f) \to 0 \quad \text{dla } r,s\to\infty \quad \text{i} \quad j=1,2,3.$$

Dowód

$$I_{r,s}(x,y) - f(x,y) = \tag{2}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\Theta_r\eta_s}\right)I_{r,s}(x,y) + \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_r(u)R_s(v)\left[f(x+u,y+v) - f(x,y)\right]du\,dv}{\Theta_r\eta_s}.$$

Z lematu mamy

$$v^{(j)}\left\{\left[1 - \frac{1}{\Theta_r\eta_s}\right]I_{r,s}\right\} \leqslant v^{(j)}(f)\left|\Theta_r\eta_s - 1\right|,$$

a to zmierza do zera dla $r \to \infty$ lub $s \to \infty$ z założenia, czyli

$$\left|\Theta_r\eta_s - 1\right| < \frac{\varepsilon_j}{10v^{(j)}(f)}$$

dla danego $\varepsilon_j > 0$ i dobranych r_o i s_o $(r > r_o,\ s > s_o)$.
Oszacowanie drugiego składnika (2) będzie miało postać dla j=1

$$\frac{1}{\Theta_r\eta_s}\sup_{a,y}\sup_{\pi a}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K_r(u)R_s(v)\Delta_x^{(2)}(f_{uv}-f;x_{k-1},x_k)\,du\,dv\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Theta_r\eta_s}\sup_{a,y}\sup_{\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K_r(u)R_s(v)\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f_{uv}-f;x_{k-1},x_k)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}du\,dv =$$

$$= J_{rs}\left[0,2\pi\right]\times\left[0,2\pi\right].$$

Weźmy teraz $0 < \delta_1 < \pi$ i $0 < \delta_2 < \pi$ i podzielmy przedział $\left[0,2\pi\right]\times\left[0,2\pi\right]$ na dziewięć podprzedziałów wg opisu

$\mathrm{I} = \left[\delta_1, 2\pi-\delta_1\right]\times\left[\delta_2, 2\pi-\delta_2\right]$, $\mathrm{II} = \left[\delta_1, 2\pi-\delta_1\right]\times\left[0,\delta_2\right]$,

$\mathrm{III} = \left[0,\delta_1\right]\times\left[0,\delta_2\right]$, $\mathrm{IV} = \left[0,\delta_1\right]\times\left[\delta_2, 2\pi-\delta_2\right]$,

$\mathrm{V} = \left[0,\delta_1\right]\times\left[2\pi-\delta_2, \delta_2\right]$, $\mathrm{VI} = \left[\delta_1, 2\pi-\delta_1\right]\times\left[2\pi-\delta_2, 2\pi\right]$,

$\mathrm{VII} = \left[2\pi-\delta_1, 2\pi\right]\times\left[2\pi-\delta_2, 2\pi\right]$, $\mathrm{VIII} = \left[2\pi-\delta_1, 2\pi\right]\times\left[\delta_2, 2\pi-\delta_2\right]$,

$\mathrm{IX} = \left[2\pi-\delta_1, 2\pi\right]\times\left[0,\delta_2\right]$.

Szacujemy $J_{r,s}$ kolejno na przedziałach od I do IX.

$$J_{r,s}\mathrm{I} \leqslant 2\int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_2}\frac{K_r(u)R_s(v)}{\Theta_r\eta_s}\,du\,dv\ v^{(1)}(f).$$

Z założenia istnieje takie r_0, że jeśli $r > r_0$, to

$$\int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_1} \frac{K_r(u)}{\Theta r}\, du < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{20}\sqrt{V^{(1)}(f)}}$$

dla danego $\varepsilon_1 > 0$ oraz dla $s > s_0$

$$\int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_2} \frac{R_s(v)}{\eta_s}\, dv < \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{20}\sqrt{V^{(1)}(f)}},$$

stąd

$$J_{r,s}I < \frac{\varepsilon_1}{10}.$$

$$J_{r,s}II \leqslant 2\int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_1}\int_0^{\delta_2} \frac{K_r(u)R_s(v)}{\Theta_r\eta_s}\, du dv\ V^{(1)}(f).$$

Z założenia dla danego ε_1 istnieje takie r_1, że dla $r > r_1$

$$\int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_1} \frac{K_r(u)}{\Theta_r}\, du < \frac{\varepsilon_1}{20\ V^{(1)}(f)},$$

stąd

$$J_{r,s}II < \frac{\varepsilon_1}{10}.$$

$$J_{r,s}III \leqslant \sup_{a,y}\ \sup_{\pi a}\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2} \frac{K_r(u)R_s(v)}{\Theta_r\eta_s} \left(\sum_{k=1}^{m}\left(\tfrac{1}{2}\left|\Delta_x^{(2)}(f_{uv}-f;x_{k-1},x_k)\right|\right)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_1}} du dv \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{0<u\leqslant\delta_1\\0<v\leqslant\delta_2}} V^{(1)}(f_{uv}-f) \leqslant \sup_{\substack{0<u<\delta_1\\0<v<\delta_2}} \left[V^{(1)}(f_{u\cdot}-f) + V^{(1)}(f_{\cdot v}-f)\right] < \frac{\varepsilon_1}{10}$$

dla δ_1, δ_2 dobranych do ε_1.

$$J_{r,s}IV \leqslant 2 \int_0^{\delta_1} \int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_2} \frac{K_r(u)R_s(v)}{\Theta_r \eta_s}\, dudv\; V^{(1)}(f).$$

Z założenia dla ε_1 istnieje takie s_1, że

$$\int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_2} \frac{R_s(v)}{\eta_s(v)}\, dv < \frac{\varepsilon_1}{20\, V^{(1)}(f)},$$

stąd

$$J_{r,s}IV < \frac{\varepsilon_1}{10}.$$

$J_{r,s}V$ szacujemy podobnie jak $J_{r,s}III$, a mianowicie

$$J_{r,s}V = \int_0^{\delta_1} \int_{2\pi-\delta_2}^{2\pi} \frac{K_r(u)R_s(v)}{\Theta_r \eta_s}\, V^{(1)}(f_{uv} - f)dudv < \frac{\varepsilon_1}{10}.$$

Z okresowości funkcji f mamy tu $\sup\limits_{\substack{0<u\leqslant\delta_1\\ 2\pi-\delta_2\leqslant v<2\pi}} V^{(j)}(f_{uv}-f) = \sup\limits_{\substack{0<u\leqslant\delta_1\\ 0<v\leqslant\delta_2}} V^{(j)}(f_{uv}-f)$

dla $j = 1,2,3$.

Okresowość funkcji f wykorzystujemy jeszcze przy dalszych szacowaniach.

$J_{r,s}VI$ szacujemy podobnie jak $J_{r,s}II$, czyli

$$J_{r,s}VI \leqslant 2 \int_{\delta_1}^{2\pi-\delta_1} \int_{2\pi-\delta_2}^{2\pi} \frac{K_r(u)R_s(v)}{\Theta_r \eta_s}\, dudv\; V^{(1)}(f) < \frac{\varepsilon_1}{10}.$$

Następnie

$$J_{r,s}VII \leqslant \int_{2\pi-\delta_1}^{2\pi} \int_{2\pi-\delta_2}^{2\pi} \frac{K_r(u)R_s(v)}{\Theta_r \eta_s}\, V^{(1)}(f_{uv}-f)dudv < \frac{\varepsilon_1}{10}$$

(szacowanie przebiega tu jak dla $J_{rs}III$).

$$J_{r,s}VIII \leqslant \int_{2\pi-\delta_1}^{2\pi}\int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_2}\frac{K_r(u)R_s(v)}{\theta_r\eta_s}\,dudv\, V^{(1)}(f) < \frac{\varepsilon_1}{10}$$

(szacujemy tu analogicznie jak dla $J_{rs}IV$).

W końcu

$$J_{r,s}IX \leqslant \int_{2\pi-\delta_1}^{2\pi}\int_{0}^{\delta_2}\frac{K_r(u)R_s(v)}{\theta_r\eta_s}\,V^{(1)}(f_{uv}-f)\,dudv < \frac{\varepsilon_1}{10},$$

(analogicznie do $J_{r,s}III$).

Stąd teza dla $j = 1$.

Dowód dla $j = 2$ przebiega analogicznie.

Dla $j = 3$

$$J_{r,s}\left[0,2\pi\right] \times \left[0,2\pi\right] =$$

$$= \sup_{a,b}\sup_{\pi ab}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{K_r(u)R_s(v)\Delta_{xy}^{(2)}(f_{uv}-f;x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i)}{\theta_r\eta_s}dudv\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leqslant \sup_{a,b}\sup_{\pi ab}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{K_r(u)R_s(v)}{\theta_r\eta_s}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f_{uv}-f;)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} dudv$$

Prawą stronę powyższej nierówności szacujemy jak dla $j = 1$ po przedziałach od I do IX korzystając z założeń twierdzenia i uwzględniając podstawienie

$$\Delta_{xy}^{(2)}(f_{uv}-f) = \Delta_{xy}^{(2)}(f_{uv}-f;\ x_{k-1},x_k,y_{i-1},y_i).$$

LITERATURA

[1] A. LASKOWSKA: O wariacjach mieszanych rzędu drugiego (I), Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 747, seria Mat.-Fiz. z. 42.

[2] A. LASKOWSKA: O wariacjach mieszanych rzędu drugiego (II), Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 747, seria Mat.-Fiz. z. 42.

[3] J. MUSIELAK, W. ORLICZ: On generalized variations (I), Studia Mathematica tom XVIII Fasc. 1, 1959, s. 11-41.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИАМИ СТЕКЛОВА И СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕРВАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $H^{(2)}(p_1,p_2)$

Р е з ю м е

В настоящей работе даны две аппроксимационные теоремы для функций Стеклова и сингулярных интервалов в пространстве $H^{(2)}(p_1,p_2)^*$. Эти теоремы являются обобщением аппроксимационных теорем представленных в работе [3] для пространства комплексных функций одной переменной с ограниченными вариациями V_M.

* $H^{(2)}(p_1,p_2)$ – пространство функции с ограниченными миксированными вторыми вариациями было определено в [1].

APPROXIMATION BY STEKLOV FUNCTIONS AND SINGULAR INTEGRALS IN $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$

S u m m a r y

In this paper there are proved two approximation theorems by Steclov functions and singular integrals in the space $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$. These theorems are generalizations of the results obtained in [3] for the space of complex - valued functions of one variable and of bounded V_M variation.

$H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ is defined in [1].

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 16.02.1982 r.