ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Anna LASKOWSKA

FUNKCJE ABSOLUTNIE CIĄGŁE WZGLĘDEM POTĘG $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$ I WARIACJI MIESZANYCH RZĘDU DRUGIEGO

Streszczenie. W niniejszej pracy wprowadzono dwie równoważne definicje funkcji absolutnie ciągłych względem potęg $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$ i wariacji mieszanych rzędu drugiego[x)]. Wykazano pewne własności tych funkcji oraz udowodniono, że ich klasa jest przestrzenią Banacha. Praca jest kontynuacją prac [1] i [2].

Definicja 1

Funkcje rzeczywiste, określone na R^2, 2π-okresowe ze względu na każdą zmienną, mierzalne nazywamy absolutnie ciągłymi względem potęg $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$ i wariacji mieszanych rzędu drugiego, jeśli dla każdych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ istnieją $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 > 0$ takie, że dla każdych skończonych ciągów nie zachodzących na siebie podprzedziałów $\{(a+\alpha_l, a+\beta_l)\}$, gdzie $l = 1,2,\dots,m$, $\{(b+\gamma_j, b+\gamma_j)\}$, gdzie $j = 1,2,\dots,n$ oraz

$\{(a+\alpha'_l, a+\beta'_l) \times (b+\gamma'_j, b+\lambda'_j)\}$, gdzie $l = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$

zawartych odpowiednio w $[a, a+2\pi]$, $[b, b+2\pi]$ i $[a, a+2\pi] \times [b, b+2\pi]$ zachodzą następujące implikacje

$$\left\{ \left(\sum_{l=1}^{m} (\beta_l-\alpha_l)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \delta_1 \Rightarrow \sup_{a,y}\left(\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\left| f(a+\alpha_l,y) - 2f\left(a+\frac{\alpha_l+\beta_l}{2},y\right) + f(a+\beta_l,y)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \varepsilon_1 \right\}; \qquad (1)$$

x) Wariacje mieszane rzędu drugiego zdefiniowane zostały w [1].

$$\left.\begin{cases}\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\gamma_j)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \delta_2 \Rightarrow \sup\limits_{b,x}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left|f(x,b+\gamma_j) - 2f\left(x,b+\frac{\lambda_j+\gamma_j}{2}\right) + \right.\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left.\left. + f(x,b+\lambda_j)\right|\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \varepsilon_2\end{cases}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{cases}\left(\sum_{l=1}^{m}(\beta'_l-\alpha'_l)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \delta_3 \quad \text{i} \quad \left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda'_j-\gamma'_j)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \delta_4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup\limits_{a,b}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{4}\left|\Delta^{(2)}_{x,y}(f;\ a+\alpha'_l,\ a+\beta'_l,\ b+\gamma'_j,\ b+\lambda_j)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \varepsilon_3\end{cases}\right\}. \tag{3}$$

Zbiór funkcji spełniających definicję 1 oznaczać będziemy $AC_{(p_1,p_2)}$.

Definicja 2

Funkcje rzeczywiste, określone na R^2, 2π-okresowe ze względu na każdą zmienną, mierzalne spełniają warunek I jeśli dla każdych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ istnieją $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 > 0$ i takie, że dla każdych podziałów $\pi_a = (a=a+x_0 < a+x_1 < \ldots < a+x_m = a+2\pi)$, $\pi_b=(b=b+y_0 < b+y_1 < \ldots < b+y_n = b+2\pi)$, $\pi_{ab} = (a=a+x'_0 < a+x'_1 < \ldots < a+x'_m = a+2\pi) \times (b=b+y'_0 < b+y'_1 < \ldots < b+y'_n = b+2\pi)$ oraz $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$ spełnione są implikacje

$$\left.\begin{cases} x_k - x_{k-1} < \delta_1 \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\ldots,m \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup\limits_{a,y}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\left|f(a+x_k,y) - 2f\left(a+\frac{x_k+x_{k-1}}{2},y\right) + f(a+x_{k-1},y)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \varepsilon_1\end{cases}\right\}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{cases} y_i - y_{i-1} < \delta_2 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup\limits_{b,x}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left|f(x,b+y_i) - 2f\left(x,b+\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\right) + f(x,b+y_{i-1})\right|\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \varepsilon_2\end{cases}\right\}. \tag{5}$$

$$\left\{ x'_k - x'_{k-1} < \delta_3 \quad \text{i} \quad y'_i - y'_{i-1} < \delta_4 \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\dots,m;\ i = 1,2,\dots,n \Longrightarrow \right.$$

$$\left. \Longrightarrow \sup_{a,b}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m}\big(\tfrac{1}{4}\big|\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+x'_{k-1}, a+x'_k, b+y'_{i-1}, b+y'_i)\big|\big)^{p_1}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\Big)^{\frac{1}{p_2}} < \varepsilon_3 \right\}. \qquad (6)$$

<u>Twierdzenie 1</u>

Definicja 1 i definicja 2 są równoważne przy założeniu p_1, p_2 1, przy czym def. 2 1 również dla $p_1, p_2 = 1$.
Dowód przebiega analogicznie jak w [5]. Przytoczymy tu tylko jego fragmenty ((3)⟷(6)).
Załóżmy, że f spełnia definicję 1.
Wtedy dla δ_3 i $\delta_4 > 0$ dobranych do $\varepsilon_3 > 0$ wybieramy takie δ'_3 i δ'_4, dla których spełnione jest

a) $0 < u < \delta'_3 \Longrightarrow \dfrac{u^{p_1}}{u} < \dfrac{(\delta_3)^{p_1}}{2\pi}$,

b) $0 < v < \delta'_4 \Longrightarrow \dfrac{v^{p_2}}{v} < \dfrac{(\delta_4)^{p_2}}{2\pi}$.

Mając dowolny podział $\pi_a = (a = a+x'_0 < a+x_1 < \dots < a+x'_m = a+2\pi)$ przedziału $[a, a+2\pi]$ i taki, że $x'_k - x'_{k-1} < \delta'_3$ dla $k = 1,2,\dots,m$ oraz podział $\pi_b = (b = b+y'_0 < b+y'_1 < \dots < b+y'_n = b+2\pi)$ przedziału $[b, b+2\pi]$, że spełnione jest $y'_i - y'_{i-1} < \delta_4$ dla $i = 1,2,\dots,n$ i uwzględniając a) i b) mamy

$$\Big(\sum_{k=1}^{m}(x'_k - x'_{k-1})^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}} = \Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{x'_k - x'_{k-1}}{x'_k - x'_{k-1}}(x'_k - x'_{k-1})^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}} < \frac{\delta_3}{(2\pi)^{\frac{1}{p_1}}}(2\pi)^{\frac{1}{p_1}} = \delta_1$$

$$\text{i} \quad \Big(\sum_{i=1}^{n}(y'_i - y'_{i-1})^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} < \frac{\delta_2}{(2\pi)^{\frac{1}{p_2}}}(2\pi)^{\frac{1}{p_2}} = \delta_2.$$

Stąd i z założenia wynika, że

$$\sup_{a,b}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m}\big(\tfrac{1}{4}\big|\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+x'_{k-1}, a+x'_k, b+y'_{i-1}, b+y'_i)\big|\big)^{p_1}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\Big)^{\frac{1}{p_2}} < \varepsilon_3.$$

Załóżmy teraz, że f spełnia definicję 2.

Wybierzmy δ_3 i $\delta_4 > 0$ i takie, żeby dla wszystkich przedziałów

$$\pi a = (a+a+x'_o < a+x'_1 < \ldots < a+x'_m = a+2\pi)$$

i

$$\pi b = (b=b+y'_o < b+y'_1 < \ldots < b+y'_n = b+2\pi)$$

spełniających warunki

$$x'_k - x'_{k-1} < \delta_3 \quad \text{i} \quad y'_i - y'_{i-1} < \delta_4 \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\ldots,m, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

zachodziła implikacja (6) warunku I.
Szukamy dowolnego skończonego zbioru nie zachodzących podprzedziałów $\{(a+\alpha'_l, a+\beta'_l)\}$ przedziału $[a,a+2\pi]$ oraz podprzedziałów $\{(b+\gamma'_j, b+\lambda'_j)\}$ przedziału $[b,b+2\pi]$, aby

$$\Big(\sum_{l=1}^{m}(\beta'_l-\alpha'_l)^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}} < \delta_3 \quad \text{i} \quad \Big(\sum_{j=1}^{n}(\lambda'_j-\gamma'_j)^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} < \delta_4.$$

Stąd otrzymuje się, że $\beta'_l - \alpha'_l < \delta_3$ i $\lambda'_j - \gamma'_j < \delta_4$ dla $l=1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$.
Rozbijmy teraz "luki" między podprzedziałami $(a+\alpha'_l, a+\beta'_l)$ oraz między podprzedziałami $(b+\gamma'_j, b+\lambda'_j)$ na mniejsze podprzedziały spełniające warunki zawarte definicji 1 w sposób następujący

$$a+\beta'_l = a+x_o^{(l)} < a+x_1^{(l)} < \ldots < a+x_{p_l}^{(l)} = a+\alpha'_{l+1},$$

$$a+\beta'_o = a, \quad a+\alpha'_{m+1} = a+2\pi, \quad \beta'_l < \alpha'_{l+1},$$

gdzie

$$x_k^{(l)} - x_{k-1}^{(l)} < \delta_3, \quad k = 1,2,\ldots,p_l, \quad l = 1,2,\ldots,m,$$

$$b+\lambda'_j = b+y_o^{(j)} < a+y_1^{(j)} < \ldots < b+y_{r_j}^{(j)} = b+\gamma'_{j+1},$$

$$b+\lambda'_o = b, \quad b+\gamma'_{m+1} = b+2\pi, \quad \lambda'_j < \gamma'_{l+1}$$

gdzie

$$y_s^{(j)} - y_{s-1}^{(j)} < \delta_4, \quad s = 1,2,\ldots,r_j, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

(6) warunku I dla podziałów

$$\pi a = (a=a x_0^{(o)} < a+x_1^{(o)} < \ldots < a+x_{p_o-1}^{(o)} < a+\alpha_1' \quad a+\beta_1' < \ldots < a+x_1^{(1)} < \ldots <$$

$$< a+x_{p_1-1}^{(1)} < a+\alpha_2' < \ldots < a+2\pi)$$

i $$\pi b = (b=b+y_0^{(o)} < b+y_1^{(o)} < \ldots < b+y_{r_o-1}^{(o)} < b+\gamma_1' < b+\lambda_1' < b+y_1^{(1)} < \ldots <$$

$$< b+y_{r_1-1}^{(1)} < b+\gamma_2 < \ldots < b+2\pi) \quad \text{daje}$$

$$\sup_{a,b}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+\alpha_l',a+\beta_l',b+\gamma_j',b+\lambda_j')\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a,b}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r_j}\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_l}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+x_{k-1}^{(l)},a+x_k^{(l)},b+y_{s-1}^{(j)},b+y_s^{(j)})\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \varepsilon_{\gamma}$$

Twierdzenie 2

Jeśli $f \in AC_{(p_1,p_2)}$, to f jest ciągła.

Dowód

Weźmy jeden składnik następnika implikacji (1) definicji 1, wtedy

$$\bigvee_{y\ \text{ustal.}} \left| f(a+\alpha_1,y) - 2f(a+\frac{\alpha_1+\beta_1}{2},y) + f(a+\beta_1,y)\right| < \varepsilon_1 .$$

Podstawmy teraz za β_1, α_1+h. Na podstawie twierdzenia z [6] (rozdz. I, § 2) można obliczyć granicę wyrażenia pod modułem przy $h \to 0^+$.

$$0 = \lim_{h\to 0^+}\left[f(a+\alpha_1,y)-2f(a+\alpha_1+\tfrac{h}{2},y) + f(a+\alpha_1+h,y)\right] =$$

$$= f(a+\alpha_1,y) - 2f(a+\alpha_1+0,y) + f(a+\alpha_1+0,y) = f(a+\alpha_1,y) - f(a+\alpha_1+0,y).$$

Przy $h \to 0^-$ mamy $f(a+\alpha_1,y) = f(a+\alpha_1-0,y)$.

Wykorzystując teraz składniki następnika implikacji (2) definicji 1 dostajemy ciągłość funkcji f dla x ustalonego i y dowolnego. Weźmy jeden składnik następnika implikacji (3) i obliczmy jego granicę przy $h\to 0^+$ i $t\to 0^+$ gdzie $h=\beta_1'-\alpha_1'$ i $t=\lambda_j'-\gamma_j'$. Korzystając z twierdzenia 2 z [1] i powyższej części dowodu

$$0=\lim_{\substack{h\to 0^+\\ t\to 0^+}}\Big[f(a+\alpha_1',b+\beta_j')-2f(a+\alpha_1'+\tfrac{h}{2},b+\gamma_j')+f(a+\alpha_1'+h,b+\gamma_j')-$$

$$2f(a+\alpha_1',b+\gamma_1'+\tfrac{t}{2})+4f(a+\alpha_1'+\tfrac{h}{2},b+\gamma_j'+\tfrac{t}{2})-2f(a+\alpha_1'+h,b+\gamma_j'+\tfrac{t}{2})+$$

$$+f(a+\alpha_1',b+\gamma_j'+t)-2f(a+\alpha_1'+\tfrac{h}{2},b+\gamma_j'+t)+f(a+\alpha_1'+h,b+\gamma_j'+t)\Big]=$$

$$=-2f(a+\alpha_1',b+\gamma_j'+0)+4f(a+\alpha_1'+0,b+\gamma_j'+0)-2f(a+\alpha_1'+0,b+\gamma_j'+0)=$$

$$=-2f(a+\alpha_1',b+\gamma_j')\ 2f(a+\alpha_1'+0,b+\gamma_j'+0),$$

a stąd $f(a+\alpha_1',b+\gamma_j')=f(a+\alpha_1'+0,b+\gamma_j'+0)$. Podobnie zajdzie przy $h\to 0^-$, $t\to 0^-$.

<u>Twierdzenie 3</u>

$$AC_{(p_1,p_2)}\subset C\,H^{(2)*}_{(p_1,p_2)}.$$

Dowód przebiega analogicznie jak w [5]. Przytoczymy tu tylko część dowodu (dla (3) definicji 1).

Dla dowolnych a' i $b'>0$ dobierzmy odpowiednio takie $L(a')$ i $Ł(b')$, aby $u^{p_1}\leq L(a')u$ dla $0<u\leq a'$ i $v^{p_2}\leq Ł(b')v$ dla $0<v\leq b'$. Oznaczmy przez $(L)'$, $L(2\pi)$ i przez $(Ł)'$, $Ł(2\pi)$. Wybierzmy teraz $\delta_3>0$ i $\delta_4>0$ i takie, aby dla każdych skończonych ciągów nie zachodzących na siebie podprzedziałów $\{(a+\alpha_1',\ a+\beta_1')\}$ dla $1=1,2,\dots,m$ i $\{(b+\gamma_j',\ b+\lambda_j')\}$, dla $j=1,2,\dots,n$ zawartych odpowiednio w przedziałach $[a,a+2\pi]$ i $[b,b+2\pi]$ zachodziło

$$\left(\sum_{1=1}^{m}(\beta_1'-\alpha_1')^{p_1}\right)<\delta_3\quad\text{i}\quad\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j'-\gamma_j')^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}<\delta_4\implies$$

---

*) $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$ - przestrzeń funkcji o ograniczonych wariacjach mieszanych rzędu drugiego postaci $V^{(i)}(f)$ dla $i=1,2,2$ została zdefiniowana w [1], a $(H^{(2)}_{(p_1,p_2)})$ oznacza zbiór funkcji ciągłych w niej zawartych.

$$\Longrightarrow \sup_{a,b}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+\alpha_l',a+\beta_l',b+\gamma_j',b+\lambda_j')\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} < 1.$$

Ustalmy teraz podział $\Pi a = (a=a+x_0' < a+x_1' < \ldots < a+x_m' = a+2\pi)$ przedziału $[a,a+2\pi]$ i taki, by $x_k' - x_{k-1}' < \frac{(\delta_3)^{p_1}}{(L)^r}$ dla $k = 1,2,\ldots,m$ oraz podział $\Pi b = (b=b+y_0' < b+y_1' < \ldots < b+y_n' = b+2\pi)$ przedziału $[b,b+2\pi]$, aby $y_i' - y_{i-1}' < \frac{(\delta_4)^{p_2}}{(L)^r}$ dla $i = 1,2,\ldots,n$.

Weźmy dowolny podział $(a+x_{k-1}'=a+\tau_0 < \ldots < a+\tau_p = a+x_k')$ przedziału $[a+x_{k-1}', a+x_k']$ i dowolny podział $(b+y_{i-1}'=b+r_0 < \ldots < b+r_s = b+y_i')$ przedziału $[b+y_{i-1}', b+y_i']$. Otrzymamy implikację

$$\left(\sum_{\nu=1}^{p}(\tau_\nu-\tau_{\nu-1})^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \delta_3 \quad \text{i} \quad \left(\sum_{\mu=1}^{s}(r_\mu-r_{\mu-1})^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \delta_4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sup_{a,b}\left(\sum_{\mu=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{p}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+\tau_{\nu-1},a+\tau_\nu,b+r_{\mu-1},b+r_\mu)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} < 1,$$

czyli $\sup\limits_{a,b} V^{(3)}(f,\ a+x_{k-1}',a+x_k',b+y_{i-1}',b+y_i') \leq 1.$

Z własności (z [1]) dla wariacji mieszanych i twierdzenie 2 otrzymujemy

$$V^{(3)}(f) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sup_{a,b} V^{(3)}(f;\ a+x_{i-1}',a+x_i',b+y_{i-1}',b+y_i')$$

$$\leq mn + 4M(mn-1), \quad \text{gdzie} \quad M = \sup_{x,y} f(x,y),$$

a to jest skończone, ponieważ jak określono wyżej m i n są ustalone.

Oznaczmy przez $CH_{(p_1,p_2)}^{(2)}$ przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych zawartych w $H_{(p_1,p_2)}^{(2)}$, $V_{(p_i)}^{(i)}(f) = V^{(i)}(f)$, gdy w definicjach $V^{(i)}(f)$ występują potęgi p_i $(i = 1,2)$ oraz $V_{(p_1,p_2)}^{(3)}(f) = V^{(3)}(f)$, gdy w definicji $V^{(3)}(f)$ występują p_1 i p_2.

Twierdzenie 4

Jeśli $1 \leqslant p_1 < q_1 < \infty$, $1 < p_2 < q_2 < \infty$ oraz $\frac{q_2}{p_2} \geqslant \frac{q_1}{p_1}$, to

$$CH^{(2)}_{(p_1,p_2)} \subset AC_{(q_1,q_2)}.$$

Dowód przebiega analogicznie jak w [5]. Przytoczymy tu tylko część dowodu (dla (3) definicji 1 i dla $1 \leqslant p_i < q_i < \infty$).

Niech

$$f \in CH^{(2)}_{(p_1,p_2)}.$$

Ustalmy $\varepsilon_3 > 0$ i dobierzmy takie $\delta'_3 > 0$, że

$$u^{q_1-p_1} < \frac{(\varepsilon_3)^{q_1}}{\left[V^{(3)}_{(p_1,p_2)}(f)\right]^{p_1}} \quad \text{dla} \quad 0 < u < \delta'_3.$$

Weźmy teraz $\delta_3 > 0$ i $\delta_4 > 0$ takie, że dla $|h| < \delta_3$ i $|t| < \delta_4$

$$|f(x+h,\ y+t) - f(x,y)| < \frac{\delta'_3}{8}.$$

Wtedy dla każdego zbioru nie zachodzących na siebie podprzedziałów $\{(a+\alpha_l,\ a+\beta_l)\}$ oraz $\{(b+\gamma_j,\ b+\lambda_j)\}$ przedziałów odpowiednio $[a,\ a+2\pi]$ i $[b,\ b+2\pi]$ i takich, że

$$\left(\sum_{l=1}^{m}(\beta_l-\alpha_l)^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} < \delta_3 \quad \text{i} \quad \left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\gamma_j)^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} < \delta_4$$

mamy $\beta_l - \alpha_l < \delta_3$ i $\lambda_j - \gamma_j < \delta_4$ dla $l = 1,2,\dots,m,$
$j = 1,2,\dots,n.$

Stąd

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta^{(2)}_{xy}(f;\ a+\alpha_l,\ a+\beta'_l,\ b+\gamma_j,\ b+\lambda_j)\right|\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \left(\tfrac{1}{4} \left| \Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+\alpha_l,\ a+\beta_l,\ b+\gamma_j,\ b+\lambda_j) \right| \right)^{q_1-p_1+p_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{(\varepsilon_3)^{q_1}}{\left[V^{(3)}_{(p_1,p_2)}(f) \right]^{p_1}} \left(\tfrac{1}{4} \left| \Delta_{xy}^{(2)}(f;a+\alpha_l,a+\beta_l,b+\gamma_j,b+\lambda_j) \right| \right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{q_2}\frac{q_2 p_1}{q_1 p_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_3 \frac{\left[V^{(3)}_{(p_1,p_2)}(f) \right]^{\frac{p_1}{q_1}}}{\left[V^{(3)}_{(p_1,p_2)}(f) \right]^{\frac{p_1}{q_1}}} = \varepsilon_3$$

uwzględniając, że $\frac{q_2}{p_2} \cdot \frac{p_1}{q_1} \geqslant 1$ z założenia.

Wniosek

Jeśli $1 \leqslant p_1 < q_1 < \infty$ i $1 \leqslant p_2 < q_2 < \infty$ oraz $\frac{q_2}{p_2} \geqslant \frac{q_1}{p_1}$, to

$$AC_{(p_1,p_2)} \subset AC_{(q_1,q_2)}.$$

Twierdzenie 5

Jeśli dla funkcji f i $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ istnieje taka funkcja $\phi \in AC_{(p_1,p_2)}$ że, spełnione są nierówności $V^{(i)}(f-\phi) < \varepsilon_i$ dla $i = 1,2,3$ to $f \in AC_{(p_1,p_2)}$.

Dowód przebiega analogicznie jak w [4].
Przytoczymy tu jego fragment.
Oznaczając $\varphi = f - \phi$ mamy dla $\left\{(a+\alpha_l',\ a+\beta_l')\right\}$ oraz $\left\{(b+\gamma_j',\ b+\lambda_j')\right\}$ jak w definicji 1

$$\left(\sum_{l=1}^{m} (\beta_l'-\alpha_l')^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} < \delta_3 \quad \text{i} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j'-\gamma_j')^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} < \delta_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{a,b} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \left(\tfrac{1}{4} \left| \Delta_{xy}^{(2)}(f;\ a+\alpha_l',\ a+\beta_l',\ b+\gamma_j',\ b+\lambda_j') \right| \right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a,b}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(\phi;\ a+\alpha_l',\ a+\beta_l',\ b+\gamma_j',\ b+\lambda_j')\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$

$$+ \sup_{a,b}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(\varphi;\ a+\alpha_l',\ a+\beta_l',\ b+\gamma_j',\ b+\lambda_j')\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant$$

$$< \mathcal{E}_3 + V^{(3)}(\varphi) < 2\,\mathcal{E}_3.$$

<u>Twierdzenie 6</u>

Przestrzeń $AC_{(p_1,p_2)}$ jest przestrzenią zupełną z normą

$$\|f\| = \|f\|_{H^{(2)}_{(p_1,p_2)}} = \sum_{i=1}^{3} V^{(i)}(f) + |f(0,0)|.$$

Wykażemy, że $AC_{(p_1,p_2)}$ jest podzbiorem domkniętym $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$.
Warunek $\bigvee_{\mathcal{E}>0}\ \exists_{N(\mathcal{E})>0}\ \bigvee_{r>N} \|f_r - f\| < \mathcal{E}\ \bigvee_{x,y}$ ma pociągać, że funkcja $f \in AC_{(p_1,p_2)}$, gdzie ciąg $f_r \in AC_{(p_1,p_2)}$, a f jest jego granicą. Ponieważ $f_r \in AC_{(p_1,p_2)}$ dla r naturalnego, więc dla każdego r i $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3 > 0$ można dobrać takie $\delta_i = \delta_i(\mathcal{E}_i, r)$, $\delta_4 = \delta_4(\mathcal{E}_3, r)$, gdzie $i = 1,2,3$ że spełniona jest definicja 1.
Weźmy teraz dla dowolnego $\mathcal{E}_1 > 0$, $r_o = [N(\mathcal{E}_1)] + 1$. Wtedy korzystając z definicji 1 dla funkcji f_{r_o} i $\delta_i = \delta_i(\mathcal{E}_i, r_o)$, $\delta_4 = \delta_4(\mathcal{E}_3, r_o)$ gdzie $i = 1,2,3$ mamy

$$\sup_{a,y}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\tfrac{1}{2}\left|f(a+\alpha_l, y) - 2f\left(a + \frac{\alpha_l+\beta_l}{2}, y\right) + f(a+\beta_l, y)\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{E}_1 + V^{(1)}(f_{r_o} - f) < 2\mathcal{E}_1.$$

Podobnie

$$\sup_{b,x}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\left|f(x,b+\gamma_j) - 2f\left(x, b + \frac{\gamma_j+\lambda_j}{2}\right) + f(x,b+\lambda_j)\right|\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} < 2\mathcal{E}_2$$

oraz

$$\sup_{a,b}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\tfrac{1}{4}\left|\Delta_{xy}^{(2)}(f,\ a+\alpha_l',\ a+\beta_l',\ b+\gamma_j',\ b+\lambda_j')\right|\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} < 2\varepsilon_3.$$

<u>Twierdzenie 7</u>

Jeśli $V^{(i)}(f_{h\cdot}-f)\to 0$ przy $h\to 0^+$ oraz $V^{(i)}(f_{\cdot t}-f)\to 0$ przy $t\to 0^+$, gdzie $f_{h\cdot} = f(x+h,y)$, $f_{\cdot t} = f(x,y+t)$ oraz $i = 1,2,3$ i $f \in L$ to $f \in AC_{(p_1,p_2)}$ dla $1 \leqslant p_1,p_2 < \infty$.

<u>Dowód</u>

Na podstawie twierdzenia 1 z [3] z założeń naszego twierdzenia mamy $V^{(i)}(\sigma_{mn}(f)-f)\to 0$ przy m i $n\to\infty$ oraz $i = 1,2,3$. Ponieważ $\sigma_{m,n}(f)$ są wielomianami trygonometrycznymi, więc są funkcjami z $AC_{(p_1,p_2)}$ dla $1 \leqslant p_1,\ p_2 < \infty$.
Z twierdzenia 5 otrzymujemy tezę twierdzenia.

LITERATURA

[1] A. Laskowska: O wariacjach mieszanych rzędu drugiego (I), Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz. z. 42.

[2] A. Laskowska: O wariacjach mieszanych rzędu drugiego (II), Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz. z. 42.

[3] A. Laskowska: Aproksymacja średnimi Fejéra w przestrzeni $H^{(2)}_{(p_1,p_2)}$, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz.

[4] E.R. Love: A Generalization of absolute continuity, The Journal of the London Mathematical Society vol. 26 PART I, Jan. 1951 No, 101, str. 1-13.

[5] J. Musielak, W. Orlicz: On generalized variations I, Studia Mathematica, Tom XVIII Fasc. 1, 1959, str. 11-41.

[6] A. Laskowska: Pewne klasy funkcji dwóch zmiennych ograniczonych wariacjach mieszanych, praca doktorska, UAM Poznań, 1984.

АБСОЛЮТНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО СТЕПЕНЕЙ $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$ И ВТОРЫХ МИКСИРОВАННЫХ ВАРИАЦИЙ

Р е з ю м е

В настоящей работе вводятся два эквивалентных определения абсолютно-непрерывных функций относительно степеней $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$ и вторых миксированных вариаций*. Доказываются некоторые свойства этих функций. Устанавливается, что класс этих функций есть банахово пространство. Работа является продолжением [1] и [2].

* См. [1].

ABSOLUTE CONTINUITY FUNCTIONS WITH POWERS $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$ AND MIXED VARIATIONS OF THE SECOND ORDER

S u m m a r y

In this paper there are introduced two equivalent definitions of absolute continuity of functions with powers $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$ and mixed variations of the second order x).

Some properties of these functions are studied and it is proved, that the class of functions of this type is a Banach space.

x) These variations are defined in [1].

Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło: 16.02.1982 r.