ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 42 Nr kol. 747

Jan POCHCIAŁ

O TOPOLOGIACH LINIOWYCH W PRZESTRZENIACH ZE ZBIEŻNOŚCIĄ

Streszczenie. W pracy podane są warunki dostateczne na to, aby zbieżność G w przestrzeni liniowej X była generowana przez topologię, w której operacje dodawania i mnożenia przez liczby rzeczywiste są ciągłe, tzn. aby przestrzeń ze zbieżnością (X, G) można było utożsamiać z przestrzenią liniowo-topologiczną. W szczególności rozpatruje się topologię TG.

1. Pojęcie zbieżności ciągu związane jest zasadniczo z pojęciem topologii, tzn. jeśli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną to ciąg $\{x_n\}$ elementów przestrzeni X jest zbieżny do $x \in X$, jeżeli dla każdego $U \in \tau$ takiego, że $x \in U$, $x_n \in U$ dla prawie wszystkich n. Istnieje jednak szereg zagadnień, w których topologizowanie występujących tam i zadanych bezpośrednio "zbieżności" jest nienaturalne lub w ogóle niemożliwe jak np. dla zbieżności ciągu funkcji "prawie wszędzie" czy zbieżności ciągu operatorów Mikusińskiego. Ponadto podejście zbieżnościowe jest często znacznie dogodniejsze ze względu zarówno na specyfikę metody jak i większą naturalność i intuicyjność rozważanych pojęć. Dlatego też celowe jest rozpatrywanie aksjomatycznej teorii zbieżności zapoczątkowanej już przez Frecheta i Urysohna.

2. Niech dany będzie dowolny zbiór X. Przez X^N oznaczymy rodzinę wszystkich ciągów o elementach z X. Zbieżnością G nazywać będziemy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X^N \times X$.

Jeżeli $<\{x_n\}, x> \in G$, to będziemy mówili, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x, co zapisywać będziemy $x_n \to x(G)$ lub $x_n \to x$. Zauważmy, że każda zbieżność G generuje pewną topologię TG w X w następujący sposób: $U \in TG$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in U$ i każdego ciągu $\{x_n\}$ $x_n \to x$ istnieje N, że dla $n > N$ $x_n \in U$. Jednakże zbieżność generowana przez topologię TG (LTG) nie musi być równa wyjściowej zbieżności G (patrz też [2]).

Niech, np. $X = R^1$ a zbieżność G określona będzie następująco $x_n \to x(G) \Longleftrightarrow x_n = x$ dla każdego n. Łatwo widać, że topologia TG jest topologią najmocniejszą i $x_n \to x(LTG) \Longleftrightarrow x_n = x$ dla $n > N$.

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy następujące własności zbieżności:

F $\quad x_n \to x \Rightarrow \forall \{x_{n_k}\} \; x_{n_k} \to x$

U $\quad x_n \not\to x \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} \forall \{x_{n_{k_l}}\} \; x_{n_{k_l}} \not\to x$

S $\quad x_n = x \; \forall n \Rightarrow x_n \to x$

H $\quad x_n \to x \;$ i $\; x_n \to y \Rightarrow x = y$

Zauważmy, że zbieżność w przestrzeni topologicznej Hausdorffa spełnia warunki FUSH.

Znane jest następujące twierdzenie Kisyńskiego (patrz [4]). Jeżeli zbieżność G spełnia warunek H, to G = LTG (zbieżność G jest topologiczna) wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżność G spełnia warunki FUS.

Z twierdzenia tego wynika, że jeżeli (X, G) jest przestrzenią ze zbieżnością oraz G spełnia warunki FUSH, to w X istnieje topologia (TG) taka, że zbieżność generowana przez tę topologię (LTG) równa jest wyjściowej zbieżności G.

Niniejsza praca jest próbą odpowiedzi na pytanie, kiedy dla danej zbieżności w przestrzeni liniowej istnieje topologia liniowa generująca zadaną zbieżność. W szczególności bada się przy jakich warunkach topologia TG jest topologią liniową, tzn. kiedy przestrzeń topologiczna (X, TG) zadająca wyjściową zbieżność G jest przestrzenią liniowo-topologiczną.

3. Niech (X, G) będzie przestrzenią liniową ze zbieżnością spełniającą warunki FUSH.

Załóżmy ponadto, że zbieżność G spełnia następujący warunek:

L $\quad$ (a) $\quad x_n \to x \;$ i $\; y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$

(b) $\quad x_n \to x \Rightarrow \forall \lambda \in R \;\; \lambda x_n \to \lambda x$

(c) $\quad \lambda_n \to \lambda \Rightarrow \forall x \in X \;\; \lambda_n x \to \lambda x$

gdzie $\lambda_n \to \lambda$ oznacza zwykłą zbieżność liczb rzeczywistych.

W dalszej części pracy przez zbiór otwarty rozumieć będziemy zbiór otwarty w topologii TG, a przez otoczenie punktu x $(U(x))$ zbiór otwarty zawierający x.

<u>Lemat 1</u>

Jeśli U jest zbiorem otwartym, to dla każdego $\lambda \neq 0$ i każdego $x_0 \in X$ λU i $x_0 + U$ są zbiorami otwartymi.

Dowód

Niech $x \in \lambda U$ oraz $x_n \to x$. Wtedy istnieje $y \in U$, że $x = \lambda y$. Stąd z L(b) wynika, że $\frac{x_n}{\lambda} \to \frac{x}{\lambda} = y$, czyli $\frac{x_n}{\lambda} \in U$ dla $n > N$. Zatem $x_n \in \lambda U$ dla $n > N$ co oznacza, że zbiór λU jest otwarty. Niech teraz $x \in x_o + U$ oraz $x_n \to x$. Wtedy istnieje $\bar{x} \in U$ taki, że $x = x_o + \bar{x}$. Stąd z L(a,b) wynika, że $x_n - x_o \to x - x_o = \bar{x}$, czyli $x_n - x_o \in U$ dla $n > N$, zatem $x_n \in x_o + U$ dla $n > N$ co oznacza, że $x_o + U$ jest otwarty.

Dla każdego $A \subset X$ wprowadzimy następujące oznaczenie

$$sgA = \left\{ z \in X:\ z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad x,y \in A \right\}$$

Uwaga

Oczywiście $sgA \subset convA$, gdzie $convA$ oznacza powłokę wypukłą zbioru A.

Lemat 2

Jeśli zbiór U jest otwarty, to sgU jest otwarty.

Dowód

Niech $z \in sgU$ oraz $z_n \to z$. Czyli istnieją $x,y \in U$ i α $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, że $z = \alpha x + (1-\alpha)y$. Niech $x_n = x + z_n - z$ $y_n = y + z_n - z$ dla każdego n. Z L(a,b) wynika, że $x_n \to x$ $y_n \to y$, czyli istnieje N, że dla $n > N$ $x_n \in U$ $y_n \in U$. Ponieważ $z_n = \alpha x_n + (1-\alpha)y_n$, więc dla $n > N$ $z_n \in sgU$, czyli sgU jest otwarty.

Zbiór $A \subset X$ nazywać będziemy ograniczonym, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$, $x_n \in A$ dla $n = 1,2,\ldots$ i każdego ciągu liczb $\{\lambda_n\}$ takiego, że $\lambda_n \to 0$ $\lambda_n x_n \to 0$.

Lemat 3

Jeśli A jest zbiorem ograniczonym, to sgA jest zbiorem ograniczonym.

Dowód

Niech $z_n \in sgA$ dla $n = 1,2,\ldots$ i $\lambda_n \to 0$. Wtedy dla każdego n istnieją $x_n, y_n \in A$ oraz α_n, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$ takie, że $z_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)y_n$, czyli $\lambda_n z_n = \lambda_n \alpha_n x_n + \lambda_n(1-\alpha_n)y_n$. Z ograniczoności zbioru A wynika, że $\lambda_n \alpha_n x_n \to 0$ i $\lambda_n(1-\alpha_n)y_n \to 0$, więc z L(a) $\lambda_n z_n \to 0$, czyli sgA jest ograniczony.

Lemat 4

Dla dowolnego zbioru A i dowolnej liczby λ $\lambda\, sgA = sg\lambda A$.

Lemat 5

Zbiór A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia zera U istnieje liczba $\varepsilon_{U,A}$ taka, że dla każdego $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_{U,A}$ $\varepsilon A \subset U$.

Dowód

$\Longrightarrow$ Nie wprost. Załóżmy, że dla każdego $\varepsilon_{U,A}$ istnieje $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_{U,A}$ takie, że $\varepsilon A \not\subset U$ tzn. istnieją ciągi $\{\varepsilon_n\}$ $\varepsilon_n \to 0$ i $\{x_n\}$, $x_n \in A$ dla $n = 1,2,\ldots$ takie, że dla każdego εn $\varepsilon_n x_n \notin U$ co jest sprzeczne z ograniczonością zbioru U.

$\Longleftarrow$ Niech $x_n \in A$ dla $n = 1,2,\ldots$ i $\varepsilon_n \to 0$. Wtedy dla każdego otoczenia zera U $\varepsilon_n x_n \in U$ dla $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon_{U,A}$. Zatem $\varepsilon_n x_n \to 0(LTG)$, czyli $\varepsilon_n x_n \to 0(G)$.

W poniższych lematach 6 i 7 przyjmijmy dodatkowo następujące założenie: w przestrzeni (X,TG) istnieje zbiór otwarty i ograniczony U^*.

Lemat 6

Dodawanie w przestrzeni (X,TG) jest ciągłe.

Dowód

Niech $z = x + y$. Z lematu 1 wynika, że wystarczy ograniczyć się do przypadku $x = y = 0$. Niech U będzie dowolnym otoczeniem punktu $z = 0$. Przyjmijmy $U(x) = U(y) = \frac{1}{2}\varepsilon_{U,sgU^*}U^*$, gdzie ε_{U,sgU^*} ma takie znaczenie jak w lemacie 5. Wtedy z lematów 4 i 5 wynika, że

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_{U,sgU^*}U^* + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{U,sgU^*}U^* \subset \varepsilon_{U,sgU^*}sgU^* \subset U$$

Lemat 7

Mnożenie elementów przestrzeni (X,TG) przez liczby rzeczywiste jest operacją ciągłą.

Dowód

Niech $y_0 = \lambda_0 x_0$. Należy pokazać, że dla każdego otoczenia zera $U(0)$ istnieją $\bar{\lambda}_0 > 0$ i otoczenie zera $V(0)$ takie, że dla każdego $|\lambda| < \bar{\lambda}_0$ $(\lambda_0 + \lambda)(x_0 + V(0)) \subset y_0 + U(0)$, tzn. $\lambda_0 V(0) + \lambda x_0 + \lambda V(0) \subset U(0)$.

Z lematu 6 wynika, że wystarczy pokazać, że dla każdego otoczenia zera $U(0)$ istnieją $\bar{\lambda}_0 > 0$ i otoczenie zera $V(0)$ takie, że dla każdego $|\lambda| < \bar{\lambda}_0$ zachodzą inkluzje:

$$(*)\qquad \begin{aligned} \lambda_0 V(0) &\subset U(0) \\ \lambda x_0 &\in U(0) \\ \lambda V(0) &\subset U(0) \end{aligned}$$

Niech

$$\bar{\lambda}_0 = \varepsilon_{U(0),\{x_0\}}$$

$$V(0) = \frac{1}{\max(|\lambda_0|, \bar{\lambda}_0)} \varepsilon_{U(0),U*U^*}$$

Można łatwo sprawdzić, że dla tak skonstruowanych $\bar{\lambda}_0$ i $V(0)$ zachodzą inkluzje (*), co kończy dowód.

Ponieważ dla każdej zbieżności G spełniającej warunki FUSH topologia TG spełnia warunek T_1, więc z lematów 5, 6 i 7 wynika bezpośrednio.

Twierdzenie 1

Jeśli (X,G) jest przestrzenią liniową ze zbieżnością G spełniającą warunki FLUSH oraz w (X,TG) istnieje zbiór otwarty, ograniczony, to przestrzeń (X,TG) jest przestrzenią liniowo-topologiczną Hausdorffa lokalnie ograniczoną.

Twierdzenie 2

Jeśli (X,G) jest przestrzenią liniową ze zbieżnością G spełniającą warunki FLUSH oraz dla każdego otoczenia zera U istnieje wypukłe otoczenie zera zawarte w U, to przestrzeń (X,TG) jest przestrzenią liniowo-topologiczną Hausdorffa lokalnie wypukłą.

Dowód

Niech U będzie wypukłym, gwiaździstym otoczeniem zera. Dla wykazania ciągłości dodawania wystarczy przyjąć (patrz lemat 6) $U(x) = U(y) = \frac{1}{2}U$.

Aby wykazać ciągłość mnożenia wystarczy przyjąć (patrz inkluzje (*) w lemacie 7)

$$\bar{\lambda}_0 = \varepsilon_{U(0),\{x_0\}}$$

$$V(0) = \frac{U(0)}{\max(\bar{\lambda}_0, |\lambda_0|)}.$$

Uwaga

Jeżeli spełnione są założenia Twierdzeń 1 i 2 lub w Twierdzeniu 1 zamiast założenia, że istnieje zbiór otwarty, ograniczony założymy, że istnieje zbiór otwarty, ograniczony i wypukły, to przestrzeń (X,LTG) jest przestrzenią liniowo-topologiczną Hausdorffa lokalnie ograniczoną i lokalnie wypukłą, czyli jest przestrzenią normowalną (patrz [3]).

W dalszej części pracy załóżmy zamiast warunku L nieco mocniejszy warunek

L' (a) $x_n \to x$ i $y_n \to y \implies x_n + y_n \to x + y$

(b) $x_n \to x$ i $\lambda_n \to \lambda \implies \lambda_n x_n \to \lambda x$.

Lemat 8

Jeśli U jest otoczeniem zera, to zbiór

$$U_\lambda = \left\{x \in U : \forall_{|\lambda| \leqslant 1} \ \lambda x \in U\right\}$$

jest również otoczeniem zera.

Dowód

Przypuśćmy, że U nie jest otwarty tzn. istnieje $x \in U_\lambda$ i $\{x_n\}$, $x_n \to x$ taki, że $x_n \notin U_\lambda$ dla każdego n, czyli istnieje $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n| \leqslant 1$, że $\lambda_n x_n \notin U$ dla każdego n. Ponieważ istnieje $\{\lambda_{n_k}\}$ $\lambda_{n_k} \to \lambda'$ i $x_{n_k} \to x$, więc z L'(b) $\lambda_{n_k} x_{n_k} \to \lambda x \in U$, czyli otrzymaliśmy sprzeczność z otwartością U co wraz z $0 \in U_\lambda$ kończy dowód.

Twierdzenie 3

Jeśli (X,G) jest przestrzenią liniową ze zbieżnością G spełniającą warunki FL'USH oraz przestrzeń (X,TG) spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności, to przestrzeń (X,TG) jest przestrzenią liniowo-topologiczną.

Dowód

Ciągłość dodawania.

Niech $\{O_n\}$ będzie bazą otoczeń zera i dla każdego n $O_{n+1} \in O_n$. Pokażemy podobnie jak w lemacie 6, że dla każdego otoczenia zera U istnieje N, że $O_N + O_N \subset U$. Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. istnieją ciągi $\{x_n\}, \{y_n\}$, $x_n, y_n \in O_n$, że $x_n + y_n \notin U$ dla każdego n. Ponieważ $x_n \to 0$ i $y_n \to 0$, więc z L'(a) otrzymujemy sprzeczność.

Ciągłość mnożenia.

Podobnie jak w lemacie 7 wystarczy wykazać inkluzje (*). Przyjmując

$$\bar{\lambda}_0 = \varepsilon_{U_\lambda}(0), \{x_0\}$$

$$V(0) = \frac{1}{\max(\bar{\lambda}_0, |\lambda_0|)} U_\lambda(0)$$

otrzymamy tezę twierdzenia.

Łatwo widać, że zbieżność w przestrzeni liniowo-topologicznej T_1 spełia warunki FL'USH. Jednakże w przestrzeni liniowej X ze zbieżnością G pełniającą warunki FL'USH może nie istnieć topologia zadająca wyjściową zbieżność i zgodna z operacjami dodawania i mnożenia (w szczególności otyczy to topologii TG), tzn. przestrzeni (X,G) nie można utożsamiać przestrzenią liniowo-topologiczną. Poniższy przykład takiej przestrzeni est modyfikacją przykładu podanego przez P. Antosika.

rzykład

Niech X będzie przestrzenią liniową funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$. celu zdefiniowania zbieżności G uzupełnijmy bazę podprzestrzeni wielomianów do bazy przestrzeni X i oznaczmy to uzupełnienie przez B. Wtey dla każdego $x \in X$ $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_{\alpha_i} + w$, gdzie w jest wielomianem, a $\alpha_i \in B$.

Zbieżność G zdefiniujemy następująco:

$x_n \to x(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1^o istnieją $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_N} \in B$, że dla każdego n $x_n - x = t_{n1}x_{\alpha_1} + \ldots t_{nN}x_{\alpha_N} + w_n$ oraz

2^o $\|x_n - x\| \to 0$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę w $C(0,1)$.

Można łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowana zbieżność spełnia warunki L'USH.

Przypuśćmy, że zbieżność G jest generowana przez pewną topologię liiową. Rozpatrzmy dowolny liniowo niezależny ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\|x_n\| < \frac{1}{n}$ la każdego n, np. niech $x_n = \frac{1}{n} \sin nt$. Oczywiście $x_n \not\to 0$. Dla każdego określmy ciąg wielomianów $\{w_{nk}\}$ taki, że $w_{nk} \xrightarrow[k]{} x_n$ i $\|w_{nk} - x_n\| \leq \frac{1}{k}$. auważmy, że dla każdego ciągu $\{k_n\}$, $k_n \to \infty$ $w_{nk_n} \to 0$. Ponieważ zbieżość w każdej przestrzeni liniowo-topologicznej możemy zadać przy pomocy odziny quasi-norm ciągłych (patrz [1]), więc istnieje quasi-norma p taa, że $p(x_n) \not\to 0$, czyli bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że stnieje $\varepsilon > 0$, że $|p(x_n)| > \varepsilon$ dla każdego n.

Ale ponieważ $w_{nk} \xrightarrow[k]{} x_n$, więc dla każdego n istnieje $k_n > n$, że $|p(x_n) - p(w_{nk_n})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem $p(w_{nk_n}) \not\to 0$ i $w_{nk_n} \not\to 0$ co jest sprzeczne określeniem macierzy $\{w_{nk}\}$.

waga

Można udowodnić, że rozważana przestrzeń nie jest liniowo-topologiczna ez stosowania pojęcia quasi-normy. Zauważmy mianowicie, że zbieżność w ażdej przestrzeni topologicznej regularnej spełnia następujący warunek:

Jeśli dla każdego n $x_{nm} \xrightarrow[m]{} x_n$ i istnieje k_n, że dla każdego $m_n > k_n$ $x_{nm_n} \longrightarrow x$, to $x_n \longrightarrow x$.

Oczywiście zbieżność zdefiniowana w przykładzie warunku tego nie spełnia.

W Twierdzeniach 1-3 sformułowanych w pracy oprócz założeń dotyczących zbieżności G podaje się założenia dotyczące generowanej przez nią topologii TG. Nadal otwarty pozostaje więc problem pełnej zbieżnościowej charakteryzacji przestrzeni liniowo-topologicznych. Problem ten można by rozwiązać rozpatrując zamiast warunków FLUSH dla ciągów odpowiedniki tych warunków dla ciągów uogólnionych, co stanowi jednak całkowitą zmianę zagadnienia.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna, Warszawa 1969.

[2] Bednarek M., Mikusiński J.: Convergence and topology, Bull. Acad. Polon. Soi., Ser. Soi. Math., Astr., Phys., 17 (1969) p. 437-442.

[3] Канторович Л.В., Акилов Г.П.5 Функциональный анализ, Москва 1977.

[4] Kisyński J.: Convergence du type L, Colloquium Math., 7 (1960) p. 205-211.

О ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СХОДИМОСТЬЮ

Р е з ю м е

В работе даются достаточные условия для того, чтобы сходимость G в линейном пространстве X порождалась топологией, в которой операции сложения и умножения на вещемтвенные числа непрерывны, т.е. чтобы пространство со сходимостью (X,G) можно было отождествлять с линейно-топологическим пространством. В частности, рассматривается топология TG.

ON LINEAR TOPOLOGIES FOR CONVERGENCE SPACES

S u m m a r y

The paper is concerned with sufficient conditions under which a linear convergence is generated by a linear topology. In particular TG topology is studied.

Recenzent: Doc. dr hab. Piotr Antosik

Wpłynęło: 10.06.1981 r.