

Grażyna TWARUŻEK

OBSZARY STABILNOŚCI RÓWNIANIA MATHIEU I HILLA

Streszczenie. W pracy przedstawiono obszary stateczności drgań parametrycznych opisanych przez liniowe równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach typu Mathieu i Hilla. Dla równania Mathieu przedstawiono je w oparciu o prace [2, 3], natomiast dla równania Hilla - analitycznie przez wybranie skończonych sum parametrów i odrzucenie wielkości małego rzędu. Powstały błąd oszacowano, a także uwzględniono jego wpływ na zmianę obszarów niestateczności. Obszary niestateczności równania Mathieu i Hilla pokazano na wykresach.

Drgania wywołane zmianą parametrów charakteryzujących właściwości układu nazywamy drganiami parametrycznymi. Parametrami tymi mogą być współczynniki bezwładności, sztywności i inne, które są funkcjami czasu lub położenia. Drgania takie występują w przekładniach zębatych, wirujących wałach o niesymetrycznym przekroju, silnikach tłokowych, układach korbowych napędu elektrowozu i innych [2, 3, 5, 6].

Ruch tych układów opisywany jest równaniami różniczkowymi o zmiennych współczynnikach.

W niniejszej pracy przedstawiono analizę różniczkowych równań liniowych o periodycznie zmiennych współczynnikach typu Mathieu i Hilla. Tzn. wyznaczono obszary niestabilności dla tego typu równań. Równanie typu Mathieu, które jest szczególnym przypadkiem równania typu Hilla, zostało dość dobrze i szczegółowo opracowane w wielu pracach np. [2, 3]. W niniejszej pracy skorzystano z wyników tych opracowań dla pokazania obszarów stabilności równania Mathieu.

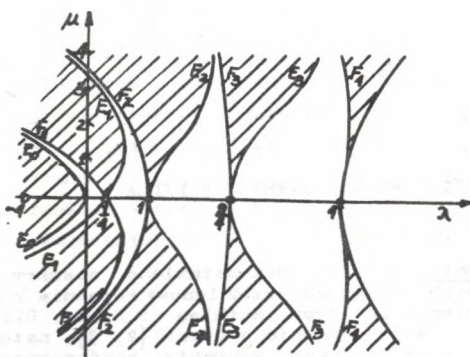
Równanie ruchu wirującego wału o niesymetrycznym przekroju por. [5] przyjmuje postać równania Mathieu:

$$\ddot{q} + (\lambda + \mu \cos t) q = 0, \quad (1)$$

gdzie:

μ, λ - parametry określające układ.

Obszary stateczności (zakreskowane) wykreślono w układzie $\mu - \lambda$ (rys. 1) por. [2].



Rys. 1

Równania krzywych określające obszary stateczne i niestateczne dla równania (1):

$$E_0: \lambda = -\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{7}{12}\mu^4 - \frac{29}{144}\mu^6 +$$

$$E_1: \lambda = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}\mu^2 + \frac{1}{32}\mu^3 - \frac{1}{384}\mu^4 +$$

$$F_1: \lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}\mu^2 - \frac{1}{32}\mu^3 - \frac{1}{384}\mu^4 +$$

$$E_2: \lambda = 1 + \frac{5}{12}\mu^2 - \frac{763}{3456}\mu^4 +$$

$$E_3: \lambda = \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\mu^2 - \frac{1}{32}\mu^3 + \frac{13}{5129}\mu^4 +$$

$$F_3: \lambda = \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\mu^2 + \frac{1}{32}\mu^3 + \frac{13}{5120}\mu^4 +$$

Przy $\mu = 0$ rezonans parametryczny występuje dla wartości $\lambda = \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4} \dots$

Przykładem równania prowadzącego do równania Hilla jest równanie drgań skrętnych jednocylindrowego silnika z kołem zamachowym zredukowanym do prostego wału z dwoma dyskami por. [5]:

$$\ddot{q} + \frac{\omega^2}{1 - \mu \cos 2\varphi t} q = 0, \quad (2)$$

gdzie:

ω, μ, φ - parametry określające układ ($\mu < 0,5$).

Aby równanie (2) przyjęło postać równania Hilla por. [3]:

$$\ddot{q} + (Q_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos 2nt) q = 0 \quad (3)$$

rozłożono współczynniki stojące przy q w równaniu (2) w szereg parzystych kątów.

Ze względu na to, że $|\mu \cos 2\omega t| < 1$, wyrażenie $\frac{1}{1 - \mu \cos 2\omega t}$ rozwinięto w szereg Taylora postaci:

$$\frac{1}{1 - \mu \cos 2\omega t} = 1 + \mu \cos 2\omega t + \mu^2 \cos^2 2\omega t + \mu^3 \cos^3 2\omega t + \dots$$

Aby zamienić potęgę cosinusów na sumę cosinusów, skorzystano ze wzoru por. [1].

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} [\cos nx + n \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x + \dots],$$

przy czym ostatni wyraz w tym wzorze ma postać:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2k \cdot (2k-1) \dots (k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \quad \text{lub} \quad \frac{(2 \cdot k+1) \cdot 2k \dots (k+2)}{1 \cdot 2 \dots k}$$

zależnie od tego czy $n = 2k$, czy $2k+1$.

Po zamianie potęg cosinusów na sumę cosinusów parzystych kątów, równanie drgań skrętnych jednocylindrowego silnika (2) przyjęło postać równania Hilla. Kolejne parametry w tym równaniu przyjmują postać:

$$Q_0 = (1 + \frac{1}{2} \mu^2 + \frac{3}{8} \mu^4 + \frac{10}{32} \mu^6 + \frac{35}{128} \mu^8 + \frac{150}{512} \mu^{10} + \dots) \cdot \omega^2$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} (\mu + \frac{3}{4} \mu^3 + \frac{5}{8} \mu^5 + \frac{35}{64} \mu^7 + \frac{63}{128} \mu^9 + \dots) \cdot \omega^2$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \mu^2 + \frac{1}{2} \mu^4 + \frac{15}{32} \mu^6 + \frac{7}{16} \mu^8 + \frac{127}{256} \mu^{10} + \dots) \cdot \omega^2$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} (\frac{1}{4} \mu^3 + \frac{7}{16} \mu^5 + \frac{21}{32} \mu^7 + \frac{21}{64} \mu^9 + \dots) \cdot \omega^2$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} (\frac{1}{8} \mu^4 + \frac{3}{16} \mu^6 + \frac{7}{32} \mu^8 + \frac{40}{128} \mu^{10} + \dots) \cdot \omega^2$$

$$Q_5 = \frac{1}{2} (\frac{1}{16} \mu^5 + \frac{7}{64} \mu^7 + \frac{9}{64} \mu^9 + \dots) \cdot \omega^2$$

$$Q_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{32} \mu^6 + \frac{1}{16} \mu^8 + \frac{69}{512} \mu^{10} + \dots \right) \cdot \omega^2$$

$$Q_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{64} \mu^7 + \frac{9}{256} \mu^9 + \dots \right) \cdot \omega^2$$

$$Q_8 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{128} \mu^8 + \frac{7}{256} \mu^{10} + \dots \right) \cdot \omega^2$$

$$Q_9 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{256} \mu^9 + \dots \right) \cdot \omega^2$$

Linie graniczne n-tego obszaru niestateczności dla równania Hilla określone zostały równaniem por. [3]:

$$Q_0 = n^2 \pm Q_n$$

Przy określaniu obszarów niestatecznych dla wałów, gdzie Q_n wg (4) odzrucano μ^i dla $i = 7, 8, 9 \dots$ jako wielkości małego rzędu. Wybrane skończone sumy parametrów potrzebne do badania obszarów niestatecznych zostały oznaczone następująco:

$$s_0 = 1 + \frac{1}{2} \mu^2 + \frac{3}{8} \mu^4 + \frac{10}{32} \mu^6$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{3}{4} \mu^3 + \frac{5}{8} \mu^5 \right)$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mu^2 + \frac{1}{2} \mu^4 + \frac{15}{32} \mu^6 \right)$$

$$s_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \mu^3 + \frac{7}{16} \mu^5 \right)$$

$$s_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \mu^4 + \frac{3}{16} \mu^6 \right)$$

$$s_5 = \frac{1}{32} \mu^5$$

Na podstawie (5) kolejne linie obszarów niestateczności dla wałów określono następującymi równaniami:

$$s_0 \omega^2 = 1 \pm s_k \omega^2 \quad (k = 1-6)$$

Tzn. kolejne k-te obszary niestateczności zostały opisane nierównościami:

$$\frac{k^2}{s_0 + s_k} < \omega^2 < \frac{k^2}{s_0 - s_k}$$

Dla wielkości $\mu \in (0; 0,5)$ obliczono ω^2 i ω_+^2 (symboliczne oznaczenie dolnej i górnej wartości kolejnego obszaru niestateczności) i nakreślono linią ciągłą krzywe ograniczające obszary niestateczne (rys. 2).

Na skutek odrzucenia parametrów μ^i dla $i = 7, 8, \dots$ powstał błąd mający wpływ na zasięg kolejnych obszarów niestateczności. Przy szacowaniu błędu skorzystano z porównania sum $s_k + \delta_k$

$$(k = 0-6) \text{ z sumami } \sum_{k=0,2,4,6}^{2n} \mu^k \quad \text{lub} \quad \sum_{k=1,3,5}^{2n-1} \mu^k,$$

wartość została wyznaczona jako suma ciągu geometrycznego, którego iloraz jest < 1 .

Przez δ^k ($k = 0-6$) zostały oznaczone odrzucone nieskończone sumy parametru μ^i ($i = 7, 8, \dots$) we wzorach (4).

$$\delta_0 = \frac{35}{128} \mu^8 + \frac{150}{512} \mu^{10} + \dots$$

$$\delta_1 = \frac{35}{64} \mu^7 + \frac{63}{138} \mu^9 + \dots$$

$$\delta_2 = \frac{7}{16} \mu^8 + \frac{128}{256} \mu^{10} + \dots$$

$$\delta_3 = \frac{21}{32} \mu^7 + \frac{21}{64} \mu^9 + \dots$$

$$\delta_4 = \frac{7}{32} \mu^8 + \frac{40}{128} \mu^{10} + \dots$$

$$\delta_5 = \frac{7}{64} \mu^7 + \frac{9}{64} \mu^9 + \dots$$

$$\delta_6 = \frac{1}{16} \mu^8 + \frac{65}{512} \mu^{10} + \dots$$

Dla poszczególnych k -tych obszarów niestateczności błędy oszacowano następująco:

$$s_0 + s_k < s_0 + \delta_0 + s_k + \delta_k^- < 1 + \mu^2 + \mu^4 + \dots + \frac{1}{2} \cdot C_k =$$

$$= \frac{1}{1 - \mu^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^k}{1 - \mu^2} = S_0 + S_k$$

$$\Delta_k^- = \delta_0 + \delta_k^-$$

$$\Delta_{k-} < S_0 - S_k - s_0 - s_k$$

$$s_0 - s_k < s_0 - \delta_0 - (s_k + \delta_{k+}) < S_0 - S_k$$

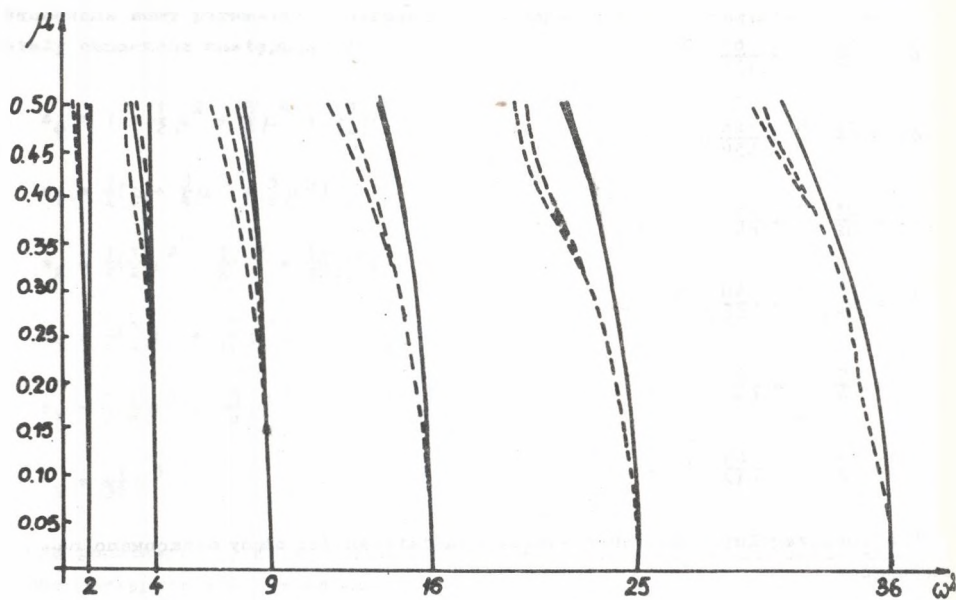
$$\Delta_{k+} = \delta_0 - \delta_{k+}$$

$$\Delta_{k+} < S_0 - S_k - (s_0 - s_k),$$

gdzie:

$$C_{jk} = \sum_{k=2,4,6}^{2n} \mu^k \quad \text{lub} \quad C_k = \sum_{k=1,3,5}^{2n-1} \mu^k$$

Przez Δ_{k-} ($k = 1-6$) oznaczony został błąd wpływający na dolną wartość kolejnego k -tego obszaru niestabilności, a przez Δ_{k+} ($k = 1-6$) błąd wpływający na górną wartość kolejnego k -tego obszaru niestabilności.



Rys. 2

Na rys. 2 zostały wykreślone dwa rodzaje krzywych przedstawiających kolejne obszary niestateczne: linię ciągłą biorąc pod uwagę jedynie skończone sumy (6) oraz linię przerywaną uwzględniając błąd powstały przez pozostawienie skończonych sum.

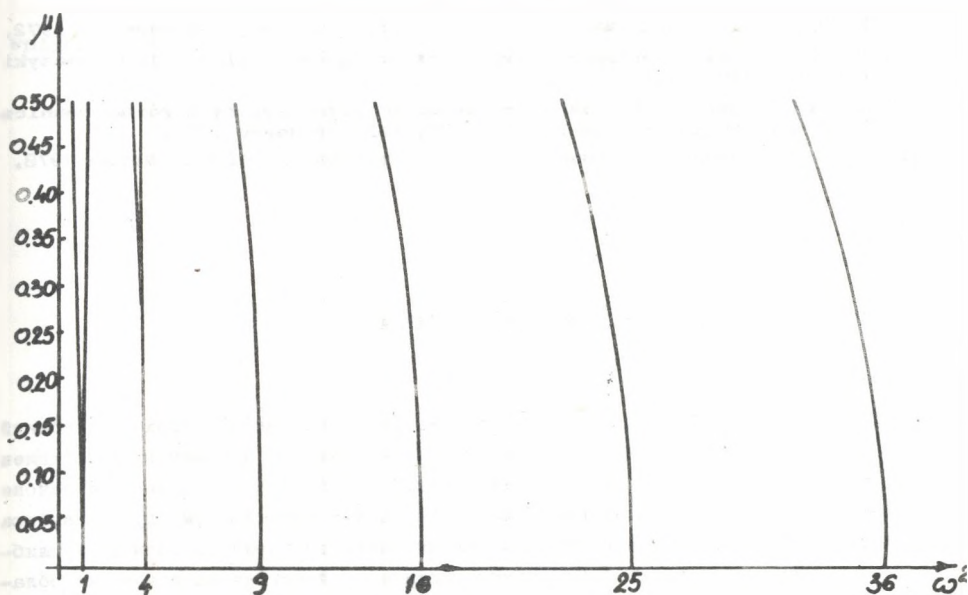
Krzywe uwzględniające błąd są przesunięte w lewo w stosunku do krzywych uwzględniających skończoną sumę. Wynik rzeczywisty będzie zawierał się w granicach wyznaczonych przez te dwie krzywe.

Aby zaobrazować wpływ odrzucenia w (4) nieskończonej sumy parametrów $\mu^{\frac{1}{2}}$ jako wielkości małego rzędu do określenia obszarów niestatecznych w równaniach (5) pozostawiono następujące sumy:

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{2}\mu^2$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\mu$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}\mu^2.$$



Rys. 3

Tym razem odrzucono jako wielkości małego rzędu $\mu^{\frac{1}{2}}$ dla $i = 3, 4, \dots$. Analogicznie jak poprzednio wyznaczono linie kolejnych obszarów niestabilności. Wykresy tych linii przedstawiono na rys. 3. Są one bardziej przesunięte w prawo w stosunku do krzywych przedstawionych na rys. 2.

Wnioski

Z przeprowadzonej analizy obszarów niestabilności dla równań typu Mathieu i Hilla wynika, że obszary niestabilności w równaniu Hilla mają inny kształt niż w równaniu Mathieu. Obszary niestabilności w równaniu Hilla nawet z uwzględnieniem błędu obliczeń są bardziej zawężone. Kolejne krzywe określające obszary stabilne są graficznie różne. Każda następna krzywa jest bardziej pochylona i zawężona w stosunku do poprzedniej.

LITERATURA

- [1] G.M. Fichtenholz: Rachunek różniczkowy i całkowy t. II PWN, Warszawa 1976.
- [2] Z. Osiński: Teoria drgań PWN, Warszawa 1978.
- [3] K. Piskczek, J. Walosak: Drgania w budowie maszyn, PWN Warszawa 1972.
- [4] B. Skalmierski: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyki PWN, Warszawa 1978.
- [5] W. Szemplińska-Stupnicka: Zastosowanie parametrycznych równań różniczkowych w mechanice i technice. IPPT, PAN, Warszawa 1975.
- [6] Т. Шмидт: Параметрические колебания, Издательство "Мир", Москва 1978.

ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ И ХИЛЛА

Резюме

В работе представлены области устойчивости параметрических колебаний описанных линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами типа Матье и Хилла. Для уравнения Матье они были представлены на основе работ [2, 3], а для уравнения Хилла - аналитическим образом путем выбора конечных сумм параметров и отброса величин низкого порядка. Возникающая ошибка была оценена, а также было учтено влияние этой ошибки на изменение областей неустойчивости.

Области неустойчивости уравнения Матье и Хилла показаны на графиках.

THE AREAS OF STABILITY CONCERNING MATHIEU AND HILL EQUATIONS

S u m m a r y

The paper presents the areas of stability concerning parametric vibrations described by linear differential equations with variable coefficients of Mathieu and Hill type. For Mathieu equation they were presented in virtue of the paper [2, 3] whereas for Hill equation - analytically by selecting finite sums of parameters and rejecting the values of small order. The obtained error was evaluated and its influence on the change of the areas of instability concerning Mathieu and Hill equation were shown in diagrams.

Recenzent: Doc. dr hab. Bohdan Mochnacki

Wpłynęło: 09.10.1981 r.