Barbara LUKS-OGRODNIK

TWIERDZENIE TYPU JACKSONA

Streszczenie: W pracy sformułowano i udowodniono twierdzenie typu Jacksona dotyczące oszacowania najlepszego przybliżenia $E_{mn}(f,X)$ funkcji f dwóch zmiennych z przestrzeni $L_w(P_1,P_2)$ w wielomianami algebraicznymi. Jako wnioski z tego twierdzenia uzyskano twierdzenia dotyczące przypadku, gdy funkcje mają pochodne cząstkowe Czebyszewa rzędu $\alpha > 0$ i rząd modułów ciągłości jest niecałkowity. Wyniki te stanowią uogólnienie wyników uzyskanych przez P.L. Butzera i R.L. Stensa na funkcje dwóch zmiennych całkowalnych w kwadracie $[-1,1;-1,1]$ z wagą i mieszanymi potęgami.

Niech X oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych, określonych w kwadracie $E = [-1,1;\ -1,1]$, gdzie jako normę przyjmujemy:

$$\|f\|_X = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left| f(x_1,\ x_2) \right|^{P_1} w(x_1) dx_1 \right]^{\frac{P_2}{P_1}} w(x_2) dx_2 \right\}^{\frac{1}{P_2}},\quad 1 \le p_1, p_2 < \infty$$

Funkcje wagowe $w\ (x_i)$ są określone następująco:

$$w(x_i) = (1-x_i^{\ 2})^{-\frac{1}{2}} \qquad i = 1,2.$$

Różnicą Czybeszewa rzędu $\alpha > 0$ dla funkcji $f \in X$ nazywamy

$$(\Delta^{\alpha}_{h_1h_2} f)(x_1,x_2) = (-1)^{[\alpha]} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (\tau^j_{h_1h_2} f)(x_1,x_2),$$

gdzie:

$$(\tau^j_{h_1h_2} f)(x_1,x_2) := \tau_{h_1h_2} (\tau^{j-1}_{h_1h_2} f)(x_1,x_2)$$

a operator translacji określony jest następująco:

$$(\tau_{h_1h_2}f)(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\Big\{f\left[x_1h_1 + (w(x_1).w(h_1))^{-1};\ x_2h_2 + (w(x_2).w(h_2))^{-1}\right] +$$

$$+ f\left[x_1h_1 + (w(x_1).w(h_1))^{-1};\ x_2h_2 - (w(x_2).w(h_2))^{-1}\right] +$$

$$+ f\left[x_1h_1 - (w(x_1).w(h_1))^{-1};\ x_2h_2 + (w(x_2).w(h_2))^{-1}\right] +$$

$$+ f\left[x_1h_1 - (w(x_1).w(h_1))^{-1};\ x_2h_2 - (w(x_2).w(h_2))^{-1}\right],\ |h_i| \leq 1.$$

Własności operatora $\tau_{h_1h_2}f$, jego złożenia $\tau h_1^j h_2 f$ oraz różnicy Czybyszewa rzędu $\alpha > 0$ zostały wykazane w pracy [6]. W pracy [6] zdefiniowano pochodne cząstkowe Czebyszewa funkcji f rzędu $\alpha > 0$ następująco:

Definicja 1. Niech $f \in X$. Jeżeli istnieją funkcje g_1, $g_2 \in X$, takie, że

$$\lim_{h_1\to 1}\left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{h_11} f}{(1-h_1)^{\alpha}} - g_1\right\|_X = 0,\quad \lim_{h_2\to 1}\left\| \frac{\Delta^{\alpha}_{1h_2} f}{(1-h_2)^{\alpha}} - g_2\right\|_X = 0$$

to funkcje g_1, g_2 nazywamy pochodnymi cząstkowymi, rzędu α, względem x_1, x_2 funkcji f i oznaczamy

$$g_1 = D^{\alpha}_{x_1} f,\quad g_2 = D^{\alpha}_{x_2} f$$

Przez W_{x_i} będziemy oznaczać ogół tych funkcji $f \in X$, dla których istnieją pochodne $D^{\alpha}_{x_i} f$, $i = 1,2$.

Szereg własności pochodnych cząstkowych Czebyszewa rzędu α wykazano w pracy [6]. Będziemy z nich korzystać w dalszej części pracy.

Definicja 2. Częstkowymi modułami ciągłości Czebyszewa, rzędu $\alpha>0$, funkcji $f \in X$ nazywamy

$$\omega^T_{\alpha}(f,\eta_1,1) = \sup_{\eta_1\leq h_1\leq 1} \left\|\Delta^{\alpha}_{h_11} f\right\|_X.$$

$$\omega^T_{\alpha}(f,1,\eta_2) = \sup_{\eta_2\leq h_2\leq 1} \left\|\Delta^{\alpha}_{1h_2} f\right\|_X$$

gdzie

$$\eta_1,\ \eta_2 \in [-1,1).$$

Lemat 1. Niech $f \in X$, $\alpha, \beta > 0$, $\eta_i \in [-1,1)$, $i = 1,2$. Wtedy:

(i) $\omega^T_\alpha(f,\eta_1,1)$, $\omega^T_\alpha(f,1,\eta_2)$ są funkcjami malejącymi zmiennych η_1, η_2 i

$$\lim_{\eta_1 \to 1^-} \omega^T_\alpha(f,\eta_1,1) = \lim_{\eta_2 \to 1^-} \omega^T_\alpha(f,1,\eta_2) = 0;$$

(ii) $\omega^T_\alpha(f,\eta_1,1) \leqslant M_{\alpha-\beta}\, \omega^T_\beta(f,\eta_1,1)$ dla $\alpha \geqslant \beta$,

(iii) $\omega^T_\alpha(f+g,\eta_1,1) \leqslant \omega^T_\alpha(f,\eta_1,1) + \omega^T_\alpha(g,\eta_1,1)$, $g \in X$,

(iv) $\omega^T_\alpha(f,\eta_1,1) \leqslant (\frac{\pi}{2})^{2\alpha} \cdot C_\alpha \cdot (1-\eta_1)^\alpha \cdot \|D^\alpha_{x_1} f\|_X$ dla $f \in W_{x_1}$,

$\omega^T_\alpha(f,1,\eta_2) \leqslant (\frac{\pi}{2})^{2\alpha} \cdot C_\alpha (1-\eta_2)^\alpha \cdot \|D_{x_2} f\|_X$ dla $f \in W_{x_2}$,

(v) $\omega^T_{\alpha+\beta}(f,\eta_1,1) \leqslant (\frac{\pi}{2})^{2\alpha} \cdot C_\alpha (1-\eta_1)^\alpha \cdot \omega^T_\beta(D^\alpha_{x_1} f,\eta_1,1)$ dla $f \in W_{x_1}$,

(vi) $\omega^T_{k_1}(f,\eta_1,1) = \omega_{2k_1}(f\circ\cos, \arccos \eta_1, 0)$, gdzie $k_1 \in N$,

$$\omega_{2k_1}(f\circ\cos, \arccos \eta_1, 0) = \sup_{|\varphi_1| \leqslant \arccos \eta_1} \left\| \bar{\Delta}^{2k_1}_{\varphi_1 0} (f\circ\cos) \right\|_{X_{2\pi}},$$

$$(\bar{\Delta}^{2k_1}_{\varphi_1 0} F)(\theta_1,\theta_2) = 2^{-k_1} \sum_{j=0}^{2k_1} (-1)^j \binom{2k_1}{j} F(\theta_1+(k_1-j)\varphi_1,\ \theta_2),$$

(vii) $\omega^T_{k_1}(f,\eta_1,1) \leqslant \left(1 + \frac{\arccos \eta_1}{\arccos \gamma_1}\right)^{2k_1} \cdot \omega_{k_1}{}^T(f,\gamma_1,1)$, $k_1 \in N$, $\gamma_1 \in [-1,1)$.

Dowód: Własności (i), (ii) wynikają bezpośrednio z definicji odpowiednich modułów ciągłości Czebyszewa oraz własności różnicy $\Delta^\alpha_{h_1 h_2} f$ wykazanych w lemacie 2.1 z pracy [6].

(iii) Własności (iii) wynika z addytywności operatora $\Delta^\alpha_{h_1 h_2} f$.

(iv) Jeżeli $f \in W^{\alpha}_{d_1}$, to zgodnie z własnością (iii) z lematu 2.6 [6] mamy:

$$\left\| \Delta^{\alpha}_{h_1 1} f \right\|_X \leq M.\left(\tfrac{1}{2}\arccos^2 h_1\right)^{\alpha}.\left\| D^{\alpha}_{x_1} f \right\|_X ,$$

Stąd

$$\omega^T_{\alpha}(f,\eta_1,1) \leq M.\sup_{\eta_1 \leq h_1 \leq 1} \left(\tfrac{1}{2}\arccos^2 h_1\right)^{\alpha}.\left\| D^{\alpha}_{x_1} f \right\|_X \leq$$

$$M.(1-\eta_1)^{\alpha}.\left\| D^{\alpha}_{x_1} f \right\|_X.$$

Analogicznie dowodzimy w przypadku $f \in W^{\alpha}_{x_2}$ i $\omega^T_{\alpha}(f,1,\eta_2)$.

(v) Na podstawie lematów 2.1, 2.5 i 2.6 z pracy [6] mamy:

$$\left\| \Delta^{\alpha+\beta}_{h_1 1} f \right\|_X \leq \left(\tfrac{1}{2}\arccos^2 h_1\right)^{\alpha}.M.\left\| \Delta^{\beta}_{h_1 1}(D^{\alpha}_{x_1} f) \right\|_X , \text{ a stąd}$$

$$\omega^T_{\alpha+\beta}(f,\eta_1,1) \leq M.M_{\beta}.(1-\eta_1)^{\alpha}.\omega^T_{\beta}(D^{\alpha}_{x_1} f,\eta_1,1).$$

(vi) Wykazując równość skończonych transformat Fouriera funkcji po obu stronach równości, otrzymamy równość funkcji

$$\left[(\Delta^{k_1}_{\cos\varphi_1,1} f) \circ \cos\right](\theta_1,\theta_2) = \left[\bar{\Delta}^{2k_1}_{\varphi_1,0}(f \circ \cos)\right](\theta_1,\theta_2)$$

prawie wszędzie w RxR i dla $\varphi_1 \in R$.

Mamy więc, że

$$\left\| \Delta^{k_1}_{\cos\varphi_1,1} f \right\|_X = \left\| \bar{\Delta}^{2k_1}_{\varphi,0} (f \circ \cos) \right\|_{X_{2\pi}},$$

$$\omega^T_{k_1}(f,\eta_1,1) = \omega_{2k_1}((f \circ \cos),\arccos\eta_1,0), \text{ gdzie}$$

$$\| F \|_{X_{2\pi}} = \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta_1,\theta_2)|^{p_1} d\theta_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} d\theta_2 \right\}^{\frac{1}{p_2}}.$$

(vii) Ponieważ dla $\omega_{2k_1}(F,\delta_1,0)$ zachodzi [1]

$$\omega_{2k_1}(f,\delta_1,0) \leqslant \left(1+\frac{\delta_1}{\lambda_1}\right)^{2k_1} \omega_{2k_1}(f,\lambda_1,0) \text{ dla } \lambda_1 > 0,$$

więc zachodzi nierówność (vii) dla $\omega_{k_1}{}^{T}(f,\eta_1,1)$.

Wprowadzimy teraz pewne oznaczenia.

$P_{k,l} = \{p_{k,l}(x_1,x_2),\ p_{k,l}(x_1,x_2)$ - wielomian algebraiczny stopnia $\leqslant k$ ze względu na x_1, stopnia $\leqslant l$ ze względu na $x_2\}$.

$$E_{nm}(f,X) = \inf_{p_{nm}\in P_{n,m}} \|f - p_{nm}\|_X.$$

Wielkość tę nazywa się najlepszym przybliżeniem funkcji f wielomianami algebraicznymi należącymi do $P_{n,m}$.

TWIERDZENIE TYPU JACKSONA

Twierdzenie. Niech $f \in X$, $k_1,k_2 \in N$, wtedy

$$E_{nm}(f,X) \leqslant C_{k_1,k_2}\left[\omega_{k_1}^{T}\left(f,\cos\frac{\pi}{n+1},1\right) + \omega_{k_2}^{T}\left(f,1,\cos\frac{\pi}{m+1}\right)\right].$$

Dowód: Ponieważ $E_{n,m}(f,X) = \inf\limits_{p_{n,m}\in P_{n,m}} \|f - p_{n,m}\|_X$

a $\|f\|_X = \|f \circ \cos\|_{X_{2\pi}}$, oraz

$$p_{n,m}(\cos\theta_1, \cos\theta_2) = (p_{n,m}\circ\cos)(\theta_1,\theta_2) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{m} C_{k_1k_2}\cos(k_1\theta_1)\cdot\cos(k_2\theta_2) = t_{n,m}(\theta_1\ \theta_2)$$

więc

$$E_{n,m}(f,X) = \inf_{t_{n,m}\in T_{n,m}} \|f \circ \cos - t_{n,m}\|_{X_{2\pi}}.$$

Wielomian $t_{n,m}$ jest wielomianem trygonometrycznym parzystym, a $T_{n,m}$ oznacza zbiór wielomianów trygonometrycznych stopnia $\leq n$ ze względu na Θ_1, stopnia $\leq m$ ze względu na Θ_2, parzystych .

Obecnie wykażemy, że

$$\left\| f\circ\cos - \tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)} \right\|_{X_{2\pi}} \leq$$

$$\leq M_{2k_1,2k_2}\left[\omega_{2k_1}\left(f\circ\cos, \frac{\pi}{n_1+1}, 0\right) + \omega_{2k_1}\left(f\circ\cos, 0, \frac{\pi}{n_2+1}\right)\right].$$

Dla przejrzystości zapisu przyjmiemy dalej, że $(f\circ\cos)(\Theta_1,\Theta_2) = F(\Theta_1,\Theta_2)$. Za wielomian $\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)}(\Theta_1, \Theta_2)$ przyjmiemy następujący wielomian:

$$\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)}(\Theta_1, \Theta_2) =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_1}^{(2k_1)} \cdot \gamma_{n_2}^{(2k_2)} \pi^2} \int_{\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{\pi} \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k_1}}^{2k_1} \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2} (-1)^{i+j} \binom{2k_1}{i} \cdot \binom{2k_2}{j} \times$$

$$\times F\left[\Theta_1+(k_1-j)\varphi_1, \Theta_2+(k_2-j)\varphi_2\right] \cdot V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1) \cdot V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2,$$

gdzie $n_1, n_2 \in N$,

$$V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1) = \left(\frac{\sin\frac{n_1\varphi_1}{2}}{n_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}}\right)^{4k_1+4}$$

$$V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2) = \left(\frac{\sin\frac{n_2\varphi_2}{2}}{n_2 \sin\frac{\varphi_2}{2}}\right)^{4k_2+4}$$

$$\gamma_{n_1}^{(2k_1)} = \frac{(-1)^{k_1-1}\binom{2k_1}{k_1}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)d\varphi_1 ,$$

$$\gamma_{n_2}^{(2k_2)} = \frac{(-1)^{k_2-1}\binom{2k_2}{k_2}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_2 .$$

Ponieważ $V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)$, $V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)$ są wielomianami parzystymi stopni odpowiednio $(2k_1+2)(n_1-1)$, $(2k_2+2)(n_2-1)$, więc

$$V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1) = \sum_{\nu_1=0}^{(2k_1+2)(n_1-1)} a_{\nu_1}\cos\nu_1\varphi_1,$$

$$V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2) = \sum_{\nu_2=0}^{(2k_2+2)(n_2-1)} a_{\nu_2}\cos\nu_2\varphi_2 .$$

Wykażemy, że wielomian $\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)}(\theta_1,\theta_2)$ jest wielomianem parzystym (złożonym z samych cosinusów).

$$\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)}(\theta_1,\theta_2) =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\cdot\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\cdot\pi^2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k_1}}^{2k_1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2}(-1)^{i+j}\binom{2k_1}{i}\cdot\binom{2k_2}{j}\ x$$

$$x\sum_{\nu_1=0}^{(2k_1+2)(n_1-1)}\ \sum_{\nu_2=0}^{(2k_2+2)(n_2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F\left[\theta_1+(k_1-i)\varphi_1,\theta_2+(k_2-j)\varphi_2\right]\ x$$

$$x\ \cos(\nu_1\varphi_1)\cdot\cos(\nu_2\varphi_2)d\varphi_1\, d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\ \gamma_{n_2}^{(2k_2)}\ \pi^2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k_1}}^{2k_1}\ \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2}(-1)^{i+j}\binom{2k_1}{i}\binom{2k_2}{j}\ x$$

$$x \sum_{\nu_1=0}^{(n_1,2k_1)} \sum_{\nu_2=0}^{(n_2,2k_2)} \int_{\theta_1-(k_1-i)\pi}^{\theta_1+(k_1-i)\pi} \int_{\theta_2-(k_2-j)\pi}^{\theta_2+(k_2-j)\pi} F(u_1,u_2)\ x$$

$$x \left[\cos\left(\frac{\nu_1}{k_1-i} u_1\right).\cos\left(\frac{\nu_1}{k_1-i}\theta_1\right) - \sin\left(\frac{\nu_1}{k_1-i} u_1\right).\sin\left(\frac{\nu_1}{k_1-i}\theta_1\right)\right].$$

$$.\left[\cos\left(\frac{\nu_2}{k_2-j} u_2\right).\cos\left(\frac{\nu_2}{k_2-j}\theta_2\right)-\sin\left(\frac{\nu_2}{k_2-j} u_2\right).\sin\left(\frac{\nu_2}{k_2-j}\theta_2\right)\right].\ \frac{du_1}{k_1-i}\ .\ \frac{du_2}{k_2-j} =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_1}^{(2k_1)}.\gamma_{n_2}^{(2k_2)}.\pi^2} \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k_1}}^{2k_1} \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2} (-1)^{i+j} \binom{2k_1}{i}.\binom{2k_2}{j} \sum_{\nu_1=0}^{(n_1,2k_1)} \sum_{\nu_2=0}^{(n_2,2k_2)} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u_1,u_2)$$

$$x \cos\left(\frac{\nu_1}{k_1-i} u_1\right).\cos\left(\frac{\nu_2}{k_2-j} u_2\right).\cos\left(\frac{\nu_1}{k_1-i}\theta_1\right).\cos\left(\frac{\nu_2}{k_2-j}\theta_2\right)du_1du_2.$$

Przyjęliśmy tutaj następujące oznaczenie: $(2k_1+2)(n_1-1) = (n_1,2k_1)$, $(2k_2+2)(n_2-1) = (n_2,2k_2)$.

Ostatnią równość mogliśmy zapisać gdyż funkcja F jest funkcją parzystą i całki w których występują sinusy będą równe zero.

Widzimy, że $\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),\ (2k_2+2)(n_2-1)} \in T_{(2k_1+2)(n_1-1),\ (2k_2+2)(n_2-1)}$.

Oszacujmy teraz różnicę

$$\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)}(\theta_1,\theta_2) - F(\theta_1,\theta_2).$$

Mamy

$$\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)}(\theta_1,\theta_2) - F(\theta_1,\theta_2) =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\ \gamma_{n_2}^{(2k_2)}\ .\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k_1}}^{2k_2} \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2} (-1)^{i+j}\ x \binom{2k_1}{i}\binom{2k_2}{j}\ x$$

$$x \left\{F\left[\theta_1+(k_1-i)\varphi_1,\ \theta_2+(k_2-j)\varphi_2\right] - (-1)^{k_1-1}(-1)^{k_2-1}\binom{2k_1}{k_1}\binom{2k_2}{k_2}F(\theta_1,\theta_2)\right\}x$$

$$x\ V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)\ .\ V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg\{\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k_1}}^{2k_1}\ \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2}(-1)^{i+j}\binom{2k_1}{i}\binom{2k_2}{j}\ \times$$

$$\times\ F\left[\theta_1+(k_1-i)\ \varphi_1,\ \theta_2+(k_2-j)\varphi_2\right] +$$

$$+\ (-1)^{k_1-1}\binom{2k_1}{k_1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2}(-1)^j\binom{2k_2}{j}\ F\left[\theta_1,\ \theta_2+(k_2-j)\ \varphi_2\right] -$$

$$-\ (-1)^{k_1-1}\binom{2k_1}{k_1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2}(-1)^j\binom{2k_2}{j}\ F\left[\theta_1,\ \theta_2+(k_2-j)\ \varphi_2\right] +$$

$$+\ (-1)^{k_1-1}(-1)^{k_2}\binom{2k_1}{k_1}\binom{2k_2}{k_2}\ .\ F(\theta_1,\theta_2)\Bigg\}\cdot V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)\ \times$$

$$\times\ V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\cdot\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\cdot\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg\{\sum_{i=0}^{2k_1}\ \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2}(-1)^{i+j}\binom{2k_1}{i}\binom{2k_2}{j}\ \times$$

$$\times\ F\left[\theta_1+(k_1-i)\varphi_1,\theta_2+(k_2-j)\varphi_2\right]+(-1)^{k_1-1}\binom{2k_1}{k_1}\cdot(\bar{\Delta}^{2k_1}_{0\varphi_2}F)(\theta_1,\theta_2)\Bigg\}\times$$

$$\times\ V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)\cdot V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_1 d\varphi_2\ .$$

$$\left\|\tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)} - F\right\|_{X_{2\pi}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\left|\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\ \gamma_{n_2}^{(2k_2)}\right|\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k_2}}^{2k_2}\binom{2k_2}{j}\left\|\sum_{i=0}^{2k_1}(-1)^i\binom{2k_1}{i}F\left[\theta_1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ (k_1-i)\varphi_1,\theta_2\right]\right\|_{X_{2\pi}}\times\ V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)\cdot V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_1 d\varphi_2\ +$$

$$+\frac{1}{\left|\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\right|\pi^2}\binom{2k_1}{k_1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|\bar{\Delta}_{0\varphi_2}^{2k_2}F\right\|_{X_{2\pi}}\times$$

$$\times V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)\cdot V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_1\,d\varphi_2 \leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{2k_2}}{\left|\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\right|\left|\binom{2k_2}{k_2}\right.}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_{2k_1}(F,\varphi_1,0)\cdot V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)d\varphi_1 +$$

$$+\frac{1}{\left|\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\right|\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_{2k_2}(F,0,\varphi_2)\cdot V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_2 \leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{2k_2+1}}{\binom{2k_2}{k_2}\left|\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\right|}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1+\frac{(n_1+1)\varphi_1}{\pi}\right)^{2k_1}\omega_{2k_1}\left(F,\frac{\pi}{n_1+1},0\right)\cdot V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)d\varphi_1$$

$$+\frac{2}{\left|\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\right|}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\omega_{2k_2}\left(F,0,\frac{\pi}{n_2+1}\right)\cdot\left(1+\frac{(n_2+1)\varphi_2}{\pi}\right)^{2k_2}\cdot V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_2 \leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{2k_2+1}\left(\frac{n_1+1}{\pi}\right)^{2k_1}}{\binom{2k_2}{k_2}\left|\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\right|\pi}\left\{2^{2k_1}\left(\frac{\pi}{n_1+1}\right)^{2k_1}\int_{0}^{\frac{\pi}{n_1+1}}V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)d\varphi_1 +\right.$$

$$\left.+2^{2k_1}\int_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\pi}\varphi_1^{2k_1}V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)d\varphi_1\right\}\omega_{2k_1}\left(F,\frac{\pi}{n_1+1},0\right)+$$

$$+\frac{2\cdot\left(\frac{n_2+1}{\pi}\right)^{2k_2}}{\left|\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\right|\pi}\left\{2^{2k_2}\left(\frac{\pi}{n_2+1}\right)^{2k_2}\int_{0}^{\frac{\pi}{n_2+1}}V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_2 +\right.$$

$$\left.+2^{2k_2}\int_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\pi}\varphi_2^{2k_2}V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_2\right\}\omega_{2k_2}\left(F,0,\frac{\pi}{n_2+1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{2k_2+1}}{\binom{2k_2}{k_2}} \left(\frac{2^{2k_1}}{\binom{2k_1}{k_1}} + M_{2k_1}\right) \omega_{2k_1}\left(F, \frac{\pi}{n_1+1}, 0\right) +$$

$$+ \left(\frac{2^{2k_2+1}}{\binom{2k_2}{k_2}} + 2M_{2k_2}\right) \omega_{2k_2}\left(F, 0, \frac{\pi}{n_2+1}\right).$$

$$M_{2k_1} \geqslant \frac{2^{2k_1}(n_1+1)^{2k_1}\binom{2k_1}{k_1}}{\left|\gamma_{n_1}^{(2k_1)}\right| \pi^{2k_1}} \int_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\pi} \varphi_1^{2k_1} V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)d\varphi_1 ,$$

$$M_{2k_2} \geqslant \frac{2^{2k_2}(n_2+1)^{2k_2}\binom{2k_2}{k_2}}{\left|\gamma_{n_2}^{(2k_2)}\right| \pi^{2k_2}} \int_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\pi} \varphi_2^{2k_2} V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)d\varphi_2 .$$

Nierówności powyższe można znaleźć w [5] na stronie 291 i wynikają one z określenia wielomianów $V_{(2k_1+2)(n_1-1)}(\varphi_1)$, $V_{(2k_2+2)(n_2-1)}(\varphi_2)$.

Niech $(2k_1+2)(n_1-1) \leqslant n \leqslant (2k_1+2)n_1$, $(2k_2+2)(n_2-1) \leqslant m \leqslant (2k_2+2)n_2$, wtedy

$$\inf_{t_{n,m} \in T_{n,m}} \left\| F-t_{n,m} \right\|_{X_{2\pi}} \leqslant \left\| F - \tilde{t}_{(2k_1+2)(n_1-1),(2k_2+2)(n_2-1)} \right\|_{X_{2\pi}} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{M}_{2k_1,2k_2} \left[\omega_{2k_1}\left(F, \frac{\pi}{n_1+1}, 0\right) + \omega_{2k_2}\left(F, 0, \frac{\pi}{n_2+1}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{M}_{2k_1,2k_2} \left[\omega_{2k_1}\left(F, \frac{(2k_1+2)\pi}{n_1+1}, 0\right) + \omega_{2k_2}\left(F, 0, \frac{(2k_2+2)\pi}{m+1}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{M}_{2k_1,2k_2} \max\left\{(1+2k_1+2)^{2k_1}, \left[1+(2k_2+2)\right]^{2k_2}\right\} \times$$

$$\times \left[\omega_{2k_1}\left(F, \frac{\pi}{n+1}, 0\right) + \omega_{2k_2}\left(F, 0, \frac{\pi}{m+1}\right)\right].$$

Zgodnie z tym co poprzednio udowodniliśmy i z własnościami modułów ciągłości Czebyszewa (lemat 26 [6] oraz z lematu (vi) mamy

$$E_{n,m}(f,X) = \inf_{t_{n,m}\in T_{n,m}} \| F - t_{n,m}\|_{X_2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{k_1,k_2}\left[\omega_{2k_1}(F, \tfrac{\pi}{n+1},0) + \omega_{2k_2}(F,0, \tfrac{\pi}{m+1})\right] =$$

$$= C_{k_1,k_2}\left[\omega^T_{k_1}(f,\cos \tfrac{\pi}{n+1}, 1) + \omega^T_{k_2}(f,1, \cos \tfrac{\pi}{m+1})\right].$$

Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

<u>Wniosek 1.</u> Niech $f\in X$, $\alpha>0$, $\beta>0$, wtedy

$$E_{n,m}(f,X) \leqslant \tilde{C}_{\alpha,\beta}\left[\omega^T_{\alpha}(f, \cos \tfrac{\pi}{n+1},1) + \omega^T_{\beta}(f,1,\cos \tfrac{\pi}{m+1})\right].$$

Dowód: Niech $k_1 = \{\alpha\} = \inf\{k\in N,\ k\geqslant\alpha\}$, $k_2 = \{\beta\}$.

Zgodnie z twierdzeniem 1, mamy

$$E_{n,m}(f,X) \leqslant C_{k_1,k_2}\left[\omega^T_{k_1}(f,\cos \tfrac{\pi}{n+1},1) + \omega^T_{k_2}(f,1, \cos \tfrac{\pi}{m+1})\right].$$

Na podstawie własności (iv) z lematu 1, mamy dalej

$$E_{n,m}(f,X) \leqslant C_{k_1,k_2}\left[M_{k_1-\alpha}\,\omega^T_{\alpha}(f,\cos \tfrac{\pi}{n+1}, 1) + M_{k_2-\beta}\,\omega^T_{\beta}(f,1,\cos \tfrac{\pi}{m+1})\right]$$

$$\leqslant \tilde{C}_{\alpha,\beta}\left[\omega^T_{\alpha}(f, \cos \tfrac{\pi}{n+1}, 1) + \omega^T_{\beta}(f,1, \cos \tfrac{\pi}{m+1})\right],$$

co kończy dowód.

<u>Wniosek 2.</u> Niech $f\in X$, $\alpha>0$, $\beta>0$ i niech istnieją pochodne cząstkowe Czebyszewa $D^{(\alpha)}_{x_1} f$, $D^{(\beta)}_{x_2} f$,

wtedy

$$E_{n,m}(f,X) \leqslant \tilde{A}_{\alpha,\beta}\,(n^{-2\alpha}\|D^{(\alpha)}_{x_1}f\|_X + m^{-2\beta}\|D^{(\beta)}_{x_2}f\|_X).$$

Dowód: Na podstawie poprzedniego wniosku mamy:

$$E_{nm}(f,X) \leq \tilde{C}_{\alpha,\beta}\left[\omega_{\alpha}^{T}(f,\cos\frac{\pi}{n+1}, 1) + \omega_{\beta}^{T}(f,1, \cos\frac{\pi}{m+1})\right]$$

Korzystając z własności (iv) z lematu 1 otrzymamy tezę.

LITERATURA

[1] P.L. Butzer: Fourier analysis and approximation, vol. 1, Birkhauser Verlag, Basel-Stuttgart and Academic Pross, New York - San Francisco, London 1971.

[2] P.L. Butzer, R.L. Stens: Chebyshev transform methods in the solution of the fundamental theorem in the fractional case. Colloquis Mathematica Societatis Janos Bolyai. 19 Fourier Analysis and Approximation theory, Budapest (Hungary), 1976, (191-211).

[3] P.L. Butzer, R.L. Stens: The operational properties of the Chebyshev transform. I General properties, Functiones Et Approximatia. V 1977, UAM (129-159).

[4] P.L. Butrzer, R.L. Stens: The operational properties of the Chebyshev transform. II Fractional derivatives, Trudy Mieżdunarodnoj Konfierencji po tieorii probliżenija funkcji, Nauka, Moskwa 1977, (49-61).

[5] A.F. Timan: Tieorija probliżienija funkcji diejstwietielnowo pieriemiennowo. Moskwa 1960.

[6] B. Luks-Ogrodnik: Metoda transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Cz.II. Pochodne cząstkowe Czebyszewa rzędu $\alpha > 0$. Zesz. Nauk. Pol. Śl. seria Matematyka-Fizyka 39, 1982, (193-209).

ТЕОРИЯ ТИПА ДЖЕКСОНА

Р е з ю м е

В работе сформулирована и доказана теорема типа Джексона, касающаяся оценки наилучшего приближения $E_{mn}(f,X)$ функций двух переменных из пространства $L_w^{(p_1,p_2)}$ алгебраическими многочленами. Как результаты из этой теоремы получены теоремы, касающиеся случая, когда функции имеют частные производные Чебышева порядка $\alpha > 0$ и ряд модулей непрерывности является нецелым. Эти результаты являются обобщением результатов, полученных П.Л. Бутцером и Р.Л. Стенсом на функции двух переменных, интегрируемых в квадрате $[-1, 1; -1, 1]$ с весом и со смешанными степенями.

S u m m a r y

In the paper there is formulated and proved a theorem of Jackson type concerning the evaluation of the best approximation $E_{mn}(f,X)$ of the functions f of two variables from the space $L_w^{(P_1,P_2)}$ by means of algebraic polynomials. The conclusions from this theorem are the theorems concerning the case when functions have Chebyshev partial derivatives of the order $\alpha > 0$, and the order of moduli of continuity is a non-integral number. These results are the generalization of the results obtained by P.L. Butzer and R.L. Stens for the functions of two variables integrable in the square $[-1,1;-1,1]$ with weight and mixed powers.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 15.X.1985

Recenzent
Prof. dr hab. Julian Musielak