ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Barbara LUKS-OGRODNIK

TRANSFORMATA LEGENDRE'A I POCHODNE CZĄSTKOWE LEGENDRE'A

Streszczenie. W pracy zdefiniowano transformatę Legendre'a, operator translacji Legendre'a, pochodne cząstkowe Legendre'a, splot funkcji i moduły ciągłości Legendre'a dla funkcji dwóch zmiennych z przestrzeni z mieszanymi potęgami. Zbadane zostały własności zdefiniowanych operatorów oraz funkcji i wzajemne związki między nimi i między znanymi pojęciami z klasycznej teorii aproksymacji. Wyniki tutaj uzyskane są przeniesieniem wyników uzyskanych przez R.L. Stensa i M. Wehrensa na funkcje dwóch zmiennych całkowalne z potęgami mieszanymi, większymi lub równymi 1.

1. TRANSFORMATA LEGENDRE'A, OPERATOR TRANSLACJI LEGENDRE'A I ICH WŁASNOŚCI

Niech $Y = L^p$, $p = (p_1, p_2)$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$, oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych, określonych na kwadracie $E = E_1 \times E_2$, $E_1 = E_2 = [-1,1]$, gdzie norma określona jest następująco:

$$\|f\|_Y = \left\{ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2}} < \infty .$$

Wielomianem Legendre'a dwóch zmiennych nazwiemy wielomian $W_{n,m}(x_1,x_2) = W_n(x_1).W_m(x_2)$, gdzie $W_n(x_1)$, $W_m(x_2)$ są znanymi wielomianami Lagendre'a jednej zmiennej.

Dla $x \in (-1,1)$ definiuje się je następująco:

$$W_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n.n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n , \quad n \in N_o .$$

Podamy kilka podstawowych własności tych wielomianów $W_n(x)$:

a) $W_n(1) = 1$, $W_n(-1) = (-1)^n$,

b) $|W_n(x)| \leq W_n(1) = 1$,

c) $(1 - x^2)W_n''(x) - 2x\, W_n'(x) + n(n+1)\, W_n(x) = 0$

d) $W_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Te i inne własności wielomianów Legendre'a można znaleźć w odpowiednich rozdziałach książek N.N. Lebiediewa [2] oraz I.P. Natansona [4].

Wprowadzimy teraz transformatę Legendre'a dla funkcji dwóch zmiennych należących do Y.

Definicja 1.1. Niech $f \in Y$, $k_1, k_2 \in N_0$. Transformatą Legendre'a funkcji f nazwiemy

$$\mathcal{L}[f](k_1,k_2) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)\cdot W_{k_1,k_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 .$$

Analogicznie jak w przypadku transformaty Legendre'a dla funkcji jednej zmiennej [5], można wykazać własność transformaty Legendre'a $\mathcal{L}[f](k_1,k_2)$.

Lemat 1.1. Niech $f,g \in Y$, $c \in R$, wtedy

a) $\left|\mathcal{L}[f](k_1,k_2)\right| \leq \|f\|_Y$,

b) $\mathcal{L}[f+g](k_1,k_2) = \mathcal{L}[f](k_1,k_2) + \mathcal{L}[g](k_1,k_2)$,

$\mathcal{L}[cf](k_1,k_2) = c\mathcal{L}[f](k_1,k_2)$,

c) $\mathcal{L}[W_{n,m}](k_1,k_2) = \begin{cases} \frac{1}{(2n+1)}\cdot\frac{1}{(2m+1)}, & \text{gdy } k_1 = n,\ k_2 = m \\ 0 & \text{, gdy } k_1 \neq n \text{ lub } k_2 \neq m \end{cases}$

d) $\mathcal{L}[f](k_1,k_2) = 0$ dla $k_1,k_2 \in N_0 \Longleftrightarrow f = 0$ prawie wszędzie w E.

Dowód: Własności (a) i (b) wynikają z definicji transformaty Legendre'a.

Własność (c) wynika z ortogonalności wielomianów Legendre'a jednej zmiennej $W_n(x_1)$, $W_m(x_2)$ na przedziale $(-1,1)$ oraz z faktu, że

$$\int_{-1}^{1} W_n^2(x_1)dx_1 = \frac{2}{2n+1}, \quad \int_{-1}^{1} W_m(x_2)dx_2 = \frac{2}{2m+1}, \qquad [2]$$

Własność (d) nazywa się własnością jednoznaczności transformaty Legendre'a. Wynika ona z analogicznej własności dla funkcji jednej zmiennej, gdzie transformata Legendre'a jest zdefiniowana następująco

$$\mathcal{L}[f](k) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)\cdot W_k(u)du, \quad k \in N_0 .$$

Jeżeli więc zapiszemy całkę

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2).W_{k_1,k_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \text{ w postaci całki}$$

literowanej i skorzystamy z własności jednoznaczności transformaty Legendre'a jednej zmiennej [5], to otrzymamy tę własność w przypadku transformaty Legendre'a dla funkcji dwóch zmiennych:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2).W_{k_1}(x_1).W_{k_2}(x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)W_{k_1}(x_1)dx_1\right)W_{k_2}(x_2)dx_2 =$$

$$= 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)W_{k_1}(x_1)dx_1 = 0$$

prawie wszędzie w $[-1,1] \longleftrightarrow f(x_1,x_2) = 0$ prawie wszędzie w $E = [-1,1]\times[-1,1]$.
Wprowadźmy teraz operator translacji Legendre'a $\tau^1_{h_1h_2} f$.

Definicja 1.2. Niech $f \in Y$, $-1 \leq h_1,h_2 \leq 1$. Operatorem translacji Legendre'a nazywamy

$$(\tau^1_{h_1h_2} f)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(x_1h_1+u_1\sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)},x_2h_2 +\right.$$

$$\left.+ u_2\sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\right)\sqrt{(1-u_1^2).(1-u_2^2)}\, du_1du_2.$$

Dokonując następującej zmiany zmiennych

$$y_1 = x_1h_1 + \cos\varphi_1\sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)},\quad y_2 = x_2h_2 + \cos\varphi_2\sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}$$

$$\cos\varphi_1 = u_1\ ,\ \cos\varphi_2 = u_2\ ,\ \text{dla } -1 \leq h_1 < 1\ ,\ -1\leq h_2 < 1\ ,$$

mamy

$$(\tau^1_{h_1h_2}f)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(y_1,y_2).K(x_1,h_1,y_1).K(x_2,h_2,y_2)dy_1dy_2 \ ,$$

gdzie funkcja:

$$K(x_i,h_i,y_i) = \begin{cases} (1-x_i^2-h_i^2+2x_ih_iy_i-y_i^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{dla } x_ih_i-\sqrt{(1-x_i^2)(1-h_i^2)}\leqslant y_i \leqslant \\ 0 \quad \text{dla pozostałych} & \leqslant x_ih_i+\sqrt{(1-x_i^2)(1-h_i^2)}, \end{cases}$$

$$i = 1,2\ldots$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy funkcja f jest postaci $f(x_1,x_2) =$ $= f_1(x_1).f_2(x_2)$ wtedy

$$(\tau^1_{h_1h_2}\ f)(x_1,x_2) = (\tau^1_{h_1}\ f_1)(x_1).(\tau^1_{h_2}\ f_2)(x_2) =$$

$$= (\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f_1(x_1h_1+u_1\sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)}.\sqrt{1-u_1^2}du_1)\ x$$

$$x\ (\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f_2(x_2h_2+u_2\sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}).\sqrt{1-u_2^2}\,du_2).$$

Operatory $\tau^1_{h_1}\ f_1$, $\tau^1_{h_2}\ f_2$ zostały właśnie w taki sposób zdefiniowane w pracy [5].

Podamy teraz podstawowe własności operatora $\tau^1_{h_1h_2}\ f$.

<u>Lemat 1.2.</u> Niech $f \in Y$ i niech $W_{n,m}(x_1,x_2)$ będzie wielomianem Legendre'a dwóch zmiennych, wtedy

a) $(\tau^1_{h_1h_2}\ W_{n,m})(x_1,x_2) = W_{n,m}(h_1,h_2)\ W_{n,m}(x_1,x_2)$,

b) norma operatora $\|\tau^1_{h_1h_2}\ f\| = 1$,

c) $\lim\limits_{\substack{(h_1,h_2)\to(1,1)\\ |h_i|\leq 1}} \| \tau^1_{h_1h_2} f - f \|_Y = 0$, $i=1,2$,

d) $\mathcal{L}\left[\tau^1_{h_1h_2} f\right](k_1,k_2) = W_{k_1,k_2}(h_1,h_2).\mathcal{L}[f](k_1,k_2)$, $k_1,k_2 \in N_o$.

Dowód: Własność (a) wynika bezpośrednio z własności (2,6) [5], która mówi, że $(\tau^1_h W_n)(x) = W_n(h)\, W_n(x)$.

Dla dowodu własności (b) obliczymy $\|\tau^1_{h_1h_2} W_{n,m}\|_Y$.

$$\|\tau^1_{h_1h_2} W_{n,m}\|_Y = \|W_{n,m}(h_1,h_2).W_{n,m}(x_1,x_2)\|_Y = |W_{n,m}(h_1,h_2)|.\|W_{n,m}\|_Y$$

Ponieważ $|W_{n,m}(h_1,h_2)| \leqslant 1$, a dla $W_{o,o}(h_1,h_2)$ mamy równość, więc $\|\tau^1_{h_1h_2} f\|$ jest równa 1 na zbiorze liniowo gęstym w Y. Ponieważ operator $\tau^1_{h_1h_2}$ jest liniowy i ograniczony na zbiorze liniowo gęstym, więc zachowuje swoją normę na całym Y, (twierdzenie o rozszerzaniu operatora liniowego i ograniczonego [1]).

(c) Korzystając z poprzednich własności mamy:

$$\|\tau^1_{h_1h_2} f - f\|_Y \leqslant 2\,\|f\|_Y \ , \quad \text{oraz}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(1,1)} \|\tau^1_{h_1h_2} W_{n,m} - W_{n,m}\|_Y = 0.$$

Na podstawie twierdzenia Banacha-Steinhausa otrzymamy własność (c) w całej przestrzeni Y.

(d) $\mathcal{L}\left[\tau^1_{h_1h_2} f\right](k_1,k_2) =$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(y_1,y_2).K(x_1,y_1,h_1).K(x_2,y_2,h_2)\,dy_1dy_2\Big)\ \times$$

$$\times\ W_{k_1}(x_1).W_{k_2}(x_2)\,dx_1dx_2 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(y_1,y_2).$$

$$\Big(\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} W_{k_1}(x_1)W_{k_2}(x_2)K(x_1,h_1,y_1)K(x_2,h_2,y_2)\,.\,dx_1dx_2\Big)dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(y_1,y_2)\cdot\tau^{1}_{h_1h_2}(W_{k_1k_2})(y_1,y_2)dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (fy_1,y_2)\cdot W_{k_1,k_2}(h_1,h_2)\cdot W_{k_1,k_2}(y_1,y_2)dy_1dy_2 =$$

$$= W_{k_1,k_2}(h_1,h_2)\cdot\mathcal{L}[f](k_1,k_2).$$

2. POCHODNE CZĄSTKOWE LEGENDRE'A RZĘDU $r\in N$, FUNKCJI $f\in Y$

Definicja 2.1. Jeżeli dla funkcji $f\in Y$ istnieją funkcje $g_1,g_2\in Y$ takie, że

$$\lim_{h_1\to 1^-}\left\| \frac{f-\tau_{h_11}f}{1-h_1} - g_1\right\|_Y = 0,$$

$$\lim_{h_2\to 1^-}\left\| \frac{f-\tau_{1h_2}f}{1-h_2} - g_2\right\|_Y = 0$$

to $g_1 = D^{(1)}_{x_1}f$, $g_2 = D^{(1)}_{x_2}f$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi Legendre'a, rzędu $r=1$, funkcji f.

Pochodne rzędów wyższych definiujemy następująco:

$$D^{(r_1)}_{x_1}f = D^{(1)}_{x_1}(D^{(r_1-1)}_{x_1}f) \quad \text{dla} \quad r_1 = 2,3,\ldots$$

Lemat 2.1. Niech $f\in X$ i niech istnieją $D^{(1)}_{x_1}f$, $D^{(1)}_{x_2}f$, wtedy

$$\mathcal{L}\left[D^{(1)}_{x_1}f\right](k_1,k_2) = \frac{k_1(k_1+1)}{2}\cdot\mathcal{L}[f](k_1,k_2),$$

$$\mathcal{L}\left[D^{(1)}_{x_2}f\right](k_1,k_2) = \frac{k_2(k_2+1)}{2}\cdot\mathcal{L}[f](k_1,k_2); \quad k_1,k_2\in N_0$$

Dowód przeprowadzimy dla $D_{x_1}^{(1)}f$. Postępując analogicznie jak w lemacie 2.3 [6] mamy

$$\left|\frac{1-W_{k_1}(h_1)}{1-h_1}\mathcal{L}[f](k_1,k_2)-\mathcal{L}\left[D_{x_1}^{(1)}f\right](k_1,k_2)\right|\leqslant\left\|\frac{(f-\tau_{h_1 1}^{1}f)}{1-h_1}-D_{x_1}^{(1)}f\right\|_Y .$$

Zgodnie z założeniem prawa strona nierówności dąży do zera, gdy h_1 dąży do 1^-, więc

$$\lim_{h_1\to 1^-}\frac{1-W_{k_1}(h_1)}{1-h_1}\mathcal{L}[f](k_1,k_2)=\mathcal{L}\left[D_{x_1}^{(1)}f\right](k_1,k_2).$$

Ponieważ $\lim\limits_{h_1\to 1^-}\dfrac{1-W_{k_1}(h_1)}{1-h_1}=\lim\limits_{h_1\to 1^-}W'_{k_1}(h_1)=\dfrac{k_1(k_1+1)}{2}$,

więc lemat został udowodniony.

Podobnie jak w pracy [6] zdefiniujemy tutaj: splot dwóch funkcji f i g należących do Y, oraz sploty według jednej zmiennej, w których operator translacji Czebyszewa zastąpimy operatorem translacji Legendre'a.

Definicja 2.2. Niech $f\in Y$, $g\in Y$. Splotem Legendre'a funkcji f i g nazwiemy

$$(f \boxtimes g)(x_1,x_2)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\tau_{x_1x_2}^{1}f)(u_1,u_2)g(u_1,u_2)du_1du_2,$$

o ile ta całka istnieje.

Definicja 2.3. Niech $f\in Y$, $g_1\in L^1$ i g_1 będzie funkcją jednej zmiennej x_1. Splotem Legendre'a funkcji f i g względem zmiennej x_1 nazwiemy

$$(f \boxtimes_1 g_1)(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\tau_{x_1x_2}^{1}f)(u_1,1)\cdot g(u_1)du_1 ,$$

o ile ta całka istnieje.

Analogicznie dla funkcji $f\in Y$, $g_2\in L^1$, gdzie g_2 jest funkcją jednej zmiennej x_2, splotem Legendre'a względem zmiennej x_2, nazwiemy

$$(f \boxtimes_2 g_2)(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\tau_{x_1x_2}^{1}f)g(u_2)du_2 ,$$

o ile ta całka istnieje.

Lemat 2.2. Niech $f \in Y$, $g \in L^{(1,1)}$, $g_1 \in L^1$, $g_2 \in L^1$, wtedy poprzednio zdefiniowane sploty istnieją prawie wszędzie w E oraz

(a) $\|f \circledast g\|_Y \leq \|f\|_Y \|g\|_{L^{(1,1)}}$,

$\|f \circledast_1 g_1\|_Y \leq \|f\|_Y \|g_1\|_{L^1}$, $\|f \circledast_2 g_2\|_Y \leq \|f\|_Y \|g_2\|_{L^1}$,

(b) $\mathcal{L}[f \circledast g](k_1,k_2) = \mathcal{L}[f](k_1,k_2)\,\mathcal{L}[g](k_1,k_2)$,

$\mathcal{L}[f \circledast_1 g_1](k_1,k_2) = \mathcal{L}[f](k_1,k_2)\,\mathcal{L}[g_1](k_1)$,

$\mathcal{L}[f \circledast_2 g_2](k_1,k_2) = \mathcal{L}[f](k_1,k_2)\mathcal{L}[g_2](k_2)$.

Dowody istnienia splotów przebiegają analogicznie jak w przypadku klasycznych splotów [1] oraz jak w przypadku splotów $f \rtimes_1 g_1$, $f \ltimes_2 g_2$ z pracy [6].

Dowody części (a) i (b) również przebiegają analogicznie jak w dowodzie lematu 1.3 i lematu 1.4 z pracy [6].

W pracy R.L. Stensa i M. Wehrenca [5] wykazano, że funkcja

$$\mathcal{H}(x,h) = \begin{cases} \ln \frac{(1+x)(1-h)}{(1-x)(1+h)} \cdot \ln^{-1} \left(\frac{2}{1+h}\right), & -1 \leq h \leq x < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych,} \end{cases}$$

spełnia następujące warunki dla $h \in (-1,1)$:

(a) $\mathcal{H}(x,h) \in L^1$

(b) $\|\mathcal{H}(\cdot,h)\|_{L^1} = 1$

(c) $$\mathcal{L}[\mathcal{H}]k_1 = \begin{cases} \frac{1-W_{k_1}(h)}{k_1(k_1+1)} \ln^{-1} \frac{2}{1+h} & \text{dla } k_1 \in N, \\ 1 & \text{dla } k_1 = 0. \end{cases}$$

Funkcję $\varkappa(x,h)$ wykorzystamy w dowodzie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.1. Niech $f \in Y$. Następujące warunki są równoważne:

(a) istnieje $D^{(1)}_{x_1} f \in X$ i $\mathcal{L}\left[D^{(1)}_{x_1} f\right](k_1,k_2) = \frac{k_1(k_1+1)}{2} \mathcal{L}[f](k_1,k_2)$,

(b) istnieje $g \in Y$ taka, że

$$\mathcal{L}[g](k_1,k_2) = \frac{k_1(k_1+1)}{2} \mathcal{L}[f](k_1,k_2); \quad k_1,k_2 \in N_0$$

Dowód: Wynikanie (a)$\Longrightarrow$(b) jest oczywiste.

(b)$\Longrightarrow$(a) Rozpatrzmy funkcję $\alpha(x_1,x_2) = (g \circledast_1 .)(x_1,x_2)$.

Wykazując równość transformat Legendre'a można wykazać, że

$$\alpha(x_1,x_2) = \frac{1}{2} \ln^{-1} \frac{2}{1+h_1} \cdot (f - \tau^1_{h_1 1} f)(x_1,x_2) \text{ prawie wszędzie w } E$$

Mamy dalej:

$$\left\| \frac{f - \tau^1_{h_1 1} f}{2\ln \frac{2}{1+h_1}} - g \right\|_Y = \left\| g \circledast_1 \varkappa - g \right\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left\| \tau^1_{u_1 1} g - g \right\|_Y \varkappa(u_1,h_1) du_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_{-1}^{h_1} \|g\|_Y \cdot 0 + \frac{1}{2} \int_{h_1}^{1} \left\| \tau^1_{u_1 1} g - g \right\|_Y \cdot \varkappa(u_1,h_1) du_1 .$$

Zgodnie z własnością (c) z lematu 1.2, mamy

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \left\| \frac{f - \tau^1_{h_1 1} f}{2 \ln \frac{2}{1+h_1}} - g \right\|_Y = 0$$

Ponieważ

$$\lim_{h_1 \to 1^-} \frac{2 . \ln \frac{2}{1+h_1}}{1-h_1} = \lim_{h_1 \to 1^-} \frac{2 \cdot \frac{1+h_1}{2} \cdot \frac{-2}{(1+h_1)^2}}{-1} = 1,$$

więc wykazaliśmy, że istnieje pochodna cząstkowa $D_{x_1}^{(1)} f = g$ prawie wszędzie.

Wniosek 2.1. Jeżeli istnieje $D_{x_1}^{(1)}f$, wtedy istnieją pochodne cząstkowe Legendre'a $D_{x_1}^{(1)}(f \boxed{*} g)$, $D_{x_1}^{(1)}(f \boxed{*}_1 g_1)$,

$D_{x_1}^{(1)}(f \boxed{*}_2 g_1)$, gdzie $g \in Y$, $f \in Y$, $g_1 \in L^1$, $g_2 \in L^1$, oraz

$$D_{x_1}^{(1)}(f \boxed{*} g) = (D_{x_1}^{(1)}f) \boxed{*} g, \quad D_{x_1}^{(1)}(f \boxed{*}_1 g_1) = (D_{x_1}^{1} f) \boxed{*}_1 g_1,$$

$$D_{x_1}^{(1)}(f \boxed{*}_2 g_2) = (D_{x_1}^{(1)} f) \boxed{*}_2 g_2 .$$

Dowód jest natychmiastowy na podstawie własności (b) z lematu 2.2 i poprzedniego twierdzenia.

Wniosek 2.2. Operator $D_{x_1}^{(1)}$ jest operatorem domkniętym, to znaczy jeżeli ciąg funkcji $f_n \in Y$ spełnia następujące warunki

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_Y = 0$,

(b) istnieją $D_{x_1}^{(1)}f_n \in Y$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_{x_1}^{(1)}f_n - g\|_Y = 0$,

to istnieje pochodna cząstkowa Legendre'a $D_{x_1}^{(1)}f \in Y$ i $D_{x_1}^{(1)}f = g$.

Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku pochodnych cząstkowych Czebyszewa, własność (i), twierdzenie 2.2 [6].

Wniosek 2.3. Istnieją pochodne cząstkowe Legendre'a następujących funkcji

$A_{h_1 1} f = f \boxed{*}_1 \varkappa$, $A_{1 h_2} f = f \boxed{*}_2 \varkappa$ dla $h_1, h_2 \in (-1,1)$, $f \in Y$ i

$$(D_{x_1}^{(1)} A_{h_1} f)(x_1,x_2) = \frac{1}{2} \ln^{-1}\left(\frac{2}{1+h_1}\right) \cdot \left[f - \tau_{h_1 1}^1 f\right](x_1,x_2),$$

$$(D_{x_2}^{(1)} A_{1h_2} f)(x_1,x_2) = \frac{1}{2} \ln^{-1}\left(\frac{2}{1+h_2}\right) \cdot (f - \tau_{1h_2}^1 f)(x_1,x_2)$$

prawie wszędzie. Jeżeli istnieją $D^{(1)}_{x_1}f$, $D^{(1)}_{x_2}f$, wtedy

$$(D^{(1)}_{x_1}A_{h_1 1}f) = A_{h_1 1}(D^{(1)}_{x_1}f),\quad (D^{(1)}_{x_2}A_{1h_2}f) = A_{1h_2}(D^{(1)}_{x_2}f).$$

Podobnie jak w przypadku pochodnych cząstkowych Czebyszewa [6] podamy związek między pochodnymi cząstkowymi Legendre'a funkcji $f \in Y$ a pochodnymi w klasycznym sensie.

Twierdzenie 2.2. Niech $f \in Y$ i niech istnieje $\bar{f} \in Y$ taka że:

(a) $\bar{f} = f$ prawie wszędzie w E, $\bar{f}$ jest funkcją ciągłą wewnątrz E,

(b) istnieją $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}$ jest ciągła wewnątrz E, $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_1^2}$ jest całkowalna w każdym kompakcie zawartym w E,

(c) $\lim\limits_{x_1 \to 1^-} (x_1^2 - 1)\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} = \lim\limits_{x_1 \to -1^+} (x^2-1)\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} = 0$ dla każdego $x_2 \in (-1,1)$,

(d) $\left[(x_1^2 - 1)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_1^2} + 2x_1\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\right] \in Y$

Wtedy istnieje pochodna cząstkowa Legendre'a funkcji f, $D^{(1)}_{x_1}f$ i

$$(D^{(1)}_{x_1}f)(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 - 1)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \text{ prawie wszędzie w E.}$$

Dowód: Wystarczy wykazać, że transformata Legendre'a funkcji

$$g(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 - 1)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \quad \text{jest równa}$$

$$\frac{k_1(k_1+1)}{2}\mathcal{L}[f](k_1,k_2), \quad \text{dla} \quad k_1,k_2 \in N_0 .$$

$$\mathcal{L}[g](k_1,k_2) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}(x_1^2-1)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\right]W_{k_1}(x_1)W_{k_2}(x_2)dx_1dx_2 .$$

Obliczmy całkę

$$I(x_2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}(x_1^2 - 1)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\right] \cdot W_{k_1}(x_1)dx_1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{d}{dx_1}\left[\frac{x_1^2-1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{f}\right)\right] \cdot W_{k_1}(x_1)dx_1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[W_{k_1}(x_1).\left(\frac{x_1^2-1}{2}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\right)\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\right] - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{(x_1^2-1)}{2}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\right]W'_{k_1}(x_1)dx_1 =$$

$$= 0 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\left[W'_{k_1}.(x_1) \cdot \frac{x^2-1}{2}\right]dx_1\right\} =$$

$$= + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{-\frac{1}{2}\bar{f}(x_1,x_2).W'_{k_1}(x_1) \cdot \frac{x_1^2-1}{2}\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\bar{f}(x_1,x_2) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \frac{d}{dx_1}\left[W'_{k_1}(x_1) \cdot \frac{x_1^2-1}{2}\right].dx_1\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\bar{f}(x_1,x_2).\frac{k_1(k_1+1)}{2}W_{k_1}(x_1)dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\bar{f}(x_1,x_2)\frac{k_1(k_1+1)}{2} \cdot W_{k_1}(x_1)dx_1 .$$

Dlatego

$$\mathcal{L}[g](k_1,k_2) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{f}(x_1,x_2)W_{k_1}(x_1)W_{k_2}(x_2)\frac{k_1(k_1+1)}{2}dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{k_1(k_1+1)}{2}\mathcal{L}[\bar{f}](k_1,k_2) = \frac{k_1(k_1+1)}{2}\mathcal{L}[f](k_1,k_2).$$

3. MODUŁY CIĄGŁOŚCI LEGENDRE'A

Definicja 3.1. Niech $f \in Y$, $\delta_1, \delta_2 \in (-1.1)$.
Modułem ciągłości Legendre'a dla funkcji f nazwiemy

$$\omega_1^l(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{\delta_1 \leq h_1 \leq 1 \\ \delta_2 \leq h_2 \leq 1}} \left\| \tau^l_{h_1 h_2} f - f \right\|_Y .$$

Moduły cząstkowe zdefiniujemy następująco:

$$\omega_1^l (f, \delta_1, 1) = \sup_{\delta_1 \leq h_1 \leq 1} \left\| \tau^l_{h_1 1} f - f \right\|_Y ,$$

$$\omega_1^l (f, 1, \delta_2) = \sup_{\delta_2 \leq h_2 \leq 1} \left\| \tau^l_{1 h_2} f - f \right\|_Y .$$

Udowodnimy obecnie podstawowe własności tych modułów.

Lemat 3.1. Niech $f, g \in Y$, $\delta_1, \delta_2 \in (-1,1)$, Wtedy:

(a) $\omega_1^l (f, \delta_1, \delta_2) \leq 2 \|f\|_Y$,

(b) $\omega_1^l (f, \delta_1, \delta_2) \leq \omega_1^l(f, \delta_1, 1) + \omega_1^l(f, 1, \delta_2)$,

(c) $\lim\limits_{(\delta_1, \delta_2) \to (1,1)} \omega_1^l(f, \delta_1, \delta_2) = 0$,

(d) $\omega_1^l(f+g, \delta_1, \delta_2) \leq \omega_1^l(f, \delta_1, \delta_2) + \omega_1^l(g, \delta_1, \delta_2)$,

(e) $\omega_1^l(f, \delta_1, 1) \leq 6(1 - \delta_1) \left\| D^{(1)}_{x_1} f \right\|_Y$,

$\omega_1^l(f, 1, \delta_2) \leq 6(1 - \delta_2) \left\| D^{(1)}_{x_2} f \right\|_Y$ dla funkcji f, dla której istnieją

$D^{(1)}_{x_1} f$, $D^{(1)}_{x_2} f$.

(f) $\omega_1^1(f, \delta_1, 1) \leqslant 2.6.\max\left\{1, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_2}\right\}\omega_1^1(f, \delta_2, 1).$

$$\omega_1^1(f, 1, \delta_3) \leqslant 12 \max\left\{1, \frac{1-\delta_3}{1-\delta_4}\right\}\omega_1^1(f, 1, \delta_4).$$

Dowód: Własność (a) wynika z własności (b) z lematu 1.2.

(b) Ponieważ $\tau^1_{h_1h_2} f = \tau^1_{h_1 1}(\tau^1_{1h_2} f)$, więc

$$\left\| \tau^1_{h_1h_2} f - f\right\|_Y \leqslant \left\|\tau^1_{h_1 1}(\tau^1_{1h_2} f) - \tau^1_{h_1 1} f + \tau^1_{h_1 1} f - f\right\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\tau^1_{h_1 1} f - f\right\|_Y + \left\|\tau^1_{1h_2} f - f\right\|_Y ,$$

skąd własność (b) wynika natychmiast.

Własność (c) wynika bezpośrednio z własności (c) z lematu 1.2.

Własność (d) wynika z addytywności operatora translacji Legendre'a $\tau^1_{h_1h_2} f$.

(e) Wykażemy pierwszą z nierówności. Drugą dowodzi się analogicznie. Zgodnie z wnioskiem 3.3 i założeniem mamy, że

$$\left\| f-\tau^1_{h_1 1} f\right\|_Y = \left\| 2 \ln \frac{2}{1+h_1} \cdot (A_{h_1 1} D^{(1)}_{x_1} f)\right\|_Y \leqslant 2.\ln \frac{2}{1+h_1} \cdot \left\| D^{(1)}_{x_1} f\right\|_Y .$$

Dla $h_1 \in [0, 1]$ prawdziwa jest nierówność

$$\ln \frac{2}{1+h_1} \leqslant 1 - h_1 .$$

Wykażemy, że dla $-1 < h_1 < 0$

$$\ln \frac{2}{1+h_1} \cdot \left\| A_{h_1 1}(D^{(1)}_{x_1} f\right\|_Y \leqslant 3 \left\| D^{(1)}_{x_1} f\right\|_Y .$$

Zgodnie z definicją funkcji $\varkappa(x_1, h_1)$ mamy:

$$A_{h_1 1}(D^{(1)}_{x_1} f)(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\int_{h_1}^{1} (\tau^1_{x_1x_2} D^{(1)}_{x_1} f)(u_1,1) \ln \frac{(1+u_1)(1-h_1)}{(1-u_1)(1+h_1)} . \ln^{-1} \frac{2}{1+h_1}\, du_1 .$$

Obliczmy całkę

$$I(\varepsilon) = \int_{h_1}^{1-\varepsilon} (\tau^1_{x_1x_2} D^{(1)}_{x_1} f)(u_1,1) \ln \frac{(1+u_1)(1-h_1)}{(1-u_1)(1+h_1)} du_1 \text{ dla } \varepsilon \in (0,1).$$

Stosując twierdzenie o całkowaniu przez części mamy:

$$I(\varepsilon) = -\ln \frac{(2-\varepsilon)(1-h_1)}{\varepsilon\cdot(1+h_1)} \cdot \int_{1-\varepsilon}^{1} (\tau^1_{x_1x_2} D^{(1)}_{x_1} f)(y_1,1)dy_1 +$$

$$+ \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{2}{1-u_1^2} \int_{u_1}^{1} (\tau^1_{x_1x_2} D^{(1)}_{x_1} f)(y_1,1)dy_1du_1 +$$

$$+ \int_{h_1}^{0} \frac{2}{1-u_1^2} \int_{u_1}^{1} (\tau^1_{x_1x_2} D^{(1)}_{x_1} f)(y_1,1)dy_1du_1 = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3 .$$

Oszacujemy każdą z tych całek osobno

$$\|I_1(\varepsilon)\|_Y \leqslant \ln \frac{(2-\varepsilon)(1-h_1)}{\varepsilon\cdot(1+h_1)} \cdot \int_{1-\varepsilon}^{1} \|\tau^1_{y_1 1} D^{(1)}_{x_1} f\|_Y \, dy_1 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \ln \frac{(2-\varepsilon)(1-h_1)}{\varepsilon\cdot(1+h_1)} \cdot \|D^{(1)}_{x_1} f\|_Y .$$

$$\|I_2(\varepsilon)\|_Y \leqslant \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{2}{1-u_1^2} \int_{u_1}^{1} \|D^{(1)}_{x_1} f\|_Y \, dy_1du_1 \leqslant 2.\|D^{(1)}_{x_1} f\|_Y . \ln(2-\varepsilon).$$

$$\|I_3\|_Y \leqslant \left\| \int_{h_1}^{0} \frac{2}{1-u_1^2} \int_{-1}^{u_1} (\tau^1_{y_1 1} D^{(1)}_{x_1} f)(x_1,x_2) \, dy_1du_1 \right\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant 2.\ln(1-h_1).\|D^{(1)}_{x_1} f\|_Y .$$

W ostatnim oszacowaniu korzystamy z tego, że

$$\int_{-1}^{1} (\tau^{1}_{y_1 1}\, D^{(1)}_{x_1} f)(x_1,x_2)dy_1 = 0.$$

Obliczmy bowiem jej transformatę Legendre'a.

$$\mathcal{L}\left[\int_{-1}^{1} (\tau^{1}_{y_1 1}\, D^{(1)}_{x_1} f)\right](k_1,k_2) = \int_{-1}^{1} W_{k_1}(y_1)\, \frac{k_1(k_1+1)}{2}\, \mathcal{L}[f](k_1,k_2)dy_1 = 0$$

dla $k_1,k_2 \in N_0$.

Na podstawie lematu Fatonu mamy

$$\Big\| \liminf_{\varepsilon \to 0^+} |I(\varepsilon)| \Big\|_Y \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \|I(\varepsilon)\|_Y \leqslant 4 \ln 2 \, \|D^{(1)}_{x_1} f\|_Y .$$

Ponieważ $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0^+} |I(\varepsilon)| = \ln \frac{2}{1+h_1} \left|A_{h_1 1}(D^{(1)}_{x_1} f)\right|$,

otrzymujemy więc potrzebne oszacowanie:

$$\ln \frac{2}{1+h_1} \left\|A_{h_1 1}(D^{(1)}_{x_1} f)\right\|_Y \leqslant 3 \left\|D^{(1)}_{x_1} f\right\|_Y \quad \text{dla} \quad -1 < h_1 < 0.$$

Biorąc pod uwagę oszacowanie dla $0 \leqslant h_1 \leqslant 1$ i ostatnie mamy, że

$$\left\| \tau^{1}_{h_1 1} f - f\right\|_Y \leqslant 6.(1-h_1) \left\|D^{(1)}_{x_1} f\right\|_Y ,$$ skąd wynika własność (e)

(f) Niech $g \in Y$, $f \in Y$ i niech istnieje $D^{(1)}_{x_1} g \in Y$.

$$\omega^{1}_{1}(f, \delta_1, 1) \leqslant \omega^{1}_{1}(f-g, \delta_1, 1) + \omega^{1}_{1}(g, \delta_1, 1) \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f - g\|_Y + 6.(1-\delta_1)\left\|D^{(1)}_{x_1} g\right\|_Y .$$

$$\omega_1^1(f, \delta_1, 1) \leqslant 6 \inf_{g \in V_{x_1}^1} \left\{ \|f-g\|_Y + (1-\delta_1) \left\| D_{x_1}^{(1)} g \right\|_Y \right\},$$

gdzie $V_{x_1}^1 = \left\{ g \in Y,\ \underset{D_{x_1}^{(1)} g}{V} \right\}.$

$$\omega_1^1(f, \delta_1, 1) \leqslant 6.\inf_{g \in V_{x_1}^1} \left\{ \|f-g\|_Y + \frac{(1-\delta_1)}{(1-\delta_2)} \cdot (1-\delta_2) \left\| D_{x_1}^{(1)} g \right\|_Y \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 6.\max\left\{1, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_2}\right\} \inf_{g \in V_{x_1}^1} \left\{ \|f-g\|_Y + (1-\delta_2) \left\| D_{x_1}^{(1)} g \right\|_Y \right\},$$

$$\delta_2, \delta_1 \in (-1, 1).$$

Weźmy teraz funkcję $g_1 = A_{\delta_2 1} f$. Wiemy, że $g_1 \in V_{x_1}^1$ (wniosek 2.3)

$$\omega_1^1(f, \delta_1, 1) \leqslant 6.\max\left\{1, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_2}\right\} \cdot \left\{ \|f-g_1\|_Y + (1-\delta_2) \cdot \left\| D_{x_1}^{(1)} g_1 \right\|_Y \right\}.$$

$$\|f-g_1\|_Y + (1-\delta_2) \left\| D_{x_1}^{(1)} g_1 \right\|_Y = \left\| \frac{1}{2} \int_{\delta_2}^{1} \left[f - \tau_{u_1 1}^{1} f \right](x_1 . x_2)\, \varkappa(u_1, \delta_2)\, du_1 \right\|_Y +$$

$$+ (1-\delta_2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln^{-1} \frac{2}{1+\delta_2} \left\| f - \tau_{\delta_2 1} f \right\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{\delta_2}^{1} \omega_1^1(f, u_1, 1)\, \varkappa(u_1, \delta_2)\, du_1 + \frac{1}{2}(1-\delta_2) \frac{1}{\ln \frac{2}{1+\delta_2}} \omega_1^1(f, \delta_2, 1) \leqslant$$

$$\leqslant \omega_1^1(f, \delta_2, 1) \left[1 + \frac{1}{2}(1-\delta_2) \cdot \frac{1}{\ln \frac{2}{1+\delta_2}} \right] \leqslant 2.\omega_1^1(f, \delta_2, 1)$$

$$\omega_1^1(f, \delta_1, 1) \leqslant 12.\max\left\{1, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_2}\right\} \omega_1^1(f, \delta_2, 1).$$

LITERATURA

[1] P.L. Butzer, R.L. Nessel: Fourier analysis and approximation. Vol 1, Birkhauser Verlag, Basel - Stuttgart, and Academic Press, New York-San Francisco-London, 1971.

[2] N. Liebiediew: Spiecjalnyje funkcji i ich priłożenija. Moskwa 1963.

[3] J. Musielak: Wstęp do analizy funkcjonalenj. PWN, Warszawa 1976.

[4] I.P. Natanson: Konstruktiwnaja tieorija funkcji. Moskwa 1949.

[5] R.L. Stens, M. Wehrens: Legendre transforma methods and best algebraic approximation. Commentationes Mathematicae. PWN, Warszawa 1979 (351 - - 380).

[6] B. Luks-Ogrodnik: Metoda transformaty Czebyszewa w aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Cz. II. Pochodne cząstkowe Czebyszewa rzędu 0. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka z. 39, Gliwice 1982.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПО ЛЕЖАНДРУ И ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЛЕЖАНДРА

Р е з ю м е

В работе определены: изображение по Лежандру, оператор трансляции Лежандра, частные производные Лежандра, свёртка функций и модули непрерывности Лежандра для функций двух переменных из пространотва со смешанными степенями. Были исследованы свойства определённых операторов и функций, а также взаимная зависимость между ними и между известными понятиями из классической теории аппроксимации. Результаты, полученные здесь, являются переносом результатов, полученных Р.Л. Стеном и М. Веренсом на функции двух переменных, интегрируемые со смешанными степенями большими или равными 1.

LEGENDRE TRANSFORMS AND LEGENDRE PARTIAL DERIVATIVES

S u m m a r y

In the paper there are defined Legendre transform, Legendre translation operator, Legendre partial derivatives, convolution and Legendre moduls of centinuity for functions of two variables from space with mixed powers. There were investigated the properties of the defined operators and functions and mutual relations between them and between known notions from classical theory of approximation. The results obtained here are the gene-

ralization of the results obtained by R.L. Stens and M. Wehrens for the functions of two variables. These functions are integrable with mixed powers which are greater or which equal 1.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 15.X.1985

Recenzent:
Prof. dr hab. Julian Musielak