ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 879

Andrzej MIKA

OBIEKTY PROJEKTYWNE W KATEGORII OBIEKTÓW ABSTRAKCYJNYCH

Streszczenie. Praca niniejsza zwiera wyniki dotyczące postaci obiektów projektywnych oraz uwagę dotyczącą obiektów iniektywnych w kategorii obiektów abstrakcyjnych OA. Rozważania prowadzono tak, by wskazać na związki pojęcia z teorii kategorii - obiekt projektywny - z pojęciami teorii obiektów abstrakcyjnych takich jak tranzytywność czy komitanta.

1. WSTĘP

W niniejszej pracy przedstawione są wyniki dotyczące obiektów projektywnych w kategorii obiektów abstrakcyjnych OA.

W przypadku obiektów projektywnych dowolnej kategorii A rozpatruje się podkategorię $\mathfrak{B}$, kategorii $\mathfrak{A}$, której każdy morfizm jest epimorfizmam. Ponieważ każde odwzorowanie wyznaczające komitantę jest epimorfizmem w kategorii OA [2], badanie projektywności dotyczy jednego z podstawowych problemów teorii obiektów abstrakcyjnych, a mianowicie problemu komitant.

Na koniec pracy zamieszczono uwagę dotyczącą obiektów iniektywnych w kategorii OA.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE

Definicja 2.1. ([1])

Obiektem abstrakcyjnym o włóknie M, grupie G i działaniu F nazywamy trójkę

$$(M, G, F), \tag{1}$$

gdzie M jest dowolnym zbiorem niepustym, G - dowolną grupą a $F: M \times G \to M$, działaniem grupy G na zbiór M, spełniającym dwa warunki:

1) $$\forall x \in M,\ \forall g_1, g_2 \in G \qquad F(F(x,g_1),g_2) = F(x,g_2\, g_1), \tag{2}$$

2) $$\forall x \in M \qquad F(x,e) = x. \tag{3}$$

Niech będą dane dwa obiekty abstrakcyjne (M_1,G_1,F_1) i (M_2,G_2,F_2).

Definicja 2.2. ([1])

Odwzorowaniem ekwiwariantnym obiektu (M_1,G_1,F_1) w obiekt (M_2,G_2,F_2) nazywamy parę odwzorowań (h,φ), gdzie $h\colon M_1 \to M_2$ jest odwzorowaniem zbioru M_1 w zbiór M_2, a $\varphi\colon G_1 \to G_2$ jest homorfizmem grupy G_1 w grupę G_2, spełniającą warunek:

$$\forall x \in M_1,\ \forall g \in G_1 \qquad h(F_1(x,g)) = F_2(h(x), \varphi(g)). \tag{4}$$

Definicja 2.3. ([1])

Kategorię, której obiektami są obiekty abstrakcyjne, morfizmami - odwzorowania ekwiwariantne, a kompozycja - składanie par odwzorowań, nazywamy kategorią obiektów abstrakcyjnych (oznaczoną dalej przez OA).

Niech $\mathcal{B}$ będzie podkategorią kategorii $\mathcal{A}$ taką, że każdy morfizm $\pi \in \mathcal{B}$ jest epimorfizmem.

Definicja 2.4. ([5])

Obiekt $P \in \mathcal{A}^{\circ}$ nazywamy projektywnym (ze względu na $\mathcal{B}$), jeśli dla każdego $\pi \in \mathcal{B}$ przekształcenie $\langle P, \pi\rangle_{\mathcal{A}} : \langle P,A\rangle_{\mathcal{A}} \to \langle P,B\rangle_{\mathcal{A}}$ jest suriekcją.

Znaczy to, że dla każdego $\pi\colon A \to B$, $\pi \in \mathcal{B}$ i każdego $\varphi\colon P \to B$, $\varphi \in \mathcal{A}$ istnieje co najmniej jeden morfizm $\Psi\colon P \to A$, $\Psi \in \mathcal{A}$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\Psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A \arrow[rr, "\pi"] & & B \end{tikzcd} \tag{5}$$

jest przemienny.

Uwaga 2.1

W kategorii grup Gr grupy Z_n dla $n = 2,3,\ldots$ nie są projektywne, a grupa Z jest projektywna ([5]). Ogólnie każda wolna grupa projektywna ([4]).

3. Rozważmy następujący obiekt abstrakcyjny

$$(Z, Z_+, f) \tag{6}$$

gdzie Z jest zbiorem liczb całkowitych, Z_+ - grupą addytywną, liczb całkowitych, a $f\colon Z\ \ Z_+ \to Z$ jest określone wzorem:

$$\forall k \in Z,\ \forall n \in Z_+, \qquad f(k,n) = n + k \tag{7}$$

Obiekt (6) jest prostotranzytywny (tzn. $\forall\, k_1, k_2 \in Z,\ \exists_1\, n \in Z_+$ takie, że $f(k_1,n) = k_2$ (patrz [1]).

Uwaga 3.1

Przez morfizm trywialny będziemy rozumieć taki morfizm $(h,\varphi)\in\langle(M_1,G_1,F_1),(M_2,G_2,F_2)\rangle_{OA}$, że spełniony jest przynajmniej jeden z poniższych warunków:

1) $h: M_1\longrightarrow M_2$ jest stałe, tzn. $\exists y_o\in M_2, \forall x\in M_1, h(x) = y_o$, $\operatorname{Im}h = \{y_o\}$.

2) $\varphi: G_1\longrightarrow G_2$ jest takie, że $\forall g\in G_1, \varphi(g) = e_{G_2}$, tzn. $\operatorname{IM}\varphi = \{e_{G_2}\}$.

Uwaga 3.2

Dla dwóch obiektów (M_1,G_1,F_1) i (M_2,G_2,F_2) o nietrywialnych działaniach F_i, $i = 1,2$ zbiór $\langle(M_1,G_1,F_1),(M_2,G_2,F_2)\rangle_{OA}$ może składać się tylko z morfizmów trywialnych (np. jeśli $G_1 = Z_2$ a $G_2 = Z_3$, ponieważ istnieje tylko trywialny homorfizm grupy Z_2 w Z_3).

Obiekt (6) ma natomiast poniższą własność:

Lemat 3.1

Jeżeli (M,G,F) nie jest skalarem, to w zbiorze $\langle(Z,Z_+,f),(M,G,F)\rangle_{OA}$ istnieją morfizmy nietrywialne.

Dowód

Niech obiekt (M,G,F) spełnia założenia lematu.

Morfizm $(h,\varphi)\in\langle(Z,Z_+,f),(M,G,F)\rangle_{OA}$ określony następująco:

$$
\begin{aligned}
&\varphi: Z_+\longrightarrow G \qquad \forall n\in Z_+ \qquad \varphi(n) = g^n; \qquad g \text{ - dowolne}\\
&h: Z\longrightarrow M \qquad\qquad\qquad h(0) = x_o\in M; \quad x_o \text{ - dowolne}\\
&\qquad\qquad\qquad \forall k\in Z \qquad h(k) = F(x_o,g^k).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

φ jest oczywiście homomorfizmem Z_+ w G.

Sprawdzimy teraz warunek zgodności (4).

$$
\begin{aligned}
\forall k\in Z, \quad \forall n\in Z_+ \qquad h(f(k,n)) &= h(n+k) = F(x_o,g^{n+k}) =\\
&= F(x_o,g^n g^k) = F(x_o,\varphi(n).g^k) =\\
&= F(F(x_o,g^k), \varphi(n)) = F(h(k), \varphi(n)) .
\end{aligned}
$$

Jeśli w (8) przyjmiemy $g\in G$ i $x_o\in M$ takie, że $F(x_o,g) = x \neq x_o$ (punkt x_o i $g\in G$ także istnieją, bo (M,G,F) nie jest skalarem), to morfizm (h,φ) nie jest trywialny.

Uwaga 3.3

Para (h,φ) określana wzorami (8) jest również morfizmem w OA gdy (M,G,F) jest skalarem.

Pokażemy teraz:

Lemat 3.2

Dla dowolnego obiektu (1) każdy morfizm $(h,\varphi) \in \langle (Z,Z_+,f), (M,G,F) \rangle_{OA}$ jest postaci (8).

Dowód

Niech dany będzie obiekt (1). Niech $(h,\varphi) \in \langle (Z,Z_+,f), (M,G,F) \rangle_{OA}$. Na mocy (4) dla dowolnego $k \in Z$ mamy:

$$h(k) = h(0 + k) = h(k + 0) = h(f(0,k)) = F(h(0), \varphi(k)).$$

A więc $\forall k \in Z$, $h(k)$ jest wyznaczone przez $h(0)$, homomorfizm $\varphi: Z_+ \longrightarrow G$ i działanie F w sposób zdefiniowany w (8). Fakt, że homomorfizm $\varphi: Z_+ \longrightarrow G$ musi być zdefiniowany wzorami $\varphi(1) = g \in G$, $\varphi(n) = g^n$ jest oczywisty.

Uwaga 3.4

Wszystkie dalsze rozważania dotyczące obiektów projektywnych będą prowadzone dla przypadku, gdy podkategorią $\mathcal{B}$ z definicji 2.4 jest podkategoria OA_e, kategorii OA, wszystkich epimorfizmów i sformułowanie "ze względu na OA_e" będziemy opuszczać.

Twierdzenie 3.1

Obiekt (6) jest obiektem projektywnym w kategorii OA.

Dowód

Niech $(h,\varphi) \in \langle (M_1,G_1,F_1), (M_2,G_2,F_2) \rangle_{OA}$ będzie dowolnym epimorfizmem. Pokażemy, że dla dowolnego morfizmu:

$$(h_2, \varphi_2) \in \langle (Z,Z_+,f), (M_2,G_2,F_2) \rangle_{OA}$$

istnieje morfizm

$$(h_1,\varphi_1) \in \langle (Z,Z_+,f), (M_1,G_1,F_1) \rangle_{OA}$$

taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} & (Z, Z_+, f) \arrow[dl, "(h_1,\varphi_1)"'] \arrow[dr, "(h_2,\varphi_2)"] & \\ (M_1,G_1F_1) \arrow[rr, "(h,\varphi)"] & & (M_2,G_2,F_2) \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Ponieważ każdy morfizm o dziedzinie (Z,Z_+,f) jest postaci (8) (lemat 3.2), morfizm (h_2,φ_2) zadany jest wzorami

$$h_2(0) = x_2 \in M_2 \quad \text{i} \quad \varphi_2(1) = g_2 \in G_2 .$$

Ponieważ (h,φ) jest epimorfizmem, to

$$\exists\, x_1 \in M_1, \quad \exists\, g_1 \in G_1 \quad \text{takie, że} \quad h(x_1) = x_2 \quad \text{i} \quad \varphi(g_1) = g_2 .$$

Zdefiniujemy $h_1: Z \to M_1$ i $\varphi_1: Z_+ \to G_1$ następująco

$$h_1(0) = x_1, \quad \forall_{k \in Z} \; h_1(k) = F_1(x_1,g_1^k),$$

$$\varphi_1(1) = g_1 .$$

Morfizm ten spełnia warunek przemienności diagramu (9) tzn.

$$(h,\varphi) \quad (h_1,\varphi_1) = (h_2, \varphi_2);$$

$$\forall k \in Z \qquad h(h_1(k)) = h(F_1(x_1,g_1^k)) = F_2(h(x_1), \varphi(g_1^k)) =$$

$$= F_2(x_2,(\varphi(g_1))^k) = F_2(x_2,g_2^k) = h_2(k),$$

$$\forall n \in Z_+ \qquad \varphi(\varphi_1(n)) = \varphi(g_1^n) = (\varphi(g_1))^n = g_2^n = \varphi_2(n) .$$

Uogólnimy teraz lematy 3.1 i 3.2.

Lemat 3.3

Jeżeli (M_1,G_1,F_1) nie jest skalarem i istnieje nietrywialny homomorfizm $\varphi: G \to G_1$ taki, że $\varphi(G) \setminus \mathcal{H}(M_1) \neq \Phi$, gdzie $\mathcal{H}(M_1)$ oznacza grupę nieefektywności zbioru M_1, to dla dowolnego obiektu prostotrazytywnego (M,G,F) w zbiorze $\langle (M,G,F), (M_1,G_1,F_1) \rangle_{OA}$ istnieje nietrywialny morfizm (h,φ). Ponadto dowolny morfizm $(h,\varphi) \in \langle (M,G,F), (M_1,G_1,F_1) \rangle_{OA}$ gdzie (M,G,F) jest obiektem prostotranzytywnym, a (M_1,G_1,F_1) dowolnym obiektem abstrakcyjnym jest taki, że $h: M \to M_1$ jest postaci:

$h(x_0) = x_1$ dla pewnego $x_1 \in M_1$ i dowolnego $x_0 \in M$

$\forall x \in M$, $h(x) = F_1(x_1,\varphi(g_x))$, gdzie φ jest homomorfizmem $\varphi: G \to G_1$, a g G jest takie, że $F(x_0,g_x) = x$.

Dowód

Niech (M,G,F) będzie prostotranzytywnym obiektem abstrakcyjnym. Niech $(h,\varphi) \in \langle (M,G,F), (M_1,G_1,F_1) \rangle_{OA}$, gdzie (M_1,G_1,F_1) nie jest skalarem i φ jest dowolnym nietrywialnym homomorfizmem $\varphi: G \to G_1$. Niech $x_0 \in M$, $x_1 \in M_1$ dowolne, przy czym x_1 takie, że $F_1(x_1,g_1) = \overline{x}_1 \neq x_1$ dla pewnego $g_1 \in \mathrm{Im}G$ (por. lemat 3.1).
Zadajemy

$$h(x_0) = x_1 \quad \text{i} \quad \forall x \in M \quad h(x) = F_1(x_1,\varphi(g_x)), \tag{10}$$

gdzie $g_x \in G$ takie, że $F(x_0,g_x) = x$.
Pokażemy warunek (4):

$$\forall x \in M, \quad \forall g \in G \quad h(F(x,g)) = h(F(F(x_0,g_x),g)) = h(F(x_0,gg_x)) =$$

$$= F_1(h(x_0), \varphi(gg_x)) = F_1(h(x_0), \varphi(g)\,\varphi(g)) =$$

$$= F_1(F_1(h(x_0), \varphi(g_x)), \varphi(g)) = F_1(h(F(x_0,g_x)),$$

$$\varphi(g)) = F_1(h(x), \varphi(g)).$$

Pokażemy teraz, że dla każdego $(h,\varphi) \in \langle (M,G,F), (M_1,G_1,F_1) \rangle_{OA}$, gdzie (M,G,F) jest obiektem prostotranzytywnym, a (M_1,G_1,F_1) dowolnym obiektem abstrakcyjnym $h: M \to M_1$ zadane jest wzorami:

$$h(x_0) = x_1, \qquad h(x) = F_1(h(x_0), \varphi(g_x))$$

dla dowolnego ustalonego i pewnego $x_1 \in M_1$, gdzie $\varphi: G \to G$, jest homomorfizmem grup. Niech $x \in M$ dowolne. Dla dowolnego $x_0 \in M$ $\exists_1 g_x \in G$ takie, że $F(x_0,g_x) = x$.
Z warunku (4) wynika, że

$$h(x) = h(F(x_0,g_x)) = F_1(h(x_0), \varphi(g_x)). \ \square$$

4. Podamy teraz dwa lematy. Pierwszy z nich jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.1 ([1])

Każdy abstrakcyjny obiekt tranzytywny (M,G,F) jest równoważny obiektowi $({}^{G}/_{G(x_0)}, G, 1)$, gdzie $x_0 \in M$ dowolne,

$$G(x_0) = \{ g \in G; \quad F(x_0,g) = x_0 \}$$

$$1([g],x) = [L(g,x)],$$

gdzie L jest działaniem obiektu

$$(G,G,L), \quad L(x,g) = gx_{\square}.$$

Uwaga 4.1

Oczywiście każdy obiekt (G,G,L) jest prostotranzytywny.

Lemat 4.1

Kiedy obiekt abstrakcyjny prostotranzytywny jest równoważny obiektowi (11).□

Lemat 4.2

Dla dowolnych grup G,H i dowolnego homomorfizmu φ: G→H, para (φ,φ) jest morfizmem w OA.

$$(\varphi,\varphi) \in \langle (G,G,L_G), \quad (H,J,L_H) \rangle_{OA}, \quad \text{gdzie}$$

$$\forall x \in G, \quad \forall g \in G \qquad L_G(x,g) := gx$$

$$\forall y \in H, \quad \forall h \in H \qquad L_H(y,h) := hx._{\square}$$

(Pierwszy element pary rozumiemy jako odwzorowanie między zbiorami elementów grup G i H).

Tak więc, na mocy lematu 4.1 rozważania dotyczące obiektów prostotranzytywnych można ograniczyć do obiektów postaci (11). Pomimo, że lemat 3.3 jest naturalnym uogólnieniem lematów 3.1 i 3.2 nie zachodzi analogiczne uogólnienie twierdzenia 3.1 na dowolne obiekty prostotranzytywne, co pokazuje poniższe rozumowanie.

Niech będzie dany obiekt (11), gdzie G-dowolna grupa. Załóżmy, że jest on projektywny. Weźmy pewien epimorfizm $(\varphi,\varphi) \in \langle (G_1,G_1,L_1), (G_2,G_2,L_2) \rangle_{OA}$.

Dla każdego $(\varphi_2,\varphi_2) \in \langle (G,G,L),\ (G_2,G_2,L_2)\rangle_{OA}$ istnieje morfizm (h_1,φ_1) $\in \langle (G,G,L),\ (G_1,G_1,L_1)\rangle_{OA}$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd}
 & (G,G,L) \arrow[dl, "{(h_1,\varphi_1)}"'] \arrow[dr, "{(\varphi_2,\varphi_2)}"] & \\
(G_1,G_1,L_1) \arrow[rr, "{(\varphi,\varphi)}"] & & (G_2,G_2,L_2)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Oznacza to, że dowolna grupa G jest projektywna w kategorii Gr, co jest sprzeczne z uwagą 2.1.

Zachodzi natomiast

<u>Twierdzenie 4.2</u>

Dla dowolnej G-geometrii (patrz [1]) istnieje obiekt projektywny. Jest nim obiekt postaci (11). □

5. Twierdzenie 3.1 można uogólnić na obiekty postaci (11), gdzie G jest grupą wolną. Mamy:

<u>Twierdzenie 5.1</u>

Każdy obiekt (11), gdzie G jest dowolną grupą wolną jest projektywny w OA □.

Rozważania prowadziliśmy w mniej ogólnym przypadku z dwóch powodów. Po pierwsze: ze względu na przejrzystość prowadzonych dowodów, przez co bardziej czytelna była ich idea, a po drugie: obiekt (6) ma szczególne własności kategoryjne w OA. Jest on, np. również koseparatorem w kategorii OA ([3]).

W kategorii OA istnieją także obiekty projektywne innej postaci niż podana w twierdzeniu 5.1, a mianowicie obiekty $(M,\{e\},F)$, $\forall_{x \in M}\ F(x,e) = x$, M jest dowolnym zbiorem niepustym.

Projektywność obiektu tej postaci wynika z faktu, że obiekt taki można w pewnym sensie utożsamiać ze zbiorem M (jest on poddawany tylko jednemu przekształceniu - identycznościowemu), a w kategorii EnS każdy zbiór jest projektywny ([5]). Ponieważ retrakty obiektów projektywnych są projektywne ([5]) mamy:

<u>Wniosek 5.1</u>

Jeżeli komitanta obiektu projektywnego jest jego retraktem, to jest również obiektem projektywnym. □

6. Obiekty iniektywne w kategorii OA

Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną kategorią. Niech $\mathcal{B}$ będzie pewną podkategorią kategorii $\mathcal{A}$ taką, że każdy morfizm $\sigma \in \mathcal{B}$ jest monomorfizmem.

Definicja 6.1 ([5])

Obiekt $I \in \mathcal{A}^\circ$ nazywamy iniektywnym (ze względu na $\mathcal{B}$) jeśli dla dowolnego morfizmu σ: $A \to B$ w kategorii $\mathcal{B}$ przekształcenie

$$\langle \sigma, I\rangle_{\mathcal{A}} \; : \; \langle B, I\rangle_{\mathcal{A}} \to \langle A, I\rangle_{\mathcal{A}}$$

jest suriekcją, tzn. dla każdego morfizmu φ: $A \to I$ w kategorii $\mathcal{A}$ istnieje conajmniej jeden morfizm Ψ: $B \to I$ w kategorii $\mathcal{A}$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \arrow[dl, "\Psi"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

jest przemienny.
Jako kategorię $\mathcal{B}$ z definicji 6.1 weźmy podkategorię wszystkich monomorfizmów kategorii OA. Niech (M,G,F) będzie obiektem iniektywnym. Dla dowolnego monomorfizmu $(h,\varphi) \in \langle(M_1,G_1,F_1), (M_2,G_2,F_2)\rangle_{OA}$ i dowolnego morfizmu

$(h_1,\varphi_1) \in \langle(M_1,G_1,F_1), (M,G,F)\rangle_{OA}$ istnieje zatem morfizm

$(h_2,\varphi_2) \in \langle(M_2,G_2,F_2), (M,G,F)\rangle_{OA}$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} (M_1,G_1,F_1) \arrow[rr, "(h{,}\varphi)"] \arrow[dr, "(h_1{,}\varphi_1)"'] & & (M_2,G_2,F_2) \arrow[dl, "(h_2{,}\varphi_2)"] \\ & (M,G,F) & \end{tikzcd}$$

jest przemienny.
Przyjmując $M_1 = \{x\}$ otrzymujemy, że G jest grupą iniektywną. R. Baer (patrz [5]) pokazał, że grupa zerowa jest jednym obiektem iniektywnym. Zatem obiektami iniektywnymi w OA (ze względu na $\mathcal{B}$) są tylko obiekty postaci $(M,\{e\},F)$

$\bigvee_{x \in M} F(x,e) = x.$

LITERATURA

[1] M. Kucharzewski: Własności przestrzeni Kleina I, Skrypt Uczelniany Pol. Śl.

[2] A. Mika: Związki między komitantami i retrakcjami w kategorii obiektów abstrakcyjnych (w przygotowaniu).

[3] A. Mika: Separatory w kategorii obiektów abstrakcyjnych (w przygotowaniu).

[4] Z. Semadeni: Projectivity, injectivity and duality. Rozprawy matematyczne XXXV, 1963.

[5] Z. Semadeni, A. Wiweger: Wstęp do teorii kategorii i funktorów, PWN Warszawa 1978, s. 72-74.

ПРОЕКТИВНЫЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИИ АБСТРАКТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Р е з ю м е

В настоящей работе содержатся результаты, касающиеся вида проективных объектов, а также замечание, касающееся инъективных объектов в категории абстрактных объектов OA. Рассуждения проводятся таким образом, чтобы показать связьпонятия из теории категории - проективной объект - с понятиями теории абстрактных объектов, таких как транзитивность, или комитант.

Tłumaczył autor artykułu

PROJECTIVE OBJECTS OF ABSTRACT OBJECTS CATEGORY

S u m a r y

The results presented in the paper concern the form of projective objects (with a remark on the injective objects) in the category of abstract objects OA. The connections between categorial notion of projective object and the notions of the abstract objects theory (such as transitivity or concomitant) are indicated.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 4.X.1985

Recenzent
Doc. dr hab. Władysław Kulpa