ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52

Stefania KRASIŃSKA

UOGÓLNIONE TWIERDZENIE DOLEŻALA NA PRZYPADEK QUASIWIELOMIANÓW

Streszczenie. W pracy tej podane jest uogólnienie twierdzenia Doleżala na przypadek quasiwielomianów. Rozważam ten problem używając uogólniony ciąg Sturma i stosuję go do lokalizacji miejsc zerowych quasiwielomianów licznika i mianownika pewnego ułamka. Ułamek ten jest rezultatem pewnego problemu technicznego. Otrzymane twierdzenie ma następującą postać: Niech $\frac{P}{Q} \neq$ const, gdzie P, Q są quasiwielomianami o rzeczywistych współczynnikach, o dodatnich współczynnikach przy najwyższej potędze, przy czym stopień Q jest co najwyżej o jedność wyższy od stopnia P. Jeżeli:

1) $\frac{P}{Q}$ nie ma biegunów w półpłaszczyźnie Re $s>0$
2) bieguny $\frac{P}{Q}$ leżące na osi urojonej są jednokrotne o dodatnich residuach
3) Re $\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \geq 0$ dla każdego rzeczywistego ω, $\omega j \neq$ od pierwiastka Q

to

$\frac{P}{Q} \in \gamma\ell_0$

gdzie: $\gamma\ell_0$ zbiór wszystkich funkcji G(p) posiadających następujące własności:

a) G(p) jest quasiwielomianem o rzeczywistych współczynnikach nie mających bieguna w półpłaszczyźnie Re $p>0$.
b) Re $G(p)>0$ dla Re $p>0$.

W pracy tej otrzymują uogólnienie twierdzenia Doleżala na przypadek quasiwielomianów. Wykorzystuję w tym celu uogólniony ciąg Sturma stosując go do lokalizacji zer quasiwielomianiu licznika i mianownika poniższego wyrażenia, które jest wynikiem pewnego zagadnienia technicznego.
Dane jest wyrażenie:

$$\frac{E\frac{\sqrt{C_j}}{R_j}\sqrt{s}\left(e^{-1\sqrt{R_jC_js}} - e^{\sqrt{R_jC_js}(1-21_k)}\frac{R+Ls-\sqrt{\frac{R_j}{C_js}}}{R+Ls+\sqrt{\frac{R}{C_js}}}\right.}{1+\frac{R+Ls-\sqrt{\frac{R_j}{C_js}}}{R+Ls+\sqrt{\frac{R_j}{C_js}}}\cdot e^{-21_k\sqrt{R_jC_js}}}$$

Oznaczam licznik przez P, mianownik przez Q a następnie podstawiam $s=z^2$ do licznika i mianownika. Stąd otrzymuję quasiwielomiany licznika i mianownika w następującej postaci

$$Q(z,e^z) = Lz^3 e^{2l_k\sqrt{R_jC_j}z} + Lz^3 + Rze^{2l_k\sqrt{R_jC_j}z} + Rz - \sqrt{\frac{R_j}{C_j}}\, e^{2l_k\sqrt{R_jC_j}z} + \sqrt{\frac{R_j}{C_j}} \quad (2)$$

$$P(z,e^z) = EL\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\, z^4 \left(e^{-l\sqrt{R_jC_j}z} - e^{\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)z}\right) + ER\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\, z^2 \left(e^{-l\sqrt{R_jC_j}z} - e^{\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)z}\right) + Ez\left(e^{-l\sqrt{R_jC_j}z} - e^{\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)z}\right) \quad (3)$$

Jak widać obydwa powyższe quasiwielomiany posiadają człon główny a więc zachodzą dla nich twierdzenia Pontriagina o liczbie pierwiastków rzeczywistego quasiwielomianu. Stosując uogólniony ciąg Sturma do lokalizacji zer quasiwielomianu mianownika $Q(z,e^z)$, oraz licznika $P(z,e^z)$, następnie rozdzielając w nich części rzeczywiste i urojone [5] przez podstawienie $z=j\omega$ i korzystając z zależności $e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$ otrzymujemy $Q(j\omega,e^{j\omega}) = F_m(\omega) + jE_m(\omega)$, $P(j\omega,e^{j\omega}) = F_l(\omega) + j\,E_l(\omega)$ gdzie dla mianownika

$$F_m(\omega) = \omega^3 L \sin 2l_k\sqrt{R_jC_j}\omega - \omega R \sin 2l_k\sqrt{R_jC_j}\omega + \sqrt{\frac{R_j}{C_j}}\left(1 - \cos 2l_k\sqrt{R_jC_j}\right) \quad (4)$$

$$E_m(\omega) = -\omega^3 L\left(1 + \cos 2l_k\sqrt{R_jC_j}\omega + \omega R\left(1+\cos 2l_k\sqrt{R_jC_j}\omega\right)\sqrt{\frac{R_j}{C_j}} \sin 2l_k\sqrt{R_jC_j}\omega\right. \quad (5)$$

i dla licznika

$$F_l(\omega) = \omega^4 EL\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\left[\cos l\sqrt{R_jC_j}\omega - \cos\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega + \omega^2 ER\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\,\cdot\right.$$
$$\cdot \left[-\cos l\sqrt{R_jC_j}\omega + \cos\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right] + E\left[\sin l\sqrt{R_jC_j}\omega + \right. \quad (6)$$
$$\left. + \sin\sqrt{R_jC_j}\,(1-2l_k)\omega\right]$$

$$E_l(\omega) = -\omega^4 EL\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\left[\sin l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \sin\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right] + \omega^2 ER\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\,\sin l\sqrt{R_jC_j}\,\omega +$$
$$+ \sin\sqrt{R_jC_j}\,(1-2l_k)\omega + \omega E\cos l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \cos\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\,\omega\Big] \quad (7)$$

Ponieważ stopień $F_m(\omega)$ ze względu na swobodne ω jest $\geqslant$ od stopnia $E_m(\omega)$ to zgodnie z([1]) $V_o=-F_m(\omega)$ a $V_1=E_m(\omega)$. Tworzymy rekurencyjnie ciąg V_i, i = = 1,2,...,n za pomocą wzoru $C_{i-1}^2 V_{i-1} = V_i K_i - V_{i+1}$, gdzie C_{i-1}^2 jest parzystą potęgą współczynnika przy najwyższej potędze ω, V_i dobrana tak, aby w wyniku dzielenia funkcji $C_{i-1}^2\,V_{i-1}$ przez V_i traktowanych jako wielomiany od ω nie powstały funkcje ułamkowe. K_i jest wynikiem tego dzielenia, a V_{i+1} jest resztą wziętą ze zmienionym znakiem. Ciąg $V_o, V_1, \ldots V_n$ nazywamy uogólnionym ciągiem Sturma.

W naszym przypadku dla mianownika mamy uogólniony ciąg Sturma V_o, V_1,0, gdzie

$$V_{m_o}(\omega) = -\omega^3 L\sin 2l_k\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \omega R\sin 2l_k\sqrt{R_jC_j}\,\omega - \sqrt{\frac{R_j}{C_j}}(1-\cos 2l_k\sqrt{R_jC_j}\,\omega)$$

$$V_{m_1}(\omega) = -\omega^3 L(1+\cos 2l_k\sqrt{R_jC_j}\,\omega) + \omega R(1+\cos 2l_k\sqrt{R_jC_j}\,\omega) - \sqrt{\frac{R_j}{C_j}}\sin 2l_k\sqrt{R_jC_j}\,\omega$$

a dla licznika $V_{l_o}, V_{l_1}, V_{l_2}, 0$

gdzie

$$V_{l_o}(\omega) = -\omega^4 EL\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\left[\cos l\sqrt{R_jC_j}\,\omega - \cos\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right] - \omega^2 ER\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\left[-\cos l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \cos\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right] - \omega E\left[\sin l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \sin\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right]$$

$$V_{l_1}(\omega) = -\omega^4 EL\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\left[\sin l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \sin\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega + \omega^2 ER\sqrt{\frac{C_j}{R_j}}\right[\sin l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \sin\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right] + \omega E\left[\cos l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \cos\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right]$$

$$V_{l_2}(\omega) = \omega E 2\sin\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\left[\sin l\sqrt{R_jC_j}\,\omega + \sin\sqrt{R_jC_j}(1-2l_k)\omega\right]^2$$

Ponieważ $V_{m_2}(\omega) = 0$ to $V_{m_o}(\omega)$ i $V_{m_1}(\omega)$ mają wspólny pierwiastek (jest on pojedynczy), a więc można go obliczyć
oznaczam $V_{m_o}(\omega) - V_{m_1}(\omega) = W_m(\omega)$

Szukam $W_m(\omega) = 0$. Można zauważyć, że przy dostatecznie dużym k miejsca zerowe $W_m(\omega)$ znajdują się w przedziałach $(k\pi-\varepsilon, k\pi+\varepsilon)$ ([1]s.314).

Do znajdywania pierwiastków równania $W_m(\omega) = 0$ stosujemy metodę przybliżoną ([3] s. 288) oraz bez zmniejszania ogólności i zgodnie z warunkami fizycznymi problemu przyjmujemy wszystkie parametry równe jedności a $l_k = \frac{3}{2}$. Rozpatruję osobno przypadek dla k parzystych i dla k nieparzystych.

dla k=0,2,4,...

$$\omega_{m_p} = k\pi + \frac{2\left[(k\pi)^3 - k\pi\right]}{3\left[(k\pi)^3 - 2(k\pi)^2 - k\pi - 1\right]}$$

dla k = 1,3,5,...

$$\omega_{m_n} = k\pi + \frac{2}{3(k\pi)^3 - 3k\pi - 5}$$

Stosując analogiczne metody dla licznika otrzymuję

dla k = 0,2,4,...

$$\omega_{l_n} = k\pi$$

dla k = 1,3,5,...

$$\omega_{l_n} = k\pi + \frac{2\pi}{3(k\pi)^4 - (k\pi)^2(1 + 2k\pi)}$$

Porównując wzajemne położenie zer licznika i mianownika można łatwo zauważyć, że zera mianownika dla k parzystych są przesunięte w stosunku do zer licznika i nie pokrywają się nigdzie z wyjątkiem punktu k=0 a więc przeplatają się wzajemnie. Dla k nieparzystych zera licznika i mianownika również przeplatają się wzajemnie a w nieskończoności pokrywają się.

Można więc uogólnić twierdzenie Doleżala ([2] s. 6) na przypadek quasiwielomianów.

Twierdzenie

Niech $\frac{P}{Q} \neq$ const, gdzie P,Q są quasiwielomianami o rzeczywistych współczynnikach, o dodatnich współczynnikach przy najwyższej potędze, przy czym stopień Q jest co najwyżej o jedność wyższy od stopnia P.

Jeżeli 1) $\frac{P}{Q}$ nie ma biegunów w półpłaszczyźnie Re$s>0$

2) bieguny $\frac{P}{Q}$ leżące na osi urojonej są jednokrotne o dodatnich residuach

3) Re $\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \geqslant 0$ dla każdego ω, $j\omega \neq$ pierwiastka Q

to

$\frac{P}{Q} \in \mathcal{H}$.

gdzie:

$\mathcal{M}_0$ zbiór wszystkich funkcji G(p) posiadających następujące własności:

a) G(p) jest quasiwielomianem o rzeczywistych współczynnikach nie mającym bieguna w półpłaszczyźnie Rep >0

b) ReG(p) >0 dla Re p >0.

LITERATURA

[1] N.G. Czebotarew, N.N. Meiman: Problema Routh'a - Hurwitza dla polinomow i całych funkcji, Trudy Matematiczeskovo Instituta, XXVI, AN SSSR Moskwa-Leningrad 1949.

[2] Vaclav Doleżal: O pewnych kryteriach monotoniczności przebiegów przejściowych w układach liniowych. Materiały z III Sympozjum Teorii Obwodów i Teorii Informacji, Szklarska Poręba 1959.

[3] G.M. Fichtenholz: Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom II, PWN, Warszawa 1966.

[4] Henryk Górecki: Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem. WNT, Warszawa 1971.

[5] Stefania Krasińska: Przebiegi przejściowe i momenty przełączania dla układu z parametrami rozłożonymi i pewnymi warunkami brzegowymi. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences Warsaw, 1981. (Dissertation).

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДОЛЕЖАЛЯ НА СЛУЧАЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Р е з ю м е

В работе дано обобщение теоремы "Долежаля" на случай квазимногочленов. С этой целью рассматривается обобщенная последовательность Штурма и используется она для локализации нулей квазимногочленов числителя и знаменателя данной дроби. Дробь эта является результатом исследования некоторой технической проблемы.

Полученная теорема имеет следующий вид:

Пусть $\frac{P}{Q} \neq$ const, где P, Q квазимногочлены с действительными коэффициентами с положительными коэффициентами при наибольшей степени при чем степень Q в крайнем случае больше на один степени P.

Если

1 $\frac{P}{Q}$ не имеет полюсов в полуплоскости Re s > 0

2 полюса $\frac{P}{Q}$ лежащие на мнимой оси однократны с положительными резидуумами

3 Re $\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \geq 0$ для всякого действительного ω, $j\omega \neq$ корня Q

THE GENERALISATION OF DOLEŻAL'S THEOREM IN THE QUASIPOLINOMIALS CASE

S u m m a r y

In this paper is given the generalisation of Doleżal's theorem in the quasipolinomials case.

I consider this problem using the general Sturm's sequence and appling it to the localisation of zero locus quasipolynomials of the numerator and determinator of some fraction. This fraction is the result of some technical problem. Received theorem has the following form: Let $\frac{P}{Q} \neq$ const, Where P,Q are quasipolinomials having the real coefficients, having the positive coefficients at the most highest power, while degree of Q is in the highest case by one higher than the degree P.

If 1) $\frac{P}{Q}$ has not any poles in the plaine Re $s > 0$

2) The poles $\frac{P}{Q}$ laying on the imaginary axis are single having positive residues.

3) $\mathrm{Re}\,\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \geqslant 0$ for real ω, $j\omega \neq$ root Q

then

$$\frac{P}{Q} \in \mathcal{H}_o$$

where: $\mathcal{H}_0$ the set of all functions G(p) having following properties:

a) G(p) is the quasipolinominal having real coefficients and not having any pole in the semi-plane Re $p > 0$.

b) Re $G(p) > 0$ for Re $p > 0$.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 12.X.1984

Recenzent
Prof. zw. dr inż. Henryk Górecki