ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Waldemar HOŁUBOWSKI

O GRUPACH STABILNOŚCI I NIEEFEKTYWNOŚCI OBIEKTÓW ABSTRAKCYJNYCH

Streszczenie. W pracy tej rozpatruje się grupy stabilności i nieefektywności podzbiorów włókna obiektu abstrakcyjnego. W punkcie pierwszym podane są wzory ustalające, jak zmieniają się grupy stabilności i nieefektywności przy tworzeniu nowych obiektów abstrakcyjnych: obiektu częściowego, podobiektu, G - produktu i produktu obiektów (wniosek 1 i 2). Ponadto pokazano, że przy znajomości rozkładu włókna obiektu abstrakcyjnego na włókna tranzytywne badanie grup stabilności podzbiorów włókna sprowadza się do badania grup stabilności pewnych ściśle wyznaczonych podzbiorów włókien tranzytywnych (wniosek 4). W punkcie drugim pokazano, że wszystkie grupy sprzężone do grup stabilności i nieefektywności podzbiorów włókna są odpowiedno grupami stabilności i nieefektywności obrazów tych podzbiorów przy przekształceniach generowanych przez elementy grupy i każde takie przekształcenie wyznacza grupy sprzężone. W ostatnim punkcie podana jest aproksymacja z dołu grupy nieefektywności dowolnego podzbioru włókna i grupy stabilności podzbiorów szczególnej postaci przez grupę nieefektywności podzbioru jednoelementowego.

WSTĘP

Obiektem abstrakcyjnym (krócej - obiektem) nazywamy (por. [3]) trójkę postaci

$$(X, G, \cdot), \tag{1}$$

gdzie X jest niepustym zbiorem zwanym włóknem obiektu (1), G jest grupą z multiplikatywną (bez kropki) notacją działania i elementem neutralnym e, a kropka oznacza działanie elementów grupy G na elementach włókna X o wartościach w X spełniające następujące warunki:

$$g_1(g_2.x) = (g_1g_2).x \quad \text{dla} \quad x \in X \quad \text{i} \quad g_1, g_2 \in G, \tag{2}$$

$$e.x = x \quad \text{dla} \quad x \in X . \tag{3}$$

Niech F będzie podgrupą grupy G (symbolicznie: $F \leq G$), N niepustym podzbiorem zbioru X spełniającym następujący warunek niezmienniczości

$$g \cdot N = N \quad \text{dla} \quad g \in G , \tag{4}$$

a trójka

$$(Y, H, \bullet) \tag{5}$$

obiektem o włóknie Y, grupie H i działaniu "•". Łatwo sprawdzić, że wówczas obiektami są trójki:

$$(X, F, \cdot) \tag{6}$$

$$(N, G, \cdot) \tag{7}$$

$$(X\ Y, G\times H, \Delta) \tag{8}$$

$$(X\ Y, G, \square) \quad \text{(jeśli w (5) mamy } H = G), \tag{9}$$

gdzie kropki występujące w (6) i (7) są restrykcjami (zacieśnieniami) działania występującego w (1) odpowiednio do zbiorów $F\times X$ i $G\times N$, a działania w (8) i (9) określone są następująco:

$$(g, h)\, \Delta\, (x, y) = (g\cdot x, h\cdot y), \tag{10}$$

$$g\, \square\, (x, y) = (g\cdot x, g\cdot y) \quad \text{dla} \quad x\in X,\ y\in Y,\ g\in G,\ h\in H. \tag{11}$$

Obiekty (6) i (7) nazywamy odpowiednio podobiektem i obiektem częściowym obiektu (1), a obiekty (8) i (9) odpowiednio produktem i G produktem obiektów (1) i (5).

Z określenia obiektu (1) wynika, że relacja "$\sim$" określona w X wzorem

$$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists g\in G \quad (x_2 = g\cdot x_1)$$

określa rozkład

$$\{X_s\}_{s\in S} \tag{12}$$

włókna X. Elementy tego rozkładu nazywamy włóknami tranzytywnymi obiektu (1).

Niech $K\subseteq G$ i $A\subseteq X$. Przyjmujemy następujące określenia:

$$S(A) = \begin{cases} \{g\in G;\ g\cdot A = A\}, & \text{gdy } A \neq \emptyset \\ G, & \text{gdy } A = \emptyset, \end{cases} \tag{13}$$

$$\mathcal{H}(A) = \begin{cases} \{g \in G \,;\, g \cdot x = x \quad \text{dla} \quad x \in A\}, & \text{gdy} \quad A \neq \emptyset, \\ G, \quad \text{gdy } A = \emptyset, & \end{cases} \tag{14}$$

$$Z_G(K) = \begin{cases} \{g \in G \,;\, g\,k = k\,g \quad \text{dla} \quad k \in K\}, & \text{gdy} \quad K \neq \emptyset, \\ G, \quad \text{gdy } K = \emptyset, & \end{cases} \tag{15}$$

$$N_G(K) = \begin{cases} \{g \in G \,;\, g\,K = K\,g\}, & \text{gdy} \quad K \neq \emptyset, \\ G, \quad \text{gdy } K = \emptyset. & \end{cases} \tag{16}$$

Oznaczmy przez $gp\langle K \rangle$ wspólną część wszystkich podgrup grupy G zawierających zbiór K. Z przyjętych określeń wynikają następujące własności:

$$\mathcal{H}(A) \leqslant \mathcal{G}(A) \leqslant G \quad \text{dla} \quad A \subseteq X, \tag{17}$$

$$A \subseteq B \subseteq X \Longrightarrow \mathcal{H}(A) \geqslant \mathcal{H}(B), \tag{18}$$

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{G}(x) \quad \text{dla} \quad e \in X, \tag{19}$$

(piszemy krócej $\mathcal{H}(x)$, $\mathcal{G}(x)$ zamiast $\mathcal{H}(\{x\})$, $\mathcal{G}(\{x\})$),

$$Z_G(K) \leqslant N_G(K) \leqslant G, \quad gp\langle K \rangle \leqslant G \quad (\text{por. } [1], [7]). \tag{20}$$

Grupy $\mathcal{G}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$ nazywamy odpowiednio grupą stabilności i nieefektywności zbioru $A \subseteq X$ dla obiektu (1). Grupy $Z_G(K)$ i $N_G(K)$ nazywamy odpowiednio centralizatorem i normalizatorem zbioru K w grupie G.

1. GRUPY STABILNOŚCI I NIEEFEKTYWNOŚCI DLA OBIEKTÓW POCHODNYCH

Związki między grupami stabilności i nieefektywności dla danego obiektu, a ich odpowiednikami dla jego podobiektu, obiektu częściowego oraz G - - produktu i produktu danych obiektów podają następujące wnioski wynikające z przyjętych określeń:

W n i o s e k 1

1° Grupa stabilności (nieefektywności) zbioru $A \subseteq X$ dla podobiektu (6) obiektu (1) jest wspólną częścią grupy F i grupy stabilności (nieefektywności) zbioru A dla obiektu (1).

2° Grupa stabilności (nieefektywności) zbioru $C \subseteq N$ dla obiektu częściowego (7) jest równa grupie stabilności (nieefektywności) zbioru C dla obiektu (1).

W n i o s e k 2.

1^0 Jeśli $\emptyset \neq A \subseteq X$ i $\emptyset = D \subseteq Y$, to grupa stabilności (nieefektywności) zbioru $A \times D$ dla G - produktu (9) obiektów (1) i (5) jest wspólną częścią grup stabilności (nieefektywności) zbioru A dla obiektu (1) i zbioru D dla obiektu (5).

2^0 Jeśli $\emptyset \neq A \subseteq X$ i $\emptyset \neq D \subseteq Y$, to grupa stabilności (nieefektywności) zbioru $A \times D$ dla produktu (8) obiektów (1) i (5) jest równe iloczynowi kartezjańskiemu grup stabilności (nieefektywności) zbioru A dla obiektu (1) i zbioru D dla obiektu (5).

Dowód:

Ponieważ dowody wszystkich ośmiu tez zawartych we wnioskach 1 i 2 są podobne i opierają się wyłącznie na przyjętych określeniach, więc dla przykładu udowodnimy tylko tezę 1^0 wniosku 2 dla grupy nieefektywności. Korzystając z (11) i (14) mamy:

$$\{g \in G ;\ g \,\square\, (x, y) = (x, y) \quad \text{dla} \quad (x, y) \in A \times D\} =$$

$$= \{g \in G ;\ (g \cdot x, g \circ y) = (x, y) \quad \text{dla} \quad x \in A, \quad y \in D\} =$$

$$= \{g \in G ;\ (g \cdot x = x) \quad \text{dla} \quad x \in A \quad \text{i} \quad g \circ y = y \quad \text{dla} \quad y \in D\} =$$

$$= \{g \in G ;\ g \cdot x = x \quad \text{dla} \quad x \in A\} \cap \{g \in G ;\ g \circ y = y \quad \text{dla} \quad y \in D\}$$

co kończy dowód.

Również z przyjętych określeń wynika następujący wniosek:

W n i o s e k 3

Jeśli $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ jest niepustą rodziną podzbiorów włókna obiektu (1), to

$$\mathcal{S}(\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha) \quad \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{S}(X_\alpha) \quad (\text{por. } [3]), \tag{21}$$

$$\mathcal{H}(\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{H}(X_\alpha) \quad (\text{por. } [7]), \tag{22}$$

$$\mathcal{H}(\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha) \geqslant gp\left\langle \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{H}(X_\alpha) \right\rangle. \tag{23}$$

Poniższy przykład pokazuje, że w (21) i (23) równość nie musi zachodzić.

Niech S_n będzie grupą permutacji zbioru skończonego $X_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, a $(X_n, S_n, *)$ obiektem z działaniem "$*$" takim, że $g * a_i = g(a_i)$, gdzie $g \in S_n$, $a_i \in X_n$. Jeśli $n \geqslant 3$, to transpozycja (a_1, a_2) należy do $\mathcal{H}(\{a_1, a_3\} \cap \{a_2, a_3\})$ i nie należy do $gp\langle \mathcal{H}(\{a_1, a_3\}) \cup \mathcal{H}(\{a_2, a_3\})\rangle$. Jeśli $n \geqslant 2$, to transpozycja (a_1, a_2) należy do $\mathcal{S}(\{a_1\} \cup \{a_2\})$ i nie należy do $\mathcal{S}(a_1) \cap \mathcal{S}(a_2)$.

Następujący lemat dotyczy równości w (21):

Lemat 1

Jeśli rodzina $\{N_t\}_{t\in T}$ jest pokryciem włókna X obiektu (1) podzbiorami niezmienniczymi (tzn. $X = \bigcup_{t\in T} N_t$ i N_t spełnia (4) dla $t\in T$, to

$$\mathcal{G}(A) = \bigcap_{t\in T} \mathcal{G}(A\cap N_t) \quad \text{dla} \quad A\subseteq X . \tag{24}$$

Dowód:

Pokażemy najpierw, że

$$g\circ(A\cap N_t) = A\cap N_t , \quad \text{dla} \quad g\in\mathcal{G}(A) \quad \text{i} \quad t\in T. \tag{25}$$

Istotnie, dla $g\in\mathcal{G}(A)$ i $t\in T$ jest $g\circ(A\cap N_t)\subseteq A$, a wobec niezmienniczości zbiorów N_t jest także $g\circ(A\cap N_t)\subseteq N_t$, czyli

$$g\circ(A\cap N_t)\subseteq A\cap N_t .$$

Dla dowodu inkluzji przeciwnej ustalmy $x\in A\cap N_t$ i połóżmy $y=g^{-1}x$. Wtedy $y\in A\cap N_t$ i jest $x = g\circ y$, co oznacza, że $x\in g\circ(A\cap N_t)$ i kończy dowód równości (25). Równość ta oznacza, że $\mathcal{G}(A)\leqslant \mathcal{G}(A\cap N_t)$ dla $t\in T$ czyli $\mathcal{G}(A)\leqslant \bigcap_{t\in T} \mathcal{G}(A\cap N_t)$. Inkluzję przeciwną, a zarazem równość (24) otrzymujemy z (24) otrzymujemy z (21) uwzględniając równość $A = \bigcup_{t\in T} (A\cap N_t)$, wynikającą z założenia $A\subset X = \bigcup_{t\in T} N_t$.

Ponieważ rodzina (12) włókien tranzytywnych obiektu (1) jest szczególnym pokryciem jego włókna X zbiorami niezmienniczymi, więc z lematu 1 wynika następujący wniosek:

W n i o s e k 4

Jeśli $\{X_1\}_{s\in S}$ jest rodziną (12) włókien tranzytywnych obiektu (1), to

$$\mathcal{G}(A) = \bigcap_{s\in S} \mathcal{G}(A\cap X_s) \quad \text{dla} \quad A\subseteq X .$$

2. GRUPY STABILNOŚCI I NIEEFEKTYWNOŚCI ZBIORÓW PRZEKSZTAŁCONYCH

Ustalimy teraz związki pomiędzy grupami stabilności i nieefektywności podzbiorów włókna X obiektu (1) i ich obrazów poprzez przekształcenia generowane przez elementy grupy G. Ograniczymy się przy tym do przypadku, gdy obiekt (1) jest tranzytywny, tzn. taki, że rodzina (12) jest jednoelementowa. Ze względu na (23) i wniosek 4 ograniczenie to nie jest istotne w przypadku, gdy znany jest rozkład (12) dla obiektu nietranzytywnego.

Następny lemat opisuje najprostsze związki tego typu:

Lemat 2

Jeśli obiekt (1) jest tranzytywny, to dla $A \subseteq X$ i $g \in G$ mamy:

$$(g\ A) = g\ \ (A)\ g^{-1}, \tag{26}$$

$$(g\ A) = g\ \ (A)\ g^{-1}. \tag{27}$$

Dowód:

Dla $h \in \mathcal{G}(A)$ mamy $g\ h\ g^{1} \in (g \cdot A)$ dla dowolnego $g \in G$, więc $g\ \mathcal{G}(A)\ g^{-1} \subseteq \mathcal{G}(g\ A)$. Jeśli $k \in \mathcal{G}(g \cdot A)$, to $k\ g \cdot A = g \cdot A$, skłd $g^{-1} k\ g \cdot A = A$, a więc $g^{-1} \mathcal{G}(g \cdot A)\ g \subseteq \mathcal{G}(A)$.

Jeśli $k \in \mathcal{H}(A)$, to dla $x \in A$ mamy $k \cdot x = x$, skąd $g\ k\ g^{-1}(g \cdot x) = g \cdot x$, gdzie $g \in G$. Zatem $g\,\mathcal{H}(A) g^{-1} \subseteq \mathcal{H}(g \cdot A)$. Jeśli $h \in \mathcal{H}(g \cdot A)$, to dla $x \in A$ mamy $h\ g \cdot x = g \cdot x$, skąd $g^{-1} h\ g \cdot x = x$, a zatem $g^{-1}\mathcal{H}(g \cdot A)\ g \subseteq \mathcal{H}(A)$.

Z powyższego lematu i z określenia (16) wynika następujący:

W n i o s e k 5

Przy założeniach lematu 2 mamy:

$$\mathcal{G}(g\ A) = \mathcal{G}(A) \Longleftrightarrow g \in N_G(\mathcal{G}(A)), \tag{28}$$

$$\mathcal{H}(g\ A) = \mathcal{H}(A) \Longleftrightarrow g \in N_G(\mathcal{H}(A)). \tag{29}$$

Bezpośrednio z wniosku 3 i lematu 2 otrzymujemy też:

W n i o s e k 6

Przy założeniach lematu 2 dla $K \leq G$ mamy:

$$\mathcal{G}(K \cdot A) \geqslant \bigcap_{g \in K} g\ \mathcal{G}(A)\ g^{-1}. \tag{30}$$

Jeśli ponadto $K \subseteq N_G(\mathcal{G}(A))$, to $\mathcal{G}(K \cdot A) \geqslant \mathcal{G}(A)$.

$$\mathcal{H}(K \cdot A) = \bigcap_{g \in K} g\,\mathcal{H}(A)\ g^{-1}\ . \tag{31}$$

Jeśli ponadto $K \subseteq N_G(\mathcal{H}(A))$, to $\mathcal{H}(K \cdot A) = \mathcal{H}(A)$.

3. GRUPY STABILNOŚCI I NIEEFEKTYWNOŚCI PODZBIORÓW I ICH ELEMENTÓW

Jeśli X_s jest włóknem tranzytywnym obiektu (1), te $X_s = G \cdot x_s$, gdzie x_s jest jest dowolnym ustalonym elementem X_s (por. [5] s. 36). Wynika stąd, że każdy podzbiór włókna tranzytywnego możemy przedstawić w postaci $G_s . x_s$, gdzie $G_s \subseteq G$, $x_s \in X_s$, i na odwrót, każdy zbiór postaci $G_s \cdot x_s$, gdzie $G_s \subseteq G$ i $x_s \in X$, jest zawarty w pewnym włóknie tranzytywnym. Zatem każdy podzbiór włókna X obiektu (1) ma postać $\bigcup_s G_s x_s$, gdzie $G_s \subseteq G$, $x_s \in X_s$ i s należy do podzbioru P zbioru wskaźników S w (12).

Zachodzi następujące:

Twierdzenie 1

Jeśli obiekt (1) jest tranzytywny oraz $K \subseteq G$ i $x \in X$, to

$$\mathcal{H}(K \cdot x) \geqslant Z_G(K) \cap \mathcal{H}(x) . \tag{32}$$

Dowód:

Jeśli $g \in Z_G(K) \cap \mathcal{H}(x)$, to dla dowolnego $k \in K$ mamy $g\, k \cdot x = k\, g \cdot x = k \cdot x$, zatem $g \in \mathcal{H}(K \cdot x)$.

Korzystając z (22) można przedstawić $\mathcal{H}(K \cdot x)$ jako iloczyn grup nieefektywności wszystkich podzbiorów jednoelementowych zbioru $K \cdot x$, w ilości równej mocy zbioru K. Powyższe twierdzenie daje pewną aproksymację z dołu grupy $\mathcal{H}(K \cdot x)$, która wymaga znalezienia tylko dwóch grup, co w pewnych przypadkach może się okazać łatwiejsze do wykonania z punktu widzenia rachunków.

Poniższy przykład pokazuje, że w (32) równość nie musi zachodzić. Niech $(X_3, S_3, *)$ będzie obiektem określonym w paragrafie 1. Niech $K = \{(a_1, a_2, a_3)\}$ i $x = a_1$. Wówczas $K \cdot x = \{a_2\}$. Mamy $Z_G(K) = gp\langle K \rangle$, $\mathcal{H}(x) = gp\langle\langle (a_2, a_3)\rangle$ i $\mathcal{H}(K \cdot x) = gp\langle (a_1, a_3)\rangle$. Zatem w przypadku $\mathcal{H}(K \cdot x)$ nie jest równe $\mathcal{H}(x) \cap Z_G(K) = \{e\}$.

W n i o s e k 7

Jeśli przy założeniach twierdzenia 1 istnieje $k \in K$ takie, że $k \cdot x = x$, to $\mathcal{H}(x) \geqslant \mathcal{H}(k \cdot x) \geqslant Z_G(K) \cap \mathcal{H}(x)$.

W n i o s e k 8

Jeśli przy założeniach twierdzenie 1 i wniosku 7 zachodzi warunek

$$\mathcal{H}(x) \subseteq Z_G(K), \quad \text{to} \quad \mathcal{H}(K \cdot x) = \mathcal{H}(x).$$

W n i o s e k 9

Jeśli $K \subseteq X$ i spełnione są założenia twierdzenia 1, to

$$\mathcal{H}(K \cdot X) \geqslant Z_G(K) \cap \mathcal{H}(X).$$

W dowodach powyższych wniosków oprócz twierdzenia 1 wykorzystuje się również wzory (18) i (22).

Udowodnimy teraz zbliżone rezultaty dla grupy stabilności.

Twierdzenie 2

Jeśli obiekt (1) jest tranzytywny, $x \in X$ i $F \leqslant G$, to

$$\mathfrak{S}(F \cdot x) \geqslant N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x) \geqslant F\,, \tag{33}$$

gdzie

$$F\mathcal{H}(x) = \{f\,h\,;\ f \in F \text{ i } h \in \mathcal{H}(x)\}\,.$$

Dowód:

Jeśli $g \in N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x)$, to $g = f\,h$, gdzie $f \in F$ i $h \in \mathcal{H}(x)$. Zatem $g\,F \cdot x = F\,g \cdot x = F\,f\,h \cdot x = F\,f \cdot x = F\,x$, skąd $g \in \mathfrak{S}(F \cdot x)$. Zachodzi więc inkluzja $\mathfrak{S}(F \cdot x) \supseteq N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x)$.

Ponieważ $N_G(F) \geqslant F$, więc $N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x) \supseteq F$. Wystarczy jeszcze dowieść, że $R = N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x)$ jest podgrupą grupy G. Niech $r, r' \in R$. Wówczas $r = f\,h$, $r' = f'\,h'$, gdzie $f, f' \in F$ i $h, h' \in (x)$. Mamy więc $r\,r' = f\,h\,f'\,h' = f''f\,h\,h'$, gdzie $f'' \in F$, bo $f\,h \in N_G(F)$, zatem $r\,r' \in R$.

Ponieważ $N_G(F) \geqslant F$ mamy $f \in N_G(F)$, a to pociąga $h \in N_G(F)$. Mamy wówczas $r^{-1} = h^{-1}\,f^{-1} = f_1^{-1}\,h^{-1}$, gdzie $f_1 \in F$, zatem $r^{-1} \in R$ co kończy dowód.

Z (21) i (33) otrzymujemy:

W n i o s e k 10

Przy założeniach twierdzenia 2 dla $A \subseteq X$ zachodzi nierówność

$$\mathfrak{S}(F \cdot A) \geqslant N_G(F) \cap F\,\Big(\bigcap_{x \in A} \mathcal{H}(x)\Big).$$

W n i o s e k 11

Jeśli przy założeniach twierdzenia 2 obiekt (1) jest prostotranzytywny (tzn. dla dowolnych x, $y \in X$ istnieje dokładnie jedno $g \in G$ takie, że $x = g \cdot y$) i dla $x \in X$ zachodzi związek $\mathfrak{S}(F\,x) \subseteq F\mathcal{H}(x)$, to

$$\mathfrak{S}(F \cdot x) = N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x).$$

Dowód:

Niech $g \in \mathfrak{S}(F \cdot x)$. Wówczas $g = f\,\bar{g}$, gdzie $f \in F$ i $\bar{g} \in \mathcal{H}(x)$, oraz $g\,F \cdot x = F \cdot x$. Z drugiej strony mamy $F \cdot x = F\,f \cdot x\,f\,\bar{g} \cdot x$, skąd $g \in N_G(F)$.

Twierdzenie 2 daje zbliżoną aproksymację z dołu grupy $\mathcal{G}(F\cdot x)$ do tej dla $\mathcal{H}(K\cdot x)$ w (32), ale tylko w przypadku gdy F jest podgrupą G. Takie aproksymacje obu grup można stosować przy szukaniu reperów i klasyfikowaniu obiektów (por. [3] i [4]).

LITERATURA

[1] M.I. Kargapołow, J.I. Mierzlakow: Podstawy teorii grup. PNW, Warszawa 1976.

[2] M. Kucharzewski: Elementy teorii obiektów geometrycznych. skrypt Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1969.

[3] M. Kucharzewski: Własności przestrzeni Kleina I. skrypt Politechniki Śląskiej, Gliwice 1985.

[4] M. Kucharzewski, A. Zajtz: Klassifikation der linearen homogen geometrischen Objekte, deren Komponentenzahl die Dimension des Raumes nicht übertrifft. Coll. Math. 17 (1967), 185-192.

[5] S. Lang: Algebra. PWN, Warszawa 1973.

[6] M.A. Najmark, A.I. Stern: Theory of group representation, Grund. der math. Wissenchaften. B. 246, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[7] H. Wielandt: Finite permutation groups. Academic Press, New York and London 1964.

О ГРУППАХ СТАБИЛЬНОСТИ И НЕЭФФЕКТИВНОСТИ АБСТРАКТНЫХ ОБЬЕКТОВ

Резюме

В этой работе исследуются группы стабильности и неэффективности абстрактных объектов троек $^{(*)}$ $(X,G,\cdot)$, где X произвольное множество, G- группа, а "$\cdot$" действие G на X слева, удовлетворяющее (2) и (3). Приведено тождества определяющие трансформирование групп стабильности $\mathcal{G}(A) = \{g \in G; gA = A\}$ и неэффективности $\mathcal{H}(A) = \{g \in G; \forall x \in A(gx=x)\}$, где $A \subseteq X$, при создании новых абстрактных объектов подобъекта, частного объекта, G-продукта и продукта объектов . Работа содержит также полное описание групп сопряженных с $\mathcal{G}(A)$ и $\mathcal{H}(A)$.

Основными являются:

Теорема 1:
Если объект (*) транзитивен, $K \subseteq G$ и $x \in X$, то $\mathcal{H}(K\cdot x) \geqslant Z_G(K) \cap \mathcal{H}(x)$, где $Z_G(K)$ централизатор K в G.

Теорема 2:
Если объект (*) транзитивен, $x \in X$ и $F \leqslant G$, то $\mathcal{G}(F\cdot x) \geqslant N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x) \geqslant F$, где, $N_G(F)$ нормализатор F в G.

Этими теоремами исследование групп $\mathcal{H}(A)$ и $\mathcal{G}(A)$ сводится при некоторых множествах A к исследованию групп неэффективности одноэлементных подмножеств.

ON THE GROUPS OF STABILITY AND NONEFFECTIVITY OF ABSTRACT OBJECTS

S u m a r y

In this paper we investigate the groups of stability and noneffectivity of abstract object (1) (X,G,), where X is any set, G is any group and "•" is a function $\cdot : G \times X \to X$ for which (2) and (3) holds ("•" is an action of the group G on the set X).

We mention some identities, which specify transformation of the groups of stability $\mathcal{G}(A) = \{g \in G \; ; \; g \cdot A = A\}$ and noneffectivity $\mathcal{H}(A) = \{g \in G \; ; \; \forall x \in A (g \cdot x = x)\}$ $(A \subseteq X)$ at a construction of another abstract objects (subobject, partialy object, G - product and product of objects).

Next we describe all subgroups of G conjugate to $\mathcal{G}(A)$ and $\mathcal{H}(A)$.

The basic theorems are:

Theorem 1

If object (1) is transitive and $K \subseteq G$, $x \in X$, then

$$\mathcal{H}(K \cdot x) \geqslant Z_G(K) \cap \mathcal{H}(x),$$

where $Z_G(K)$ is a centraliser of K in G.

Theorem 2

If object (1) is transitive, $x \in X$ and $F \leqslant G$, then

$$\mathcal{G}(F \cdot x) \geqslant N_G(F) \cap F\mathcal{H}(x) \geqslant F ,$$

where $N_G(F)$ is a normaliser of F in G.

We use these theorems to an investigation of the gruops $\mathcal{H}(A)$ and $\mathcal{G}(A)$ of any subset A of X by reducing to the investigation of the groups of stability of the subsets of cardinality 1.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 30.IV.1985

Recenzent:
Doc.dr Edward Siwek