ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Andrzej KASPERSKI

O ZWARTOŚCI PEWNYCH KLAS OPERATORÓW

Streszczenie. W pracy wprowadza się pojęcie operatora zwartego i $*$- zwartego oraz podaje się 6 twierdzeń o tych operatorach. Podstawowym wynikiem pracy jest następujące uogólnienie twierdzenia o zwartości operatora liniowego ograniczonego pochodzące z [1].

Twierdzenie. Niech X_2 będzie przestrzenią Frecheta z F-normą $|\cdot|_2$, a X_1 niech będzie przestrzenią typu F^* z F-normą $|\cdot|_1$.

Jeżeli:

(a) istnieją wypukłe φ-funkcje M i N spełniające warunek Δ_2 w zerze i takie, że $\alpha_M > \beta_N$,

(b) $L^M \subset X_1$ i zanurzenie jest ciągłe,

$X_2 \subset L^N$ i zanurzenie jest ciągłe,

(c) $L_M = \langle L^M, |\cdot|_1 \rangle$ jest przestrzenią Frecheta,

(d) $\mathcal{X}_2 = \langle X_2, |\cdot|_{L^N}$ jest przestrzenią Frecheta,

to każdy operator liniowy ciągły odwzorowujący X_1 w X_2 jest $*$- zwarty.

W końcowej części pracy bada się ciągłość i zwartość operatorów Hammersteina w przestrzeniach ciągowych. Ostatnie twierdzenie podaje warunki wystarczające dla istnienia punktu stałego tego operatora.

1. WSTĘP

Definicja 1

Operator A odwzorowujący przestrzeń liniową X w przestrzeń liniową Y nazywamy skończenie wymiarowym, jeżeli zbiór wartości tego operatora jest zawarty w skończenie wymiarowej podprzestrzeni liniowej przestrzeni Y.

Definicja 2

Zbiór A zawarty w przestrzeni X typu F^* nazywamy $*$-ograniczonym, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeżeli $a \in K$ i $|a| < \delta$ oraz $x \in A$, to $|ax| < \varepsilon$.

Definicja 3

Operator A odwzorowujący przestrzeń X typu F^* w przestrzeni Y typu F^* nazywamy $*$- ograniczonym, jeżeli A odwzorowuje zbiory $*$- ograniczone w X na zbiory $*$- ograniczone w Y.

Definicja 4

Operator A odwzorowujący przestrzeń unormowaną X w przestrzeń unormowaną Y nazywamy operatorem ograniczonym, jeżeli istnieje stała $M > 0$ taka, że dla każdego $x \in X$ $\|T(x)\|_Y < M \|x\|_X$.

Definicja 5

Operator A odwzorowujący przestrzeń unormowaną X w przestrzeń unormowaną Y nazywamy operatorem zwartym, jeżeli obraz dowolnego zbioru ograniczonego w X jest względnie zwarty w Y, tj. jego domknięcie jest zbiorem zwartym w Y.

Definicja 6

Operator A odwzorowujący przestrzeń X typu F^* w przestrzeń Y typu F^* nazywamy $*$ - zwartym, jeżeli obraz dowolnego zbioru $*$ - ograniczonego w X jest względnie zwarty w Y.

Uwaga 1

Każdy operator zwarty jest $*$ - zwarty, ale nie odwrotnie, bo każdy zbiór ograniczony w sensie normy jest $*$- ograniczony, ale nie odwrotnie (patrz [2]).

Uwaga 2

Pojęcie przestrzeni typu F^* oraz używane dalej pojęcia:

φ - funkcja, modular, przestrzeń modularna oraz własności tych pojęć można znaleźć w [2].

Niech φ będzie φ - funkcją. Oznaczmy

$$\alpha_\varphi = \sup\left\{q: \sup_{0<x,a<1} \frac{\varphi(ax)}{\varphi(a)x^q} < \infty\right\} \tag{1}$$

$$\beta_\varphi = \inf\left\{q: \inf_{0<x,a<1} \frac{\varphi(ax)}{\varphi(a)x^q} > 0\right\}$$

W dalszym ciągu wykorzystane będzie pochodzące z [1]

Twierdzenie 1

Niech M i N będą wypukłymi φ - funkcjami spełniającymi warunek Δ_2 w zerze. Wtedy każdy operator liniowy ograniczony odwzorujący l^M na l^N jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_N < \alpha_M$.

2. O OPERATORACH ZWARTYCH

Twierdzenie 2

Niech X będzie przestrzenią typu $F^{*/}$, a Y przestrzenią Frecheta. Niech $A,B : X \to Y$ oraz dla każdego $\Omega \subset X$, $A(\Omega) \subset B(\Omega)$. Jeżeli operator B jest $*$ - zwarty, to operator A jest $*$ - zwarty.

Dowód

Niech $\Omega \subset X$ będzie $*$ - ograniczony. Wystarczy wykazać, że $A(\Omega)$ jest całkowicie ograniczony. Ponieważ operator B jest $*$ - zwarty, a więc $B(\Omega)$ jest jest całkowicie ograniczony. Ponieważ podzbiór całkowicie ograniczonego jest całkowicie ograniczony, więc zbiór $A(\Omega)$ jest całkowicie ograniczony, czyli operator A jest $*$ - zwarty.

Twierdzenie 3

Niech $A(x) = B_1x + B_2(x)$. Jeżeli B_1 jest operatorem liniowym i ograniczonym odwzorowującym $l_p \to l_r$, $\infty > p \geq r \geq 1$, a $B_2 : l_p \to l_r$ jest takim, że istnieje $m = \{m_i\}$, $m \in l_r$, że dla każdego $x \in l_p$, $|[B_2(x)](i)| < |m_i|$, to operator A jest zwarty.

Dowód

Niech $\Omega \subset l_p$ będzie dowolnym zbiorem ograniczonym. Ponieważ operator B_1 jest zwarty, a więc $B_1(\Omega)$ jest całkowicie ograniczony w l_r. Wystarczy wykazać, że $B_2(\Omega)$ jest całkowicie ograniczony w l_r. Niech $\varepsilon > 0$ będzie ustalone. Niech

$$B_2(x) = B_2^n(x) + \underline{B}_2^n(x), \text{ gdzie}$$

$$[B_2^n(x)](i) = \begin{cases} [B_2(x)](i) & \text{dla} \quad i = 1,\dots,n \\ 0 & \text{dla} \quad i > n \end{cases}$$

$$[\underline{B}_2^n(x)](i) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i = 1,\dots,n \\ [B_2(x)](i) & \text{dla} \quad i > n\,. \end{cases}$$

Obierzmy n tak, aby dla każdego $x \in l_p$ $\|\underline{B}_2^n(x)\| < \varepsilon$. Ponieważ B_2^n jest operatorem skończenie wymiarowym, a więc $B_2^n(\Omega)$ jest całkowicie ograniczony, a zatem istnieje w nim skończona ε - sieć. Ta ε - sieć plus dowolny punkt należący do $\underline{B}_2^n(\Omega)$ daje 2ε - sieć w $B_2(\Omega)$, czyli $B_2(\Omega)$ jest całkowicie ograniczony. Niech $\{N_1(\varepsilon),\dots,N_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)\}$ będzie skończoną $\frac{\varepsilon}{2}$ - siecią w $B_1(\Omega)$, a $\{M_1(\varepsilon),\dots,M_{m(\varepsilon)}(\varepsilon)\}$ będzie skończoną $\frac{\varepsilon}{2}$ - siecią w $B_2(\Omega)$.

Niech $y \in A(\Omega)$, stąd istnieje $x \in \Omega$ taki, że $y = A(x) = B_1 x + B_2(x) = y_1 + y_2$, gdzie $y_1 = B_1 x$, $y_2 = B_2(x)$. Ponieważ $y_1 \in B_1(\Omega)$, więc istnieje $i(\varepsilon)$ takie, że $\|y_1 - N_{i(\varepsilon)}(\varepsilon)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ $y_2 \in B_2(\Omega)$, więc istnieje $j(\varepsilon)$ takie, że $\|y_2 - M_{j(\varepsilon)}(\varepsilon)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, stąd $\|y - (N_{i(\varepsilon)}(\varepsilon) + M_{j(\varepsilon)}(\varepsilon))\| < \varepsilon$, czyli zbiór $\{N_{i(\varepsilon)}(\varepsilon) + M_{j(\varepsilon)}(\varepsilon) : i(\varepsilon) = 1,\dots,n(\varepsilon),\ j(\varepsilon) = 1,\dots,m(\varepsilon)\}$ jest skończoną ε - siecią w $A(\Omega)$, czyli $A(\Omega)$ jest całkowicie ograniczony, a więc operator A jest zwarty.

Twierdzenie 4

Niech X_2 będzie przestrzenią Frecheta z F-normą $|\cdot|_2$, a X_1 niech będzie przestrzenią typu F^* z F-normą $|\cdot|_1$.
Jeżeli:

(a) istnieją wypukłe φ- funkcje M i N spełniające warunek Δ_2 w zerze i takie, że $\alpha_M > \beta_N$,

(b) $l^M \subset X_1$ i zanurzenie jest ciągłe,
$X_2 \subset l^N$ i zanurzenie jest ciągłe,

(c) $l_M = \langle l^M, |\cdot|_1 \rangle$ jest przestrzenią Frécheta,

(d) $\mathfrak{X}_2 = \langle X_2, \|\cdot\|_{l^N} \rangle$ jest przestrzenią Frécheta,

to każdy operator liniowy ciągły odwzorowujący X_1 w X_2 jest $*$ - zwarty.

Dowód:

Niech A będzie operatorem liniowym ciągłym odwzorowującym X_1 w X_2. Z założenia (b) mamy, że A odwzorowuje l_M w X_2. Niech A_1 będzie operatorem liniowym, ciągłym, różnowartościowym odwzorowującym l^M na l_M, a A_2 niech będzie operatorem liniowym, ciągłym, różnowartościowym odwzorowującym X_2 na $\mathfrak{X}_2$. Z założenia (b) takie operatory istnieją. Niech $B = A_2 A A_1$. Łatwo zauważyć, że $B : l^M \to \mathfrak{X}_2$, a więc $B : l^M \to l^N$. Z założenia (a) i Twierdzenia 1 operator B jest zwarty. Z twierdzenia Frécheta operatory A_2^{-1}, A_1^{-1} istnieją oraz są liniowe i ciągłe. Stąd operator $A = A_2^{-1} B A_1^{-1}$ jest operatorem $*$ - zwartym.

Wniosek 1

Jeżeli $X_2 = X_{\varrho_2}$ jest przestrzenią modularną zupełną generowaną przez modular ϱ_2, a $X_1 = X_{\varrho_1}$ jest przestrzenią modularną generowaną przez modular ϱ_1 oraz $|\cdot|_1 = |\cdot|_{\varrho_1}$, $|\cdot|_2 = |\cdot|_{\varrho_2}$ i spełnione są założenia Twierdzenia 4, to każdy operator liniowy ciągły odwzorowujący X_{ϱ_1} w X_{ϱ_2} jest $*$ - zwarty.

Twierdzenie 4

Jeżeli X_1 jest przestrzenią unormowaną, a X_2 jest przestrzenią Banacha i spełnione są pozostałe założenia Twierdzenia 4, to każdy operator liniowy ograniczony odwzorowujący X_1 w X_2 jest zwarty.

Dowód jako analogiczny do dowodu Twierdzenia 4 pomijamy.

Przykład

Niech

$$\varphi^1_{2i}(t) = t^4, \qquad \varphi^1_{2i-1}(t) = |t|^3 ,$$

$$\varphi^2_{2i}(t) = t^2 , \qquad \varphi^2_{2i-1}(t) = |t|, \qquad i = 1,2,\ldots ,$$

$$\varrho_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^1_i(x(i)), \qquad \varrho_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^2_i(x(i)) .$$

Pokażemy, że każdy operator liniowy ograniczony odwzorowujący X_{ϱ_1} w X_{ϱ_2} jest zwarty. Łatwo zauważyć, że $l^M = l_3$, $l^N = l_2$. Dalej łatwo pokazać, że jeżeli $x \in l_3$, to $x \in X_{\varrho_1}$ oraz, że jeżeli $x \in X_{\varrho_2}$, to $x \in l_2$. Zauważmy dalej, że zanurzenie l_3 w X_{ϱ_1} oraz X_{ϱ_2} w l_2 jest ciągłe.

Niech $x_n \to x$ w l_3 . Wtedy dla każdego $a > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|a(x_n(i) - x(i))\right|^3 \quad 0, \text{ gdy } n \to \infty, \text{ ale wtedy}$$

$$\left|a(x_n(i) - x(i))\right| < 1 \text{ dla } i = 1,2,\ldots , \text{ stąd}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|a(x_n(i) - x(i))\right|^3 \geqslant \varrho_1(a(x_n - x)), \text{ skąd}$$

$\varrho_1(a(x_n - x)) \to 0$, gdy $n \to \infty$ dla każdego $a > 0$, czyli $x_n \to x$ w sensie $|\cdot|_{\varrho_1}$.

Analogicznie pokazuje się, że zanurzenie X_{ϱ_2} w l_2 jest ciągłe.

Przestrzeń X_{ϱ_2} jest przestrzenią zupełną. Przestrzeń $\langle l_3 , |\cdot|_{\varrho_1} \rangle$ jest przestrzenią zupełną. Istotnie, przypuśćmy, że $\{x_n\}$ nie jest ciągiem Cauchy'ego w l_3 , tzn. istnieją $\varepsilon > 0$, ciągi $\{n_k\}$ i $\{m_k\}$ oraz $a > 0$ takie, że $\sum_{i=1}^{\infty} \left|a(x_{n_k}(i) - x_{m_k}(i))\right|^3 \geqslant \varepsilon$, czyli istnieje $r \in N$ takie, że

$$\sum_{i=1}^{r} \left|a(x_{n_k}(i) - x_{m_k}(i))\right|^3 > \frac{\varepsilon}{2}$$

Możemy założyć, że $a > 1$. Wtedy istnieje $j \in \{1,\dots,r\}$ takie, że $|a(x_{n_k}(j) - x_{m_k}(j))| > (\frac{\varepsilon}{2r})^{\frac{1}{3}}$, a stąd $\varrho_1(a(x_{n_k} - x_{m_k})) > (\frac{\varepsilon}{2r})^{\frac{4}{3}}$ o ile $(\frac{\varepsilon}{2r}) \leqslant 1$, czyli $\{x_n\}$ nie jest ciągiem Cauchy'ego w $\langle l_3, \|\cdot\|_{\varrho_1} \rangle$. Podobnie dowodzi się założenie (d).

3. O ZWARTYCH OPERATORACH HEMMERSTEINA

Niech dalej:

$K : N \times N \longrightarrow R_+$, $F : N \times R \longrightarrow R$, a X niech będzie przestrzenią wszystkich ciągów rzeczywistych.

Oznaczmy dla każdego $x \in X$:

$$[H(x)](i) = \sum_{j=1} K(i,j)F(j,x(j)), \tag{2}$$

$$[Ax](i) = \sum_{j=1} K(i,j)\, x(j),$$

$$[F(x)](i) = F(i,x(i)).$$

Twierdzenie

Niech M i N będą wypukłymi φ- funkcjami spełniającymi warunek Δ_2 w zerze takimi, że $\alpha_M > \beta_N$. Jeżeli:

(a) $A : l^M \quad l^N$ i jest operatorem ograniczonym,

(b) $F : l^M \longrightarrow X$ oraz istnieje stała $L > 0$ taka, że dla wszystkich $x,y \in l^M$ i dla każdego $a > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(a(F(i,x(i)) - F(i,y(i)))) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} M(aL(x(i) - y(i))),$$

(c) $F(i,0) = 0$ dla $i \in N$,

to $H : l^M \longrightarrow l^N$ oraz jest operatorem zwartym i ciągłym, gdzie A,F,H dane są wzorem (2).

Dowód

Z założenia (a) i z Twierdzenia 1 operator A jest zwarty. Z założeń (b) i (c) otrzymujemy, że operator $\mathbb{F}$ jest ciągły i ograniczony oraz $\mathbb{F} : l^M \longrightarrow l^M$, bo dla wszystkich $x,y \in L^M$

$$\| \mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(y) \|_{\varrho_M} = \inf\left\{ \varepsilon > 0 : \varrho_M\left(\frac{\mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(y)}{\varepsilon}\right) \leqslant 1 \right\}$$

$$\leqslant \inf\left\{ \varepsilon > : \varrho_M\left(\frac{x - y}{\frac{\varepsilon}{L}}\right) \leqslant 1 \right\} = L\|x - y\|_{\varrho_M} ,$$

czyli operator F jest ciągły i ze względu na (c) ograniczony.

Twierdzenie 6

Niech M i N będą wypukłymi φ- funkcjami spełniającymi warunek Δ_2 w zerze takimi, że $\alpha_N > \beta_M$. Jeżeli:

(a) $A : l^N \longrightarrow l^M$ i jest operatorem ograniczonym,

(b) $\mathbb{F} : l^M \longrightarrow l^N$ oraz istnieje stała $L > 0$ taka, że dla wszystkich $x,y \in l^M$ i każdego $a > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} N(a(F(i,x(i)) - F(i,y(i)))) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} M(aL(x(i) - y(i))),$$

(c) $\mathbb{F}(0) = 0$,

(d) $H(K_{\varrho_M}(r_o)) \subset K_{\varrho_M}(r_o)$ dla pewnego $r_o > 0$,

to istnieje $x_o \in K_{\varrho_M}(r_o)$ takie, że $H(x_o) = x_o$, gdzie A $\mathbb{F}$, H dane są wzorem (2), a

$$K_{\varrho_M}(r) = \left\{ x \in l^M : \|x\|_{\varrho_M} \leqslant r \right\} .$$

Dowód

Z założenia (a) i z Twierdzenia 1 operator A jest zwarty i ciągły. Z założeń (b) i (c) operator F jest ciągły, ograniczony. Stosując twierdzenie Schaudera o punkcie stałym otrzymujemy tezę.

Uwaga końcowa

Wyniki przedstawione w niniejszej pracy są wyciągiem z rozdziału IV Rozprawy Doktorskiej autora.

LITERATURA

[1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: Classical Banach Spaces. Berlin, Heidelberg, New York 1973.

[2] J. Musielak: Wstęp do analizy funkcjonalnej. PWN Warszawa 1976.

О СОЖЕРЖИМОМ НЕКОТОРОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

Р е з ю м е

В настоящей работе определяеться компактный и *-компактный оператор и дается 6 теорем о них. Основной результат это обобщение теоремы о компактном линейном операторе из [1].

Теорема. Пусть X_2 пространство Фреше с F-нормой $|\cdot|_2$. Пусть X_1 пространство типа F^* с F-нормой $|\cdot|_1$. Если:

(а) существуют выпуклые φ-функции M и N такие что $\alpha_M > \beta_N$ и функции M, N удовлетворяють Δ_2 условe при малых значениях u.

(б) $L^M \subset X_1$ и вложение есть непрерывным оператором, $X_2 \subset L^N$ и вложение есть непрерывным оператором,

(в) $L_M = \langle L^M, |\cdot|_1\rangle$ есть пространство Фреше,

(г) $\bar{X}_2 = \langle X_2, \|\cdot\|_{L^N}\rangle$ есть пространство Фреше,

тогда всякий линейный непрерывный оператор действующий из X_1 в X_2 является *-компактным оператором.

В конце работы исследуется компактность оператора типа Граммерштейна в пространстве числовых последовательностей. Последняя теорема дает достаточные условия для существования неподвижной точки этого оператора.

ON COMPACTNESS OF CERTAIN CLASSES OF OPERATORS

S u m m a r y

In this paper is defined the compact operator and * - compact operator and we introduce 6 theorems about them. The main result of this paper the following generalization of the theorem about compact linear bounded operator from [1].

Thorem. Let X_2 be Fréchet space with F-norma $|\cdot|_2$. Let X_1 be F^* - space with F-norma $|\cdot|_1$. If:

(a) there exist convex φ- functions M and N such that $\alpha_M > \beta_N$ and M,N are functions satisfying the Δ_2 - condition at 0,

(b) $L^M \subset X_1$ and embedding is continuous,

$X_2 \subset L^N$ and embedding is continuous,

(c) $L_M = \langle L^M , |\cdot|_1 \rangle$ is Fréchet space,

(d) $\mathfrak{X}_2 = \langle X_2 , \|\cdot\|_{L^N} \rangle$ is Fréchet space,

then every continuous linear operator from X_1 to X_2 is $*$- compact.

In the end of this paper is studied compactness of Hammerstein operators in the sequence space. The last theorem introduce sufficient conditions for existence of fixed point of Hammerstein operator.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 9.X.1984

Recenzent
Prof. dr hab. Julian Musielak