ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Marek ŻABKA

PEWNA KONSTRUKCJA KOPRODUKTU PÓŁPROSTEGO W KATEGORII GRUP

Streszczenie. Celem pracy jest podanie sposobu konstrukcji koproduktu półprostego w kategorii grup. Ogólna definicja koproduktu półprostego w kategorii z obiektem zerowym została zastosowana do kategorii grup. Grupa G okazała się być koproduktem półprostym grup K i H, gdy istnieją homomorfizmy grupy G na grupy K i H oraz homomorfizm grupy H w grupę G takie, że najmniejszy dzielnik normalny grupy G zawierający obraz grupy H jest jądrem homomorfizmu grupy G na grupę K oraz złożenie homomorfizmu grupy H w grupę G z homomorfizmem grupy G na grupę H jest identycznością na grupie H. Twierdzenie to pozwala zbadać czy dana grupa jest koproduktem półprostym danych grup czy też nie.

Konstrukcja dowolnego koproduktu półprostego zawarta została w dalszej części pracy. W celu skonstruowania koproduktu półprostego grup należy półgrupę ciągów elementów grup wyjściowych oraz pewnej dowolnej grupy podzielić przez podpółgrupę normalną spełniającą odpowiednie warunki. Z tych warunków wynika, że półgrupa ilorazowa jest grupą oraz koproduktem półprostym grup wyjściowych. Dodatkowo okazuje się, że w powyższy sposób można skonstruować każdy koprodukt półprosty. Przedstawiona metoda nie jest jednak jednoznaczna, tzn. biorąc inną grupę dowolną oraz inną podgrupę możemy otrzymać ten sam koprodukt półprosty.

1. WSTĘP

W pracy [2] podałem definicję koproduktu półprostego nie wskazując przy tym na żaden przykład. W tym artykule rozpatrzę koprodukt półprosty w kategorii grup i podam sposób jego konstrukcji. Punkt 2 zawiera ogólne rozważania na temat koproduktu półprostego w kategorii grup, a punkt 4 - sposób jego konstrukcji. Własności półgrup, wykorzystywane w konstrukcji zawarte zostały w punkcie 3.

W artykule spotykamy sytuację, gdy pewien zbiór jest grupą oraz podzbiorem półgrupy, przy czym nie jest podpółgrupą, tzn. działanie grupowe i półgrupowe nie pokrywają się. Dlatego w całym artykule "*" oznacza działanie w półgrupie, a "." działanie w odpowiedniej grupie, przy czym znak działania grupowego "." jest z reguły opuszczony, gdy nie prowadzi to do nieporozumień.

Ponadto $\overset{1}{\bigvee}$ oznacza "istnieje dokładnie jeden", a $\overline{H}^{G}$ w przypadku gdy G jest grupą a $H \subset G$, oznacza najmniejszy dzielnik normalny w G zawierający zbiór H (por. definicja 1.4).

2. DEFINICJA KOPRODUKTU PÓŁPROSTEGO

W tym paragrafie przypomniane zostaną podstawowe definicje zawarte w [1] oraz definicja koproduktu półprostego przedstawiona w [2]. Twierdzenie 2.1 podaje interpretację pojęcia koproduktu półprostego w kategorii grup.

Definicja 2.1

Obiektem zerowym kategorii $\mathfrak{U}$ nazywamy każdy taki obiekt O, że dla każdego obiektu X kategorii $\mathfrak{U}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\alpha : X \to O$ oraz dokładnie jeden morfizm $\beta : O \to X$. Wszystkie obiekty zerowe danej kategorii są izomorficzne. Morfizmem zerowym nazywamy taki morfizm $O_{XY} : X \to Y$, że istnieją morfizmy $\alpha : O \to Y$ oraz $\beta : X \to O$ spełniające warunek $O_{XY} = \alpha\beta$. Oczywiście dla dowolnych danych obiektów X i Y kategorii $\mathfrak{U}$, w której istnieje obiekt zerowy, istnieje dokładnie jeden morfizm zerowy (por. [1]).

Definicja 2.2

Morfizm $\alpha : H \to G$ nazywamy koretrakcją, gdy istnieje morfizm $\beta : G \to H$ taki, że $\beta\alpha = id_H$. (por. [1]).

Definicja 2.3

Morfizm $\gamma : G \to K$ nazywamy kojądrem morfizmu $\varepsilon : H \to G$ gdy:

a) $\gamma\varepsilon = O_{HK}$

b) $\bigwedge \xi : G \to X \quad \xi\varepsilon = O_{HK} \Longrightarrow \overset{1}{\bigvee} \vartheta : K \to X \quad \xi = \vartheta\gamma$ (por. [1])

Definicja 2.4.

Grupę G nazywamy koproduktem półprostym grup K i H, gdy istnieją morfizmy $\gamma : G \to K$ oraz $\varepsilon : H \to G$ takie, że:

a) morfizm γ jest kojądrem morfizmu
b) morfizm ε jest koretrakcją (por. [1]).

Definicja 2.5

Morfizm $\alpha : X \to Y$ nazywamy epimorfizmem, gdy dla dowolnych morfizmów $\varphi : Y \to Z$ i $\phi : Y \to Z$ z tego, że $\varphi\alpha = \phi\alpha$ wynika, że $\varphi = \phi$ (por. [1]).

Twierdzenie 2.1

Grupa G jest koproduktem półprostym grup K i H wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $\gamma : G \to K$, $\varepsilon : H \to G$, $\pi : G \to H$ spełniające własności:

a) homomorfizm γ jest suriekcją,
b) $\ker \gamma = \overline{\varepsilon(H)}^G$,
c) $\pi\varepsilon = id_H$.

Dowód:

"$\Longrightarrow$" Niech grupa G będzie koproduktem półprostym grup K i H. Z definicji 1.4 wynika istnienie homomorfizmów $\gamma : G \to K$ oraz $\varepsilon : H \to G$ takich, że homomorfizm ε jest koretrakcją, a homomorfizm γ jest kojądrem homomorfizmu ε. Znany jest fakt, że każde kojądro jest epimorfizmem, a epimorfizmy w kategorii grup są suriekcjami (por. [1]), więc homomorfizm γ jest suriekcją. Pokażemy teraz, że $\varepsilon(H) \subset \ker\gamma$. Prawdziwa jest następująca implikacja, wynikająca z definicji kojądra:

$$x \in \varepsilon(H) \Longrightarrow \bigvee_{h \in H} x = \varepsilon(h) \Longrightarrow (x) = \gamma\varepsilon(h) = 0_{HK}(h) = e_k \longrightarrow x \in \ker\gamma$$

Ponieważ $\ker\gamma \lhd G$ więc $\overline{\varepsilon(H)}^G \subset \ker\gamma$.

Udowodnimy teraz, że $\ker\gamma \subset \overline{\varepsilon(H)}^G$.

Zdefiniujemy homomorfizm:

$$\xi: G \longrightarrow {}^G/_{\overline{\varepsilon(H)}^G} \quad \bigwedge_{g \in G} \quad \xi(g) := [g]$$

Oczywiście $\xi\varepsilon = 0_{H\,G/\overline{\varepsilon(H)}^G}$ oraz $\ker\xi = \overline{\varepsilon(H)}^G$

Na mocy definicji 2.3 kojądra istnieje homomorfizm

$$\vartheta: K \longrightarrow {}^G/_{\overline{\varepsilon(H)}^G} \text{ taki, że } \vartheta\gamma = \xi .$$

Prawdziwa jest więc implikacja:

$$x \in \ker\gamma \Longrightarrow \xi(x) = \vartheta\gamma(x) = \vartheta(e_K) = e_{G/\overline{\varepsilon(H)}^G} \Longrightarrow$$

$$x \in \ker\xi \longrightarrow x \in \overline{\varepsilon(H)}^G$$

Pozostaje do wykazania warunek c). Homomorfizm ε jest koretrakcją więc istnieje homomorfizm $\pi: G \longrightarrow H$ taki, że $\pi\varepsilon = id_H$

"$\Longleftarrow$" Z warunku c) wynika oczywiście, że homomorfizm ε jest koretrakcją. Sprawdzamy teraz, że homomorfizm γ jest kojądrem homomorfizmu ε. Ponieważ $\varepsilon(H) \subset \overline{\varepsilon(H)}^G = \ker\gamma$, więc $\gamma\varepsilon = 0_{HK}$. Niech teraz $\xi: G \longrightarrow X$ będzie dowolnym homomorfizmem takim, że $\xi\varepsilon = 0_{HX}$. Prawdziwa jest następująca implikacja: $\xi\varepsilon = 0_{HK} \Longrightarrow \varepsilon(H) \subset \ker\xi \Longrightarrow \overline{\varepsilon(H)}^G \subset \ker\xi \Longrightarrow \ker\gamma \subset \ker\xi$.

Odwzorowanie ϑ zdefiniujemy w następujący sposób:

$$\vartheta: K \longrightarrow X \quad \bigwedge_{k \in K} \quad \vartheta(k) := \xi(g) \quad \text{gdzie} \quad g \in \gamma^{-1}(k).$$

Ponieważ $\ker\gamma \subset \ker\xi$ więc definicja powyższa jest prawidłowa. Łatwo widać, że odwzorowanie ϑ jest homomorfizmem oraz $\vartheta\gamma = \xi$. Jest on również jedyny, bo przypuśćmy, że ϑ': $K \longrightarrow X$ spełnia również $\xi = \vartheta'\gamma$.

wtedy:

$$\bigwedge_{k \in K} \quad \vartheta(k) = \xi(g) = \vartheta'\gamma(g) = \vartheta'(k),$$

gdzie $g \in \gamma^{-1}(k)$.

3. WYBRANE WŁASNOŚCI PÓŁGRUP

Centralną rolę w konstrukcji koproduktu półprostego odgrywa pojęcie półgrupy. Na podstawie ogólnie znanych własności oraz bardziej szczegółowych z pracy [3] opracowałem ten paragraf, wprowadzając pojęcia i własności pod kątem wykorzystania do konstrukcji koproduktu półprostego. Zasadnicze wnioski zebrałem w lemacie 3.4.

Definicja 3.1

Zbiór P z łącznym działaniem oraz elementem neutralnym e_P nazywamy półgrupą z jednością. Odwzorowanie półgrup zachowujące działanie oraz element neutralny nazywamy homomorfizmem półgrup z jednością.

Uwaga 3.1

W tej pracy rozpatrujemy tylko półgrupy z jednością, a więc przez półgrupę będziemy stale rozumieli półgrupę z jednością.

Definicja 3.2

Dla dowolnego zbioru X, półgrupę $\mathcal{F}_X$ utworzoną ze skończonych ciągów elementów zbioru X z działaniem - konkatenacją ciągów, nazywamy półgrupą wolną generowaną przez zbiór X. Elementem neutralnym półgrupy $\mathcal{F}_X$ jest ciąg zerpelementowy (pusty). Zbiór X utożsamiamy z ciągami jednoelementowymi, a więc możemy pisać: $X \subset \mathcal{F}_X$.

Lemat 3.1

Dla dowolnego zbioru X, dowolnej półgrupy G i dla dowolnego odwzorowania $\bar{f} : X \longrightarrow G$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm półgrup $f : \mathcal{F}_X \longrightarrow G$ taki, że $f|_X = \bar{f}$.

Definicja 3.3

Podzbiór N półgrupy P nazywamy podpółgrupą półgrupy P , gdy jest on zamknięty ze względu na działanie w półgrupie oraz $e_p \in N$. Podpółgrupę N nazywamy normalną, gdy spełnia warunek: jeżeli dla dowolnych elementów a,b,c półgrupy P z tego, że dwa z elementów a b x, a c, b należą do D wynika, że ten trzeci też należy do N. Piszemy wtedy $N \triangleleft P$. Podpółgrupę N nazywamy pełną, gdy:

$$\bigwedge_{x \in P} \; \bigvee_{y \in P} \quad x*y \in N .$$

Lemat 3.2

Jeżeli N jest normalną podpółgrupą półgrupy P to spełnione są warunki:

a) $e_p * x \in N \Rightarrow x \in N$

b) $a*b \in N \Rightarrow b*a \in N$

c) $a_0*b_1*a_1 \ldots *b_n*a_n \in N$ i $a_0,\ldots,a_n \in N \Rightarrow b_1*\ldots*b_n \in N$

Dowód

a) Załóżmy, że $e_p*x \in N$. Ponieważ $N \triangleleft P$ więc $e_p \in N$ i dalej $e_p*x*e_p \in N$ oraz $e_p*e_p \in N$. Ostatecznie na mocy normalności podpółgrupy N : $x \in N$.

b) Załóżmy, że $a*b \in N$. Wynika stąd, że $a*b*a*b \in N$ i z warunku normalności podpółgrupy N wynika, że $b*a \in N$.

c) Załóżmy, że $a_0*b_1*a_1*\ldots*b_n*a_n \in N$ i $a_0,a_1,\ldots,a_n \in N$. Wtedy $a_0*a_n \in N$ i na mocy normalności podpółgrupy N wynika, że $b_1*a_1*b_2*a_2*\ldots$ $\ldots*b_{n-1}*a_{n-1}*b_n \in N$. Na mocy normalności podpółgrupy N wynika również, że jeżeli

$$b_1*b_2*\ldots*b_{i-1}*b_i*a_i*b_{i+1}*a_{i+1}*\ldots*b_{n-1}*a_{n-1}*b_n \in N \text{ oraz } a_i \in N$$

to

$$b_1*b_2*\ldots*b_i*b_{i+1}*a_{i+1}*\ldots*b_{n-1}*a_{n-1}*b_n \in N,$$

co po n-1 krokach pozwala wykazać, że $b_1*b_2*\ldots b_n \in N$.

Definicja 3.4

Jeżeli H jest podzbiorem półgrupy P to przez $\overline{H}^P$ oznaczamy najmniejszą podpółgrupę normalną zawierającą H. Jest ona przekrojem wszystkich podpółgrup normalnych półgrupy P zawierających zbiór H.

Definicja 3.5

Relację równoważności ρ w półgrupie P nazywamy kongruemcją gdy:

$$\bigwedge_{a,b,c,d \in P} \quad a\rho b \wedge c\rho d \Rightarrow a*c\rho b*d$$

Definicja 3.6

Jeżeli ρ jest kongruencją w półgrupie P, to przez P/ρ rozumiemy półgrupę utworzoną z klas abstrakcji relacji z działaniem określonych wzorem: $[a]*[b] = [a*b]$.

Definicja 3.7

Niech N będzie podzbiorem półgrupy P. Przez ρ_N będziemy rozumieli relację określoną wzorem:

$$x \rho_N y \Longleftrightarrow \bigvee_{z \in P} \quad x * z \in N \wedge y * z \in N$$

Lemat 3.3

Jeżeli N jest normalną podpółgrupą półgrupy P, to ρ_N jest kongruencją oraz $N = \{x \in P \mid x \rho_N e_P\}$

Dowód

Dowodzimy wpierw, że ρ_N jest relacją równoważności. Zwrotność i symetria są oczywiste. Niech $x \rho_N y$ i $y \rho_N z$, wtedy $\bigvee a,b \in P$ $x * a$, $y * a$, $y * b$, $z * b \in N$, a stąd $y * a * z * b \in N$. Z normalności podpółgrupy N wynika, że $a * z \in N$ i na mocy lematu 2.2 $z * a \in N$. Tak więc $\bigvee a \in P$ $x * a \in N$ i $z * a \in N$, co pociąga za sobą $x \rho_N z$.

Dowodzimy teraz, że ρ_N jest kongruencją. Niech $x \rho_N y$ i $z \rho_N w$. Wtedy: $\bigvee a,b \in P$ $x * a$, $y * a$, $z * b$, $w * b \in N$. Na mocy normalności podpółgrupy P wynika stąd, że $x * z * b * a$, $y * w * b * a \in N$, a więc $x * z \rho_N y * w$.

Na końcu dowodzimy równości $N = \{x \in P \mid x \rho_N e_P\}$. Ponieważ $N \triangleleft P$, więc prawdziwe są implikacje:

$$x \in N \Longrightarrow x * e_P \in N \wedge e_P * e_P \in N \Longrightarrow x \rho_N e_P$$

$$x \rho_N e_P \Longrightarrow \bigvee_{z \in P} x * z \in N \wedge e_P * z \in N \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{z \in P} e_P * x \in N \wedge e_P * x * z \in N \Longrightarrow x \in N$$

Twierdzenie 3.1

Jeżeli N jest normalną i pełną podpółgrupą półgrupy P, to P/ρ_N jest grupą.

Dowód

Na mocy definicji 2.6 P/ρ_N jest półgrupą. Wystarczy wykazać, że każdy element P/ρ_N jest odwracalny. Niech $[x] \in P/\rho_N$. Ponieważ podpółgrupa N jest pełna, więc $\bigvee y \in P$ $x * y \in N$. Jak wykazano w lemacie 3.3 $x * y \rho_N e_P$, a więc $[x] \cdot [y] = e_{P/\rho_N}$. Stosując lemat 3.2 otrzymujemy, że również $[y] \cdot [x] = e_{P/\rho_N}$.

Definicja 3.8

Niech $\phi: P \longrightarrow G$ będzie homomorfizmem półgrup. Przez ρ_ϕ oznaczymy kongruencję zdefiniowaną wzorem: $x \rho_\phi y \Longleftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$

Twierdzenie 3.2 (Twierdzenie o izomorfizmie)

Jeżeli $\phi : P \to G$ jest homomorfizmem półgrup, to półgrupa P/ϱ_ϕ jest izomorficzna z obrazem $\phi(P)$ półgrupy P w odwzorowaniu ϕ (por. [3]).

Definicja 3.9

Jeżeli $\phi : P \to G$ jest homomorfizmem półgrup, to przez $\ker\phi$ oznaczymy podzbiór P zdefiniowany wzorem

$$\ker\phi := \{x \in P \mid \phi(x) = e_G\}$$

Najważniejsze fakty, potrzebne w następnym paragrafie zostały zebrane w następującym lemacie:

Lemat 3.4

Jeżeli $\phi : P \to G$ jest homomorfizmem półgrupy P na grupę G oraz H jest podzbiorem półgrupy P, to:

a) $\ker\phi$ jest normalną i pełną podpółgrupą półgrupy P

b) $\varrho_{\ker\phi} = \varrho_\phi$

c) $P/\varrho_{\ker\phi} \simeq G$

d) $\phi(\overline{(H \cup \ker\phi}^P) = \overline{\phi(H)}^G$

e) $\overline{H \cup \ker\phi}^P = \phi^{-1}(\overline{(\phi(H)}^G)$

Dowód

a) Niech dwa z elementów $a*b*c$, $a*c$, b należą do $\ker\phi$. Korzystając z tego, że obraz półgrupy P w odwzorowaniu ϕ jest grupą wykazujemy bez trudu, że trzeci z nich należy do $\ker\phi$.

Niech $a \in P$. ϕ jest odwzorowaniem na grupę, więc:

$$\bigvee b \in P \ \ \phi(a)\phi(b) = e_G \quad \text{tzn.} \quad a*b \in \ker\phi.$$

b) "$\Longrightarrow$" $x\varrho_{\ker\phi}y \Longrightarrow \bigvee z \in P \ \ x*z \in \ker\phi \ \ y*z \in \ker\phi \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bigvee z \in P \ \ \phi(x*z) = \phi(y*z) \Longrightarrow \bigvee z \in P \ \ \phi(x)\phi(z) = \phi(y)\phi(z) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \phi(x) = \phi(y) \Longrightarrow x\varrho_\phi y$$

"$\Longleftarrow$" $x\varrho_\phi y \Longrightarrow \phi(x) = \phi(y) \Longrightarrow \bigvee u \in G \ \phi(x)u = e_G = \phi(y)u \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bigvee z \in P \ \phi(z) = u \wedge \phi(x)\phi(z) = e_H = \phi(y)\phi(z) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigvee z \in P \ \ z*z \in \ker\phi \wedge y*z \in \ker\phi \Longrightarrow x\varrho_{\ker\phi} y$$

c) Jest to oczywisty wniosek z b) oraz z twierdzenia 3.2.

d) "$\subset$" Ponieważ $\phi(H\cup\ker\phi)\subset\overline{\phi(H)}^G$ więc $(H\cup\ker\phi)\subset\phi^{-1}(\overline{\phi(H)}^G)$. Łatwo można zauważyć, że $\phi^{-1}(\overline{\phi(H)}^G)\lhd P$ więc $\overline{H\cup\ker\phi}^P\subset\phi^{-1}(\overline{\phi(H)}^G)$ oraz ponieważ odwzorowanie ϕ jest suriekcją: $\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)\subset\overline{\phi(H)}^G$.

"$\supset$" Udowodnimy wpierw, że $\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)\lhd G$. Niech $x,y\in\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$. $\bigvee a,b\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$ $x=\phi(a)\wedge y=\phi(b)$. Ponieważ $\ker\phi$ jest pełną podpółgrupą w P, więc $\bigvee c\in P$ $b*c\in\ker\phi$, a stąd $\phi(b)\phi(c)=\phi(b*c)=e_G$ i ostatecznie $\phi(c)=\phi(b)^{-1}$. Tak więc $xy^{-1}=\phi(a)\phi(b)^{-1}=\phi(a*c)$. Wystarczy wykazać, że $c\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$. Mamy $b*c\in\ker\phi$ więc $e_p*b*c\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$. . $b\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$ więc $e_p*c\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$ i na mocy lematu 3.2 $c\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$. Udowodniliśmy, że $\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$ jest podgrupą grupy G.

Dowodzimy teraz jej normalności. Niech $x\in\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$ oraz $y\in G$. $\bigvee a\in P$ $y=\phi(a)$ oraz $\bigvee b\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$ $x=\phi(b)$. Ponieważ $\ker\phi$ jest podpółgrupą, więc $\bigvee c\in P$ $a*c\in\ker\phi\subset\overline{H\cup\ker\phi}^P$. Jak wyżej zauważmy, że $\phi(a)^{-1}=\phi(c)$. Wynika z tego, że $yxy^{-1}=\phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1}=\phi(a*b*c)$. Z normalności podpółgrupy $\overline{H\cup\ker\phi}^P$ wynika, że $a*b*c\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$.

Ponieważ $H\subset\overline{H\cup\ker\phi}^P$, więc $\phi(H)\subset\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$ i na mocy wyżej udowodnionej normalności podgrupy $\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$: $\overline{\phi(H)}^G\subset\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$.

e) Na mocy warunku d): $\phi^{-1}\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)=\phi^{-1}(\overline{\phi(H)}^G)$. Oczywistym jest, że $\overline{H\cup\ker\phi}^P$ $\phi^{-1}\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$. Pozostaje wykazać, że $\phi^{-1}\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)\subset\overline{H\cup\ker\phi}^P$. Niech $(x)\in\phi(\overline{H\cup\ker\phi}^P)$. Wtedy $\bigvee y\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$ $\phi(x)=\phi(y)$. Na mocy warunku b) $\bigvee z\in P$ $x*z\in\ker\phi\wedge y*z\in\ker\phi$. Wtedy $y*x*z\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$ oraz $y*z\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$, a więc na mocy normalności podpółgrupy $\overline{H\cup\ker\phi}^P$; $x\in\overline{H\cup\ker\phi}^P$.

4. KONSTRUKCJA KOPRODUKTU PÓŁPROSTEGO

Zasadniczy wynik pracy zawarty jest w twierdzeniu 4.1, pokazującym sposób konstrukcji koproduktu półprostego i dostateczną jej ogólność. Twierdzenie 4.1 poprzedzone jest lematem pomocniczym.

Lemat 4.1

Załóżmy, że:

a) G,K,H są grupami,

b) $\gamma:G\to K$, $\varepsilon:H\to G$ oraz $\pi:G\to H$ są homomorfizmami,

c) $\pi\varepsilon=id_H$,

d) $\varepsilon(H)=\ker\gamma$,

e) $S = \ker\pi \cap \ker\gamma$,

f) Odwzorowanie γ jest suriekcją.

Teza: istnieje odwzorowanie $\omega: K \to \ker\pi$ takie, że $\gamma\omega = id_K$ $\omega(e_K) = e_G$ oraz

$$\bigwedge_{g\in G} \ \bigvee_{s\in S} \ \bigvee_{h\in H} \ \bigvee_{k\in K} \quad g = s\omega(k)\,\varepsilon(h)$$

Dowód

Zdefiniujemy odwzorowanie pomocnicze:

$$\xi: G \to G \quad \bigwedge_{g\in G} \quad \xi(g) := g\,\varepsilon\pi(g)^{-1} \tag{4.1}$$

Na mocy założenia c) mamy:

$$\pi\xi(g) = \pi(g)\pi\varepsilon\pi(g)^{-1} = \pi(g)\,\pi(g)^{-1} = e_H \tag{4.2}$$

Na mocy założenia d) mamy:

$$\gamma\xi(g) = \gamma(g)\gamma\varepsilon\pi(g)^{-1} = \gamma(g)$$

Na mocy założeń b) i f) istnieje odwzorowanie (nie koniecznie homomorfizm) $\bar{\omega}: K \to G$ takie, że:

$$\gamma\bar{\omega} = id_K \quad \text{oraz} \quad \bar{\omega}(e_K) = e_G\,. \tag{4.4}$$

Niech $\omega := \xi\bar{\omega}$. Dowodzimy własności odwzorowania.

Na mocy (3.2):

$$\pi\omega = \pi\xi\bar{\omega} = 0_{KH} \ \text{a więc} \ \omega(K) \subset \ker\pi \tag{4.5}$$

Na mocy (4.3) i (4.4):

$$\gamma\omega = \gamma\xi\bar{\omega} = \gamma\bar{\omega} = id_K \ \text{oraz} \ \omega(e_K) = \xi\bar{\omega}(e_K) = e_G\varepsilon\pi(e_G)^{-1} = e_G$$

Dla każdego $g \in G$ zachodzi oczywista tożsamość:

$$g = s\omega\gamma(g)\varepsilon\pi(g) \ \text{gdzie} \ s = \xi(g)(\omega\gamma(g))^{-1}$$

Na mocy (4.2) oraz (4.4):

$$\pi(s) = \pi\xi(g)(\pi\omega\gamma(g))^{-1} = e_H$$

Definicja 4.1

Niech K i H są grupami, a S jest dowolnym zbiorem. Symbolem φ^K_{SH} oznaczymy jedyny homomorfizm $\varphi^K_{SH}: \mathcal{F}_{S\cup K\cup H} \to K$ spełniający warunki:

$$\bigwedge_{x\in S\cup H} \varphi^K_{SH}(x) = e_K$$

$$\bigwedge_{x\in K} \varphi^K_{SH}(x) = x$$

Twierdzenie 4.1

Grupa G jest koproduktem półprostym grup K i H wtedy i tylko wtedy gdy istnieje grupa S oraz zbiór N takie, że:

a) N jest normalną i pełną podpółgrupą półgrupy $P := \mathcal{F}_{S\cup K\cup H}$,

b) $P/\rho_N \simeq G$,

c) $\bigwedge_{h_1,h_2\in H} h_1 * h_2 * (h_1 h_2)^{-1} \in N$,

d) $e_H \in N$ oraz $e_K \in N$,

e) $N \subset \ker \varphi^K_{SH} \cap \ker \varphi^H_{SK}$,

f) $S \subset \overline{H\cup N}^P$,

g) $\bigwedge_{k_1,k_2\in K} \bigwedge_{x\in P} (k_1 k_2) * x \in N \Rightarrow k_1 * k_2 * x \in \overline{H\cup N}^P$.

Dowód:

"$\Rightarrow$" Niech grupa G będzie koproduktem półprostym grup K i H. Na mocy twierdzenia 2.1 istnieją homomorfizmy $\gamma: G \to K$, $\varepsilon: H \to G$ i $\pi: G \to H$ takie, że odwzorowanie γ jest suriekcją oraz $\ker\gamma = \overline{\varepsilon(H)}^G$ i $\pi\varepsilon = id_H$. Na mocy lematu 4.1 istnieje odwzorowanie $\omega: K \to \ker\pi$ takie, że $\gamma\omega = id_K$ oraz $\omega(e_K) = e_G$. Niech $S := \ker\pi \cap \ker\gamma$, $P := \mathcal{F}_{S\cup K\cup H}$, a $\phi: P \to G$ będzie homomorfizmem półgrup takim, że: $\bigwedge_{s\in S} \phi(s) = s$ $\bigwedge_{k\in K} \phi(k) = \omega(k)$ $\bigwedge_{h\in H} \phi(h) = \varepsilon(h)$ oraz $N := \ker\phi$. Na mocy lematu 4.1:

$$\bigwedge_{g\in G} \bigvee_{s\in S} \bigvee_{k\in K} \bigvee_{h\in H} g = s\omega(k)\,\varepsilon(h) = \phi(s*k*h),$$

a więc odwzorowanie ϕ jest suriekcją. Na mocy lematu 2.4 $N = \ker\phi$ jest normalną pełną podpółgrupą półgrupy P oraz $P/\rho_N \simeq G$, a więc udowodniliśmy warunki a) i b).

Zauważmy, że $\bigwedge_{h_1,h_2\in H} \phi(h_1 * h_2 * (h_1 h_2)^{-1}) = e_G = \phi(e_H) = \phi(e_K)$, co dowodzi warunków c) i d).

W celu dowodu warunku e) zauważmy, że zachodzą równości: $\gamma\phi = \varphi^K_{SH}$ oraz $\pi\phi = \varphi^H_{SK}$. Równości te są oczywiście dla zbioru $S\cup K\cup H$, a więc na mocy lematu 3.1 zachodzą dla całej półgrupy P. Na mocy tych równości mamy $\ker\phi \subset \ker\varphi^K_{SH}$ oraz $\ker\phi \subset \ker\varphi^H_{SK}$, co dowodzi tego warunku.

Zachodzi następujący ciąg inkluzji dowodzący warunku f): $S\subset\phi^{-1}(\phi(S)) = \phi^{-1}(S) = \phi^{-1}(\ker\pi\cap\ker\gamma)\subset\phi^{-1}(\ker\gamma) = \phi^{-1}\overline{(\varepsilon(H))^{G}} = \phi^{-1}\overline{(\phi(H))^{G}} = \overline{H\cup N}^{P}$. Ta ostatnia równość wynika z lematu 3.4.

Dowodzimy jeszcze warunku g). Oczywiście $\ker\varphi^{K}_{SH} = \ker(\gamma\phi) = \phi^{-1}(\ker\gamma)$. Niech $k_1,k_2\in K$ i $x\in P$. Załóżmy, że $(k_1 k_2)*x\in N$. Mamy na mocy definicji 4.1 odwzorowania φ^{K}_{SH} oraz warunku e) $:\varphi^{K}_{SH}((k_1 k_2)*x) = \varphi^{K}_{SH}(k_1*k_2*x) = e_K$, a więc $k_1*k_2*x\in\ker\varphi^{K}_{SH} = \phi^{-1}(\ker\gamma) = \overline{H\cup N}^{P}$.

"$\Longleftarrow$" Grupa izomorficzna z koproduktem półprostym grup K i H jest oczywiście również koproduktem półprostym tych samych grup, a więc wystarczy, wykazać, że P/ρ_N jest takim koproduktem półprostym. Na mocy warunku a) oraz twierdzenia 3.1 P/ρ_N jest grupą. Na mocy warunków d) i e) możemy zdefiniować następujące homorfizmy grup:

$$\gamma : P/\rho_N\longrightarrow K \qquad \bigwedge_{[x]\in P/\rho_N} \qquad \gamma([x]) := \varphi^{K}_{SH}(x)$$

$$\pi : P/\rho_N\longrightarrow H \qquad \bigwedge_{[x]\in P/\rho_N} \qquad \pi([x]) := \varphi^{H}_{SK}(x)$$

$$\beta : P\longrightarrow P/\rho_N \qquad \bigwedge_{x\in P} \qquad \beta(x) := [x]$$

$$\varepsilon := \beta/_{H}\,, \quad \text{a więc} \quad \varepsilon : H\longrightarrow P/\rho_N \quad \bigwedge_{x\in H} \varepsilon(x) = [x]\,.$$

Dowodzimy poszczególnych warunków twierdzenia 4.1.

a) $\bigwedge_{k\in K} \gamma([k]) = \varphi^{K}_{SH}(k) = k$, a więc γ jest suriekcją.

b) $\bigwedge_{h\in H} \gamma(\varepsilon(h)) = \varphi^{K}_{SH}(h) = e_K$, a więc $\varepsilon(H)\subset\ker\gamma$, co pociąga za sobą $\overline{\varepsilon(H)}^{G}\subset\ker\gamma$. Na mocy lematu 3.4 $\beta(\overline{H\cup N}^{P})\subset\overline{\beta(H)}^{G} = \overline{\varepsilon(H)}^{G}$

Dowodzimy teraz, że $\ker\gamma\subset\beta(\overline{H\cup N}^{P})$. Niech $[x]\in\ker\gamma$. Wtedy $\varphi^{K}_{SH}(x) = e_K$. Ponieważ $x\in\mathcal{F}_{S\cup K\cup H}$, więc istnieją $y_1,y_2,\dots y_n\in S\cup K\cup H$ takie, że $x = y_1*y_2*\dots*y_n$. Oznaczymy przez $r_0 := e_K$ oraz $r_{i+1} := r_i\,\varphi^{K}_{SH}(y_{i+1})$. Podpółgrupa N jest pełna, więc istnieją $\xi_i\in P$ takie, że $r_i*\xi_i\in N$. Ponieważ $\varphi^{K}_{SH}(x) = e_K$, więc $r_n = e_K$ i stąd $\xi_n\in N$.

Przypuśćmy, że $y_i\in S\cup H$. Wtedy $r_i = r_{i-1}$, a więc $r_{i-1}*\xi_i\in N$. Warunek f) pociąga za sobą $S\cup H\subset\overline{H\cup N}^{P}$. Ponieważ $\overline{H\cup N}^{P}\lhd P$, więc $r_{i-1}*y_i\ \xi_i\in\overline{H\cup N}^{P}$.

Przypuśćmy, że $y_i\in K$. Wtedy $r_i = r_{i-1}\,y_i$. Mamy $r_i*\xi_i\in N$, a więc $(r_{i-1}\,y_i)*\xi_i\ N$ i na mocy warunku g) $r_{i-1}*y_i*\xi_i\in\overline{H\cup N}^{P}$.

Mamy ostatecznie $\bigwedge_i r_{i-1} * y_i * \xi_i \in \overline{H \cup N}^P$, a więc $r_0 * y_1 * \xi_1 * r_1 * y_2 * \xi_2 * \ldots$ $\ldots * r_{n-1} * y_n \xi_n \in \overline{H \cup N}^P$. Na mocy lematu 3.2b) $\xi_i * r_i \in N$ oraz dalej na mocy lematu 3.2c)

$$x = y_1 * y_2 * \ldots * y_n \in \overline{H \cup N}^P, \text{ a więc } [x] \in \beta(\overline{H \cup N}^P).$$

Udowodniliśmy powyżej, że $\ker \gamma \subset \beta(\overline{H \cup N}^P)$. Razem z poprzednio wykazanymi inkluzjami $\beta(\overline{H \cup N}^P) \subset \overline{\mathcal{E}(H)}^G \subset \ker \gamma$ otrzymujemy $\overline{\mathcal{E}(H)}^G = \ker \gamma$.

c) $\pi\mathcal{E}(h) = \pi([h]) = \varphi^H_{SK}(h) = h$, więc $\pi\mathcal{E} = id_H$.

LITERATURA

[1] Z. Semadeni, A. Wiweger: Wstęp do teorii kategorii i funktorów. Warszawa 1978 r.

[2] M. Żabka: Produkt półprosty i koprodukt półprosty w kategorii z obiektem zerowym. (w druku).

[3] A. Clifford, G. Preston: Algiebraicieskaja teoria poługrupp t. I i II.

НЕКОТОРАЯ КОНСТРУКЦИЯ ПОЛУПРЯМОГО КОПРОДУКТА
В КАТЕГОРИИ ГРУПП

Р е з ю м е

В статье общие определение полупрямого произведение в категории с нулевым объектом применено в категории групп. Группа Г является полупрямым произведением групп К и Н когда существують гомоморфизмы группы Г на группы К и Н и гомоморфизм группы Н в группу Г такие что минимальная нормальная подгруппа в группе Г содержающая образ группы Н является ядром гомоморфизма Г на К и тоже сложение гомоморфизма Н на Г с гомоморфизмом Г на Н является идентическим гомоморфизмом на Н.

Кроме того в статье изложен способ конструкции полупрямого произведения в категории групп. Для сконструирования полупрямого произведения групп следует полугруппу последовательностей элементов данных групп и некоторой произвольной группы сфакторизовать по полугруппе удовлетворяющей определённым условиям. Используется эту конструкцию мы получим все полупрямые произведения данных групп но вообще говоря каждое полупрямые произведение больше чем раз.

CARTAIN STRUCTURE OF SEMI-SIMPLE CO-PRODUKT IN A GROUP CATEGORY

S u m m a r y

The purpose of the paper is to show how a semisimple coproduct in the category of groups can be constructed. The general definition of the semisimple coprodukte in a category with zero object is applied to the category og groups. A group G is the semisimple coproduct of groups K and H if there exista homomorphisms of G on K and H and a homomorphism of H onto G and the minimal invariant subgroup of G, wich contains a image of H, is a kernel of the homomorphism of G on K and also a composition of the homomorphism of H onto G with the homomorphism of G on H is an identity homomorphism of H. Using this theorem we can check if a certain group is the semisimple coproduct of given groups or not.

The next part of the paper contains a construction of semisimple coproduct of groups. Roughly speaking, we construct the semisimple coproduct dividing the semigroup of the sequences of elements of given groups and any group by certain it's subsemigroup wich holds some conditions. In this way we can construct all semisimple coproducts but it may happen that using another any group and another subsemigroup we will obtain the same semisimple coproduct.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji

Recenzent:
Doc. dr hab. Władysław Kulpa