ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Adam CZECH, Danuta JAMA

BADANIE STABILNOŚCI PEWNYCH ROWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH WYŻSZEGO RZĘDU

Streszczenie: W pracy stosując oszacowanie energetyczne badamy stabilność rozwiązań równań postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(t,x)u - d(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$(t,x)\in\Omega = [0,\infty)\times[0,1]$$

$$u(0,x) = \varphi_0(x) \qquad x\in[0,1]$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad x\in[0,1]$$

z dowolnym układem warunków brzegowych w punktach x = 0 i x = 1. Otrzymano oszacowanie

$$\|u\| = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\left[\int_0^1 \left[(\varphi_1(x))^2 + \left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^5}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + (\varphi_0)^2\right] dx\right]^{1/2}$$

o ile współczynniki spełniają następujące założenia:

a) $a(x) \geqslant 0, \quad b(x) \geqslant 0, \quad b(0) = 0$

$$a(0) = a(1) = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0$$

b) $c(t,x) > M_1 > 0, \quad d(t,x) \geqslant 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \tau} \leqslant 0$

c) $\max\left[\sup_{x\in[0,1]} a(x), \quad \sup_{x\in[0,1]} b(x), \quad \sup_{(t,x)\in\Omega} c(t,x)\right] \leqslant M_2$

Rozpatrujemy także równanie postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_1 \frac{\partial u}{\partial t} + L_2 u + L_3(t)u(t,x) + g(u) = 0$$

$$(t,x) \in [0,T] \times [0,1]$$

z zespołem warunków początkowych i zerowym warunkiem brzegowym, gdzie L_1, L_2, $L_3(t)$ są liniowymi operatorami różniczkowymi względem $x \in R^1$. Dla funkcjonału

$$V(t) = \frac{1}{4}\int_0^1 (L_1 u)^2 dx + \int_0^1 uL_2 u dx + \int_0^1 \left(\frac{L_1 u}{2} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx +$$

$$+ \int_0^1 \left[2 \int_0^u g(\eta) d\eta\right] dx$$

uzyskano oszacowanie

$$V(t) \leqslant V(0) \exp \int_0^t N(\tau)\, d\tau$$

przy założeniach:

a) $\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} L_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx \geqslant \lambda \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \qquad 1 - \lambda \leqslant 0$

b) $\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} L_2 u dx = \int_0^1 uL_2 \frac{\partial u}{\partial t} dx$

c) $\int_0^1 L_1 u L_2 u dx \geqslant 0, \qquad \int_0^1 L_1 u L_3(t) u dx \geqslant 0 \qquad \bigwedge t \geqslant 0$

$\int_0^1 L_1 u g(u) dx \geqslant 0, \qquad \int_0^1 \left[\int_0^u g(\eta) d\eta\right] dx \geqslant 0$

d) $\int_0^1 (L_3 u)^2 dx \leqslant N(t) \int_0^1 uL_2 u dx, \qquad g(u)$ - funkcja ciągła.

Otrzymane wyniki wykorzystano do badania stabilności rozwiązań trywialnych rozpatrywanych równań.

Rozpatrzmy równanie postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(a(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(b(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(t,x)u - d(t,x) \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (I)$$

określone dla $(t,x) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,1]$
z warunkami początkowymi:

I.1. $u(0,x) = \varphi_0(x)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad \text{dla } x \in [0,1]$$

Oceny rozwiązań równania dokonamy w oparciu o pojęcie normy z przestrzeni L^2.

Twierdzenie 1

Jeżeli dla $(t,x) \in \Omega$ współczynniki powyższego równania spełniają warunki:

a) $a(x) \geqslant 0$, $b(x) \geqslant 0$ oraz

$$a(0) = a(1) = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=1} = b(0) = 0$$

b) $c(t,x) > M_1 > 0$ $d(t,x) \geqslant 0$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \leqslant 0$$

c) $\max \left[\sup_{x \in [0,1]} a(x), \sup_{x \in [0,1]} b(x), \sup_{(t,x) \in \Omega} c(t,x)\right] \leqslant M_2$

to

$$\|u\| \leqslant \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \left[\int_0^1 \left[(\varphi_1(x))^2 + \left(\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \varphi_0^2\right] dx\right]^{1/2}$$

Dowód

Niech

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a(x)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + b(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c(t,x)u^2 \right] dx \qquad (1)$$

Różniczkując równanie (1) względem t mamy

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} + b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \right.$$
$$\left. + c(t,x)u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t}u^2 \right] dx \qquad (2)$$

Wykorzystując założenie a) przekształcamy pewne człony prawej strony powyższego równania (2)

$$\int_0^1 a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}dx = \left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 t}dx =$$

$$= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}dx =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx = \qquad (3)$$

$$= -\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx$$

Analogicznie

$$\int_0^1 b(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}dx = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx \qquad (4)$$

Z (2), (3), (4) mamy

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(a(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(t,x) u \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial c}{\partial t} u^2 \right\} dx \tag{5}$$

Z (I) i (5) otrzymujemy

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 \left[- d(t,x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial c}{\partial t} u^2 \right] dx \tag{6}$$

Na mocy założenia b) z (6) mamy

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0 \tag{7}$$

czyli

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a(x) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 + b(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + c(t,x) u^2 \right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(\varphi_1(x))^2 + a(x) \left(\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} \right)^2 + b(x) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + c(0,x) \varphi_0^2 \right] dx \tag{8}$$

Na mocy nierówności (8) i założeń a), b), c) otrzymujemy

$$M_1 \int_0^1 u^2 dx \leqslant M_2 \int_0^1 \left[(\varphi_1(x))^2 + \left(\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x})^2 + \varphi_0^2 \right] dx \tag{9}$$

c.k.d.

Rozpatrzmy równanie postaci

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + L_2 u(t,x) + L_3(t) u(t,x) + g(u) = 0 \tag{II}$$

z zerowymi warunkami brzegowymi i następującymi warunkami początkowymi:

II.1. $u(0,x) = \varphi_1(x) = u_0$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x)$$

gdzie:

L_1, L_2, $L_3(t)$ są pewnymi liniowymi operatorami różniczkowymi względem $x \in R$.

Przyjmujemy, że powyższe równanie jest określone w $\Omega = [0,T] \times [0,1]$ gdzie $0 < T \leqslant \infty$.

Do badania tego równania wykorzystujemy funkcjonał postaci:

$$V(t) = \frac{1}{4}\int_0^1 (L_1u(t,x))^2dx + \int_0^1 u(t,x)L_2u(t,x)dx + \\ + \int_0^1 \left(\frac{L_1u(t,x)}{2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^1\left[2\int_0^u g(\eta)d\eta\, dx\right] \tag{1}$$

Twierdzenie 2

Jeżeli operatory występujące w równaniu (II) dla każdego $x \in \bigcap_{i=1}^{3}\mathfrak{D}(L_i)$, $t \geqslant 0$ spełniają następujące warunki:

a) $\lambda = \text{const}$ $\int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx \geqslant \lambda \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 dx$ $\quad 1 - \lambda \leqslant 0$

b) $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_2u(t,x)dx = \int_0^1 u(t,x)\, L_2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx$

c) $\int_0^1 L_1u(t,x)\; L_2u(t,x)\; dx \geqslant 0$

$\int_0^1 L_1u(t,x)\; L_3(t)u(t,x)dx \geqslant 0$

$\int_0^1 L_1u(t,x)g(u)dx \geqslant 0$, $\quad \int_0^1\left[\int_0^u g(\eta)\; d\eta\right]dx \geqslant 0$

d) $\bigvee\limits_{N(t)} \int\limits_0^1 (L_3(t)u(t,x))^2 dx \leqslant N(t) \int\limits_0^1 u(t,x)\, L_2 u(t,x) dx$

e) $g(u)$ - ciągła funkcja zmiennej u, to dla każdego t słuszna jest nierówność

$$V(t) \leqslant V(0) \exp \int\limits_0^t N(\tau) d\tau$$

Dowód:

Obliczając pochodną $\frac{dV(t)}{dt}$ wzdłuż rozwiązania równania (II) otrzymujemy z (1)

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 L_1 u(t,x)\, L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx + \int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_2 u(t,x) +$$

$$+ u(t,x)\, L_2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx + \int\limits_0^1 \Big[\Big(\frac{1}{2} L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t}\Big)\Big(\frac{1}{2} L_1 u(t,x) +$$

$$+ \Big(\frac{1}{2} L_1 u(t,x) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big)\Big(\frac{1}{2} L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t}\Big)\Big] dx + \tag{2}$$

$$+ 2 \int\limits_0^1 g(u) \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx$$

Przekształcając i wykorzystując założenie b) mamy:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int\limits_0^1 L_1 u(t,x)\, L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx + \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} L_1 u(t,x) + 2 \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_2 u(t,x) dx +$$

$$+ 2 \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} g(u) dx + 2 \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \tag{3}$$

Z (II) i (3) otrzymujemy

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1 L_1u(t,x)\left(-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - L_2u(t,x) - L_3u(t,x) - g(u)\right)dx +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx + \int_0^1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} L_1u(t,x)dx + \tag{4}$$

$$+ 2\int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\left(-L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - L_3u(t,x)\right)dx$$

Z (4) mamy

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\left[\int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx + \int_0^1 L_1u(t,x)\, L_2u(t,x)dx +\right.$$

$$+ \int_0^1 L_1u(t,x)\, L_3u(t,x)dx + \int_0^1 L_1u(t,x)g(u)dx + \tag{5}$$

$$+ 2\int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_3u(t,x)dx$$

Wykorzystując założenie a) i dokonując prostego przekształcenia dostajemy nierówność

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant -\left[\lambda\int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^1 L_1u(t,x)\, L_2u(t,x)dx +\right.$$

$$+ \int_0^1 L_1u(t,x)\, L_3u(t,x)dx + \int_0^1 L_1u(t,x)g(u)dx + \tag{6}$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + L_3(t)u(t,x)\right)^2 dx - \int_0^1 (L_3(t)u(t,x))^2 dx - \tag{6}$$

$$- \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 dx$$

Na mocy założenia c) z (6) otrzymujemy

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq N(t) \int_0^1 u(t,x)L_2u(t,x)dx \leq$$

$$\leq N(t)\left[\frac{1}{4}\int_0^1 (L_1u(t,x))^2 dx + \int_0^1 u(t,x)L_2u(t,x)dx + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \int_0^1 \left(\frac{L_1u(t,x)}{2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^1 2\left[\int_0^u g(\eta)d\eta\right]dx\right] = N(t)V(t)$$

Z (7) dostajemy

$$V(t) \leq V(0)\exp \int_0^t N(\tau)d\tau$$

c.k.d

Uwaga 1.

Twierdzenie 2 jest uogólnieniem poniższego przykładu. Przykład ma pokazać, że istnieją równania spełniające założenia a) - d) twierdzenia (2).

Przykład:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + 2z\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + A(t)\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + u^3 = 0 \qquad \text{II.(8)}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x)$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) \qquad \text{II.(9)}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,1)}{\partial t} = 0 \qquad \text{II.(10)}$$

z - stała

W tym przykładzie

$$L_1u(t,x) = 2zu(t,x)$$

$$L_3u(t,x) = A(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

$$L_2u(t,x) = -\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x}$$

$$g(u) = u^3(t,x)$$

Sprawdzamy założenia twierdzenia 2

ad. a) $\int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dx = 2z\int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 dx \qquad \lambda = 2z > 1$

ad. b) $\int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} L_2u(t,x)\,dx = \int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\left(-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)dx =$

$$= -\int_0^1 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\, x}\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\,dx =$$

$$= -\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_0^1 + u(t,x)\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 u(t,x)\,\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^2}\,dx =$$

$$= - \int_0^1 u(t,x) \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\, \partial x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 u(t,x)\, L_2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx$$

ad. c) $$\int_0^1 L_1 u(t,x)\, L_2 u(t,x) dx = \int_0^1 2zu(t,x)\left(- \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right) dx =$$

$$= - 2z \int_0^1 u(t,x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dx =$$

$$= - 2zu(t,x) \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1 + 2z \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 L_1 u(t,x)\, L_3(t) u(t,x)\, dx = \int_0^1 2zu(t,x)\, A(t) \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx =$$

$$= 2zA(t)\, u(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx = zA(t) \int_0^1 \frac{\partial (u^2(t,x))}{\partial x} dx = 0$$

$$\int_0^1 L_1 u(t,x) g(u) dx = \int_0^1 2zu(t,x) u^3(t,x) dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^u g(\eta) d\eta\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^u \eta^3 d\eta\right] dx = \frac{1}{4} \int_0^1 u^4(t,x) dx \geqslant 0$$

ad. d) $$\int_0^1 (L_3(t) u(t,x))^2 dx = \int_0^1 \left(A(t) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx =$$

$$= A^2(t) u(t,x) \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_0^1 - A^2(t) \int_0^1 u(t,x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dx =$$

$$= A^2(t) \int_0^1 u(t,x) L_2 u(t,x) dx$$

$$N(t) = A^2(t)$$

ad. e) $g(u) = u^3(t,x)$ - funkcja ciągła.

A więc z tezy twierdzenia 2 mamy:

$$V(t) \leq V(0)\exp \int_0^1 A^2(\tau)\, d\tau \tag{11}$$

Wykażmy również stabilność rozwiązania równania II (8) - II(10) względem warunków początkowych

$$\frac{1}{4}\int_0^1 (L_1 u(t,x))^2 dx = z^2 \int_0^1 u^2(t,x)dx = z^2\|u(t,x)\|^2 \tag{12}$$

$$\int_0^1 u(t,x)L_2 u(t,x)dx = -\int_0^1 u(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}dx =$$

$$= -u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2 dx \geq 0 \tag{13}$$

Z (1), (12), (13) mamy

$$z^2\|u(t,x)\|^2 \leq V(t) \tag{14}$$

Uwzględniając następnie (12) z (14) otrzymujemy

$$z^2\|u(t,x)\|^2 \leq V(0)\exp \int_0^t A^2(\tau)\, d\tau \tag{15}$$

Dla równania II.(8) - II.(10), V(t) określone (1) dla t = 0 przyjmuje postać:

$$V(0) = \frac{1}{4}\int_0^1 \left[L_1 \varphi_1(x)\right]^2 dx + \int_0^1 (\varphi_1(x)L_2 \varphi_2(x))\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} L_1 \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right)^2 dx + \int_0^1 2\left[\int_0^{\varphi_1(x)} g(\eta)d\eta\right]dx \tag{16}$$

$$V(0) = z^2 \int_0^1 \varphi_1^2(x)dx + \int_0^1 \varphi_1(x)\left(-\frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x}\right)dx +$$
$$+ \int_0^1 z\left[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right]^2 dx + 2\int_0^1 \frac{1}{4}\varphi_1^4(x)dx \tag{17}$$

Z (10), (9) mamy

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0 \tag{18}$$

$$z^2 \int_0^1 \varphi_1^2(x)dx = z^2\|\varphi_1(x)\|^2 \tag{19}$$

$$\int_0^1 \varphi_1(x)\left(-\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x^2}\right)dx = -\varphi_1(x)\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\Bigg|_0^1 + \int_0^1\left(\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right)^2 dx =$$
$$= \left\|\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right\|^2 \tag{20}$$

$$\int_0^1 (z\,\varphi_1(x) + \varphi_2(x))^2 dx = \|z\,\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant z^2\|\varphi_1(x)\|^2 + 2z\|\varphi_1(x)\|\,\|\varphi_2(x)\| + \|\varphi_2(x)\|^2 \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_1^4(x)dx = \frac{1}{2}\|\varphi_1^2(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_1(x)\|^2 \tag{22}$$

Uwzględniając (19) - (22) z (15) otrzymujemy

$$\|u(t,x)\|^2 \leqslant \left[\|\varphi_1(x)\|^2\left(2 + \frac{1}{2z^2}\right) + \frac{2}{z}\|\varphi_1(x)\|\,\|\varphi_2(x)\| +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{z}\|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{1}{z^2}\left\|\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right\|^2\right] \exp\int_0^1 A^2(\tau)\,d\tau \tag{23}$$

Jeżeli

$$\exp \int_0^t A^2(\tau)d\tau < M < \infty \tag{24}$$

oraz

$$\left[\|\varphi_1(x)\|^2\left(2 + \frac{1}{2z^2}\right) + \frac{2}{z}\|\varphi_1(x)\|\,\|\varphi_2(x)\| + \frac{1}{z^2}\|\varphi_2(x)\|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{z^2}\left\|\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right\|^2 \tag{25}$$

wówczas z (23), (24), (25) mamy

$$\|u(t,x)\|^2 \leq \delta M$$

Dla ustalonego ε wybierając $\delta = \frac{\partial^2}{M}$ otrzymujemy

$$\|u(t,x)\| < \varepsilon$$

<u>Wniosek 1</u>

Rozwiązanie trywialne rozpatrywanego równania II.(8) - II.(10) jest stabilne względem warunków początkowych.

<u>Uwaga 2</u>

Jeżeli w powyższym przykładzie z funkcję g(u) przyjąć $g(u) = u^{2n-1}$, to zachodzi również twierdzenie 2 jak i wniosek 1. Można to wykazać przez analogiczne postępowanie.

LITERATURA

[1] P.C. Parks: A Stability Criterion for Panel Flutter via the Second Method of Liapunov. AIAA Journal, Vol 4,1966, No 1, 175-177.

[2] P.C. Parks, A.J. Pritchard: On the Construction and Use of Liapunov Functionals. IFAC Conger., Techn. session 20, Stability, NOT, Warszawa 1969, 59-79.

[3] P.C. Parcs: Some Applications of Liapunov Functionals, Instability of Continous Systems, IUTAM Symp on Instab. Cont. Syst., Haarnalb, Sept. 1969, Springer, Berlin-Heidelberg - N.Y., 1971.

[4] G. Peyser: Energy Intergrals for the Mixes Problem in Hyperbolic Partial Differential Eugations of Higher Order. Journal Math. and Mech. No 6, 1957, str. 641-53.

[5] J. Szarski: Differential Ingeualities, Warszawa 1967.

[6] A. Tylikowski: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Automatyka, No 20, 1972.

[7] T. Yoshizawa: Stability and Boundedness of Systems, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 6, 1969, No 5, 409-421.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫШЕЙ СТЕПЕНИ

Р е з ю м е

В работе используется энергетическая оценка для исследования стабильности решений уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(a(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(b(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(t,x)u - d(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$(t,x)\in\Omega = [0,\infty)\times[0,1]$$

$$u(0,x) = \varphi_o(x) \qquad x\in[0,1]$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad x\in[0,1]$$

с произвольной системой граничных условий в пунктах $x=0$ и $x=1$.

Получена оценка

$$\|u\| = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\left[\int_0^1\left[(\varphi_1(x))^2 + \left(\frac{\partial^3\varphi_o}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_o}{\partial x}\right)^2 + (\varphi_o)^2\right]dx\right]^{1/2}$$

для коэффициентов удовлетворяющих следующие условия:

a) $a(x)\geqslant 0, \quad b(x)\geqslant 0, \quad b(0) = 0$

$$a(0) = a(1) = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0$$

b) $c(t,x) > \mu_1 > 0, \quad d(b,x)\geqslant 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t}\leqslant 0$

c) $\max\left[\sup_{x\in[0,1]} a(x),\ \sup_{x\in[0,1]} b(x),\ \sup_{(t,x)\in\Omega} c(t,x)\right]\leqslant\mu_2$

Рассматривается также уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_1\frac{\partial u}{\partial t} + L_2 u + L_3(t)u(t,x) + q(u) = 0 \qquad (t,x)\in[0,1]\times[0,1]$$

с данными начальными условиями и нулевым граничным условием, где L_1, L_2, $L_3(\tau)$ – линейные дифференциальные операторы относительно $x \in R^1$.

Для функционала

$$V(t) = \frac{1}{4}\int_0^1 (L_1u)^2dx + \int_0^1 uL_2udx + \int_0^1 \left(\frac{L_1u}{2} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^1\left[2\int_0^u q(\eta)d\eta\right] dx$$

получена оценка

$$\bigwedge_{t\geqslant 0} V(t) \leqslant V(0)\, \exp \int_0^t N(\tau)d\tau$$

при условиях

a) $\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} L_1 \frac{\partial u}{\partial t}\, dx \geqslant \lambda \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \qquad 1 - \lambda \leqslant 0$

b) $\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} L_2udx = \int_0^1 uL_2 \frac{\partial u}{\partial t}\, dx$

c) $\int_0^1 L_1uL_2udx \geqslant 0, \qquad \int_0^1 L_1uL_3(t)udx \geqslant 0 \qquad \bigwedge t \geqslant 0$

$\int_0^1 L_1ug(u)dx \geqslant 0, \qquad \int_0^1 \left[\int_0^u g(\eta)d\eta\right]dx \geqslant 0$

d) $\int_0^1 (L_3u)^2dx \leqslant N(t) \int_0^1 uL_2udx$

Полученные результаты используются для исследования стабильности тривиальных решений рассматриваемых уравнений.

TESTING OF STABILITY OF CERTAIN HIGHER ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m a r y

In this work an energetic estimation is used for the studying of the stability of the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(a(x)\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(b(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(t,x)u - d(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$(t,x) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,1]$$

$$u(0,x) = \varphi_0(x) \qquad x \in [0,1]$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad x \in [0,1]$$

with a given initial conditions for x = 0 and x = 1.
The estimation achieved

$$\|u\| = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1}}\left[\int_0^1 \left[(\varphi_1(x))^2 + \left(\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + (\varphi_0)^2\right]dx\right]^{1/2}$$

for the coefficients satisfying:

a) $a(x) \geqslant 0, \quad b(x) \geqslant 0, \quad b(0) = 0$

$$a(0) = a(1) = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_{x=1} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0$$

b) $c(t,x) \geqslant M_1 \quad 0, \quad d(t,x) \geqslant 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} \leqslant 0$

c) $\max\left[\sup_{x \in [0,1]} a(x), \quad \sup_{x \in [0,1]} b(x), \quad \sup_{(t,x) \in \Omega} c(t,x)\right] \in M_2$

The equation of the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_1\frac{\partial u}{\partial t} + L_2 u + L_3(t)u(t,x) + g(u) = 0$$

$$(t,x) \in [0,T] \times [0,1]$$

is considered for given initial conditions and zero boundary conditions where L_1 . L_2. $L_3(t)$ are differentical operators for $x \in R^1$.
For the functional

$$V(t) = \frac{1}{4}\int_0^1 (L_1u)^2dx + \int_0^1 uL_2udx + \int_0^1 \left(\frac{L_1u}{2} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx +$$

$$+ \int_0^1 \left[2\int_0^u g(\eta)d\eta\right]dx$$

at the conditions:

$$a)\ \int \frac{\partial u}{\partial t} L_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx \geq \lambda \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \qquad 1 - \lambda \leq 0$$

$$b)\ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} L_2udx = \int_0^1 uL_2 \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

$$\int_0^1 L_1uL_2udx \geq 0, \qquad \int_0^1 L_1uL_3(t)udx \geq 0 \qquad \bigwedge t \geq 0$$

$$\int_0 L_1ug(u)dx \geq 0, \qquad \int_0^1\left[\int_0^u g(\eta)d\eta\right]dx \geq 0$$

$$d)\ \int_0^1 (L_3u)^2dx \leq N(t) \int_0 uL_2udx$$

the estimation follows

$$\bigwedge_{t \geq 0} V(t) \leq V(0) \exp \int_0^1 N(\tau)d\tau$$

The obtained results are used for studying the stability of the trivial solution of the considered equation.

Wpłynęło do Redakcji:
7.XI.1982

Tłumaczył: Macedońska-Nosalska
Zuziak

Recenzent:
Prof. dr hab. Andrzej Tylikowski