ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Danuta JAMA, Adam CZECH

PEWNE WŁASNOŚCI UOGÓLNIONEGO ROZWIĄZANIA NIELINIOWEGO RÓWNANIA FALOWEGO

Streszczenie. Stosując w pracy znane metody badania uogólnionych rozwiązań równań liniowych rozszerzamy je na nieliniowe równania falowe postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + F(t,x,u) = f(t,x) \qquad (t,x) \in [0,T] \times \Omega$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega,$$

gdzie $f(t,x)$, $b(t,x)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$

$$F(t,x,u) \in L_\infty((0,T);\ H_0^1(\Omega))$$

$$u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$$

Badamy uogólnione rozwiązanie powyższego równania klasy

$$L^\infty([0,T];\ H_0^1(\Omega) \cap L_2(\Omega))$$

Głównym rezultatem jest oszacowanie postaci

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \leqslant m,$$

gdzie m jest stałą zależną od $\|u_0\|$, $\|u_1\|$, T. Oszacowanie zostało wyprowadzone przy następujących założeniach:

a) $b(t,x) \geqslant b_1(t) \geqslant 0$

b) $uF_z(t,x,u) \leqslant 0$, $\quad uF(t,x,u) \geqslant 0$, $\quad F(t,x,0) = 0$

$\cancel{c \leqslant F_u(t,x,u) \leqslant 0 \qquad c = \mathrm{const.}}$

przy spełnieniu dodatkowego założenia

$$\bigvee_{T_1} \bigwedge_{t > T_1} \left[1 - \frac{2}{t} \int_0^t b_1(t)dt\right] < 0$$

uzyskano wyniki:

$$\lim_{t\to\infty} \|u_t\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = K, \quad K \text{ - pewna stała.}$$

Z otrzymanych oszacowań wyciągnięto wnioski dotyczące istnienia, jednoznaczności i ciągłej zależności od danych rozpatrywanego równania. W pracy wykorzystano symbolikę użytą w monografii [1]. Otrzymane wyniki mogą być wykorzystane także w badaniu stabilności rozwiązań rozpatrywanych równań.

Podstawowe pojęcia i oznaczenia:

Ω - zbiór otwarty i spójny zawarty w R^n

$dx - dx_1 dx_2 \ldots dx_n = d\Omega$

$L^2(\Omega)$ - przestrzeń funkcji całkowanych z drugą potęgą

$$\|u(t,x)\|_{L^2} = \left(\int_\Omega u^2(t,x)dx\right)^{1/2}$$

$H_0^1(\Omega)$ - przestrzeń Sobolewa funkcji z $L_2(\Omega)$ mających pierwsze uogólnione pochodne względem x_i - u'_{x_i} oraz $u'_{x_i} \in L_2(\Omega)$ z normą

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u'_x\|_{L_2(\Omega)}$$

oraz równych zero w pewnym otoczeniu brzegu obszaru Ω gdzie

$$\|u'_x\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

Oznaczając

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

mamy

$$\| u'_x \|^2_{L^2(\Omega)} = a(u,u)$$

$\| u \|_{H_0^1(\Omega)}$ jest równoważna $[a(u,u)]^{1/2}$

$$(u,v) = \int_{\Omega} uv \, dx$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Rozpatrzmy równanie

$$\text{I.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t,x) \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + F(t,x,u) = f(t,x)$$

określone dla $(t,x) \in [0,T] * \Omega = V$
o warunkach początkowych postaci:

$$u(o,x) = u_o(x)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x)$$

i zerowych warunkach brzegowych gdzie

$t \in [0,T)$ $f(t,x)$; $b(t,x)$; $u_1(x) \in L^2(\Omega)$

$F(t,x,u) \in L_{\infty}((0,T); H_0^1(\Omega))$

$u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$

Będziemy badać uogólnione rozwiązania u równania I należące do przestrzeni $L_\infty([0,T]; H_0^n(\Omega) \cap L_2(\Omega))$ gdzie, przez uogólnione rozwiązanie rozumiemy funkcję z powyższej przestrzeni spełniającą tożsamość całkową:

$$1.\ \int_\Omega u_t'' u_t' dx + \int_\Omega b(t,x) u_t' u_t' dx - \int_\Omega \Delta u u_t' dx + \int_\Omega F(t,x,u) u_t' dx =$$

$$= \int_\Omega f(t,x) u_t' dx$$

Twierdzenie 1

Jeżeli dla $(t,x) \in V$

a) $b(t,x) \geqslant b_1(t) \geqslant 0$

b) $uF_t(t,x,u) \leqslant 0, \quad uF(t,x,u) \geqslant 0, \quad F(t,x,o) = 0$

$c \leqslant F_u(t,x,u) \leqslant 0 \quad c=\text{const}$

to dla ogólnego rozwiązania równania I.

$$\bigvee_m (\|u_0\|, \|u_1\|, T) \|u_t'\|_{L_2(\Omega)} \leqslant m$$

Dowód:

Mnożąc równanie I przez u_t i całkując obie strony po Ω oraz uwzględniając wprowadzone oznaczenia otrzymujemy

$$2.\ (u_t'', u_t') + (b(t,x) u_t', u_t') - (\Delta u u_t') + (F(t,x,u) u_t') = (f, u_t')$$

przekształcamy poszczególne człony powyższej równości. Całkując przez części wykorzystując zerowy warunek brzegowy otrzymujemy:

$$3.\ -(\Delta u, u_t') = a(u, u_t')$$

$$4.\ (u_{tt}'', u_t') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$5.\ (b(t,x) u_t', u_t') = \int_\Omega b(t,x) (u_t')^2 dx \geqslant b_1(t) \|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)}$$

6. $(F(t,x,u),u_t') = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} Fudx - \int\limits_{\Omega} u \frac{d}{dt} F(t,x,u)dx$

Wykorzystując przekształcenia 3 - 6, otrzymujemy z 2 następującą nierówność

7. $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u,u) + b_1(t)\|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)} + \right.$$

$$+ \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} Fudx \leqslant \int\limits_{\Omega} u \frac{d}{dt} F(t,x,u)dx + (f,u_t')$$

przy czym

a) $(u,u_t') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u,u)$

ale

$$\frac{d}{dt} F(t,x,u) = F_t' + F_u' u_t'$$

mnożąc obie strony powyższego równania przez u i dokonując prostych przekształceń mamy

$$\left[u \frac{d}{dt} F(t,x,u) = uF_t' + F_u' u_t' u = uF_t' + \frac{1}{2} F_u' [u^2]_t\right.$$

Możliwe są dwa przypadki:

a) $[u^2]_t' < 0$

wtedy na mocy założeń twierdzenia mamy

$$F_u'[u^2]_t \leqslant c[u^2]_t' = c \frac{d}{dt} u^2$$

i nierówność 7 otrzyma postać

8. $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u,u) + 2\int\limits_{\Omega} Fudx\right] + b_1(t)\|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} uF_t'dx + c\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} u^2 dx + (f,u_t') \leqslant c\frac{d}{dt}\|u\|^2 + (f,u_t')$$

Całkując obie strony nierówności (8) od 0 do t mamy

$$9.\ \frac{1}{2}\|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(u,u) + \int_\Omega Fu\,dx + \int_0^t b_1(t)\|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(u_o,u_o) + \int_\Omega F(o,x,u_o)u_o dx + c\|u\|^2_{L^2}$$

$$- c\|u_o\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^t \|f\|^2_{L_2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t'\|^2_{L_2}\,dt$$

przy wykorzystaniu warunków brzegowych.
Wykorzystując założenia twierdzenia 1, nierówność

$$\int_0^t \|u'\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \leq \int_0^t \|u'\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T$$

oraz równoważność $\sqrt{a(u,u)} = \|u\|_{H_o^1(\Omega)}$ mamy:

$$11.\ \|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \Big[\|u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_o\|^2_{H_o^1(\Omega)} + 2\int_\Omega F(0,x,u_o)\,u_o\,dx -$$

$$- c\|u_o\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^T \|f\|^2 dt + \int_0^t \|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasie kwadratowym przez $M_1(\|u_o\|, \|u_1\|, T)$ mamy:

$$12.\ \|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)} \leq M_1(\|u_o\|, \|u_1\|, T) + \int_0^t \|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt$$

Wykorzystując nierówność Gronwalla-Bellmana otrzymujemy

$$13.\ \|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)} \leq M_1(\|u_o\|, \|u_1\|, T)e^t \leq$$

$$\leq M_1(\|u_o\|, \|u_1\|, T)e^T = \bar{c}_1 \quad \text{dla} \quad 0 < t < T$$

b) $[u^2]'_T \geq 0$

wówczas na mocy założeń twierdzenia 1

14. $F_u(t,x,u)\left[u^2\right]'_t \leqslant 0$

Z 7, 8 i 14 otrzymujemy

15. $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_t\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u,u) + b_1(t)\|u'_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\int_\Omega Fudx \leqslant (f,u')\right.$

Wykorzystując analogiczne przekształcenie jak w a) otrzymujemy

16. $$\|u'_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left[\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_o\|^2_{H^1_o(\Omega)} + 2\int_\Omega F(0,x,u_o)u_o dx + \right.$$

$$+ \int_0^T \|f\|^2 dt + \int_0^t \|u'_t\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasie kwadratowym przez $M_2(\|u_o\|,\|u_1\|,T)$ i wykorzystując nierówność Gronwalla-Bellmana otrzymujemy

17. $\|u'_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant M_2(\|u_o\|,\|u_1\|,T)\ e^T = \overline{c}_2$ dla $o < t < T$

Niech $m = \max\left[\overline{c}_1,\overline{c}_2\right]$

a więc z 13 i 17 mamy

$$\|u'_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant m$$

c.n.d.

Uwaga 1

Wykorzystując otrzymane oszacowanie można stosując metodę Galerkina wykazać istnienie rozwiązania równania I w przestrzeni

$$L^\infty(0,T;H^1_o(\Omega) \cap L^2(\Omega)),$$

natomiast jednoznaczność gwarantuje nam spełnienie warunku Lipschiza przez funkcję $F(t,x,u)$.

Uwaga 2:

Kładąc $M = \max\left[M_1(\|u_0\|,\|u_1\|,T); M_2(\|u_0\|,\|u_1\|,T)\right]$ i wykorzystując przekształcenia w dowodzie twierdzenia I otrzymujemy następujące nierówności:

1^0 $$\|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M - 2\int_0^t b_1(t)\|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^t \|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$

2^0 $$\|u_t'\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M \exp t\left[1 - \frac{2}{t}\int_0^t b_1(t)dt\right]$$

3^0 $$\lim_{t\to\infty}\|u\|^2_{H_2^1(\Omega)} \leq M + \int_0^{\infty} M \exp t\left[1 - \frac{2}{t}\int_0^t b_1(t)dt\right]dt$$

Twierdzenie 2:

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 1, to u jest ciągle zależne od danych początkowych i funkcji f(t,x) na przedziale $[0,T]$.
Dowód wynika z nierówności 10 i 15 otrzymanych w dowodzie twierdzenia 1.

Twierdzenie 3:

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 1 oraz jeżeli

$$\bigvee_{T_1}\bigwedge_{t>T_1}\left[1 - \frac{2}{t}\int_0^t b_1(t)dt\right] < 0$$

to

1^0 $$\lim_{t\to\infty}\|u_t'\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

2^0 $$\bigvee_{K=\mathrm{const}}\ \lim_{t\to\infty}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = K$$

Dowód wynika wprost z założeń twierdzenia i uwagi 2.

LITERATURA

[1] J.L. Lious: Quelquea methodes de respolution des problemes aux limites non lineaires. Paris 1969.

[2] A. Friedmen: Free boundary problems for parabolic equattions. J.Math. Mech.9/1959/pp.499-518.

[3] S. Krejn: Liniejnyje differiencialnyje uprawnienia w Banachowom prostranstwi. Nauka, 1967.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются известные методы исследования обобщённых решений линейных уравнений и переносятся на случай нелинейных волновых уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + F(t,x,u) = f(t,x) \qquad (t,x) \in [0,T] \times \Omega$$

$$u(0,x) = u_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega$$

где

$$f(t,x), \quad b(t,x), \quad u_1(x) \in L^2(\Omega)$$

$$F(t,x,u) \in L^{\infty}((0,T);\ H_o^1(\Omega))$$

$$u_o(x) \in H_o^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$$

Исследуются обобщённые решения данного уравнения класса

$$L^{\infty}([0,T];\ H_o^1(\Omega) \cap L^2(\Omega))$$

Главным результатом является оценка

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \leqslant m$$

где m – постоянная, зависящая от $\|u_o\|$, $\|u_1\|$, T.
Оценка выводится при следующих предположениях

a) $b(t,x) \geqslant b_1(t) \geqslant 0$

b) $uF_2(t,x,u) \leqslant 0, \quad uF(t,x,u) \geqslant 0, \quad F(t,x,0) = 0$
$c \leqslant F_u(t,x,u) \leqslant 0 \quad c = \mathrm{const}$

При дополнительном предположении

$$\bigvee_{T_1} \bigwedge_{t>T_1} \left[1 - \frac{2}{t}\int_0^t b_1(t)\,dt\right] < 0$$

получено:

$$\lim_{t\to\infty} \|u'_t\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = K \qquad K \text{ – некоторая постоянная}$$

Из полученных оценок следует выводы, касающиеся существования и единственности решения рассматриваемого уравнения. В работе использована символика монографии [1]. Полученные результаты могут быть использованы также для исследования стабильности решений рассматриваемых уравнений.

CERTAIN PROPERTIES OF GENERALIZED SOLUTION OF NON-LINEAR SCHRODINGER EQUATION

S u m m a r y

In the work the known methods for studying generalised colutions of linear equations are considered and used for the case of non-linear wave equations of the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + F(t,x,u) = f(t,x) \qquad (t,x) \in [0,T] \times \Omega$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega$$

where $f(t,x)$, $b(t,x)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$

$$F(t,x,u) \in L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega)$$

$$u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$$

Generalised solutions of class $L^\infty([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ are considered. The main result is the estimation

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \leq m$$

for m constant depending an $\|u_o\|$, $\|u_1\|$, T, The estimation achived under the conditions:

a) $b(t,x) \geqslant b_1(t) \geqslant 0.$

b) $uF_2(t,x,u) \leqslant 0, \quad uF(t,x,u) \geqslant 0, \quad F(t,x,0) = 0$

$c \leqslant F_u(t,x,u) \leqslant 0 \quad c = \text{const.}$

At the additional condition

$$\bigvee_{T_1} \bigwedge_{t>T_1} \left[1 - \frac{2}{t}\int_0^t b_1(t)dt\right] \leqslant 0$$

it follows

$$\lim_{t\to\infty} \|u_t'\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \|u\|_{H_o^1(\Omega)} = K, \quad K - \text{const.}$$

From the given estimations follow the corrolaries concerning the existence and the uniqueness of the solution of given equation. In the work the symbolic forms [1] is used. The results of the work can be used form the studying of the stability of solutions of the considered equations.

Tłumaczyła O. Macedońska-Nosalska

Wpłynęło do Redakcji 25.VIII.1983

Recenzent:
Prof. dr hab. Andrzej Tylikowski