ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Katarzyna JAKOWSKA-SUWALSKA

ROZWIĄZANIA NIELINIOWEGO RÓWNANIA FUNKCYJNEGO SPEŁNIAJĄCE WARUNEK LIPSCHITZA

Streszczenie. W pracy zajęto się problemem istnienia i zależności od dowolnej funkcji rozwiązania równania

$$\varphi(f(x)) = g(x,\varphi(x)) \tag{1}$$

w klasie funkcji spełniających warunek Lipschitza.

Niech $I = [0,a]$ lub $[0,a)$, gdzie $0 < a \leq +\infty$. Niech f, g będą funkcjami danymi spełniającymi w I założenia (i), (ii), (iii). Funkcja φ jest funkcją niewiadomą. W pracy udowodniono:

Twierdzenie. Niech $x_0 \in I$. Jeżeli spełnione są założenia (i), (ii), (iii) oraz istnieje taka liczba $V_{x_0} > 0$, że

$$\sum_{r=1}^{n} \varkappa_r(x_0) \prod_{i=r}^{n-1} \tau_i(x_0) \leq V_{x_0}, \quad n \in N;$$

istnieje taka liczba $M_{x_0} > 0$, że

$$\prod_{i=0}^{n} \tau_i(x_0) \leq M_{x_0}, \quad n \in N$$

gdzie liczby $\varkappa_r(x_0)$, $\tau_i(x_0)$ określone są odpowiednio wzorami (6), (7) to lipschitzowskie w $[0,x_0]$ rozwiązanie równania (1) zależy od dowolnej funkcji.

W pracy tej zajęłam się lipschitzowskimi rozwiązaniami równania funkcyjnego

$$\varphi(f(x)) = g(x,\varphi(x)) \tag{1}$$

gdzie f,g są funkcjami danymi, a φ poszukiwanym rozwiązaniem.

Niech $I = (0,a]$ lub $(0,a)$, gdzie $0 < a < +\infty$.

Przez Lip $([a,b])$ oznaczmy klasę funkcji φ: $[a,b] \to R$ spełniających warunek Lipschitza.

Przyjmijmy następujące założenia o funkcjach danych:

(i) $f\colon [0,a] \to [0,a]$ jest funkcją ściśle rosnącą;

$0 < f(x) < x; \quad x \in I;$

(ii) $g\colon [0,a]\times R \to R$ oraz istnieją funkcje

$k\colon I\times I \to [0,+\infty)$, $l\colon I\times I \to [0,+\infty)$

takie, że spełniony jest warunek

$$\begin{aligned} &|g(x,y) - g(\bar{x},\bar{y})| \le k(x,\bar{x})|x-\bar{x}| + l(x,\bar{x})|y-\bar{y}|, \quad x,\bar{x} \in I,\ y,\bar{y} \in R; \\ &\lim_{x\to\bar{x}} k(x,\bar{x})|x-\bar{x}| = 0, \quad x,\bar{x} \in I; \end{aligned} \tag{2}$$

l jest funkcją ograniczoną w $I\times I$;

(iii) istnieje funkcja $s\colon f(I)\times f(I) \to [0,+\infty)$ spełniająca warunek

$$\begin{aligned} &|f^{-1}(x) - f^{-1}(\bar{x})| \le s(x,\bar{x})|x-\bar{x}|; \\ &\lim_{x\to\bar{x}} s(x,\bar{x})|x-\bar{x}| = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

Przyjmijmy umowę $\sum_{k=n}^{n-1} a_k = 0$ i $\prod_{k=n}^{n-1} a_k = 1$.

Niech f^i oznacza i-tą iteratę funkcji f.

Uwaga. Z założenia (i) wynika, że (patrz [1], str. 20):

1. dla każdego przedziału $J = [0,b)$, $b \le a$ zachodzi $f(J) \subset J$,
2. dla każdego $x \in I$ ciąg $\{f^n(x)\}$ jest ściśle malejący oraz $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$.

Twierdzenie

Niech $x_0 \in I$. Jeżeli spełnione są założenia (i) - (iii) oraz warunki:

istnieje taka liczba $V_{x_0} > 0$, że dla każdego $n \in N$

$$\sum_{r=1}^{n} \varkappa_r(x_0) \prod_{i=r}^{n-1} \tau_i(x_0) \le V_{x_0} ; \tag{4}$$

istnieje taka liczba $M_{x_0} > 0$, że dla każdego $n \in N$

$$\prod_{i=0}^{n} \tau_i(x_0) \le M_{x_0} ; \tag{5}$$

gdzie

$$\varkappa_r(x_0) = \sup\left\{k(f^{-1}(x),\ f^{-1}(\bar{x}))s(x,\bar{x});\ x,\bar{x} \in (f^{r+1}(x_0),\ f^r(x_0)]\right\}, \tag{6}$$

$r=1,2,\ldots;$

$$\tau_i(x_0) = \sup\left\{l(f^{-1}(x),\ f^{-1}(\bar{x}))s(x,\bar{x});\ x,\bar{x} \in (f^{i+2}(x_0),\ f^{i+1}(x_0)]\right\}, \tag{7}$$

$i=0,1,\ldots$

to lipschitzowskie rozwiązanie równania (1) w $[0,x_0]$ zależy od dowolnej funkcji, to znaczy, że dla każdej funkcji $\varphi_0\colon [f(x_0),x_0]\to R$ spełniającej w $[f(x_0),x_0]$ warunki:

istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(\bar{x})| \leq M|x-\bar{x}|; \tag{8}$$

$$\varphi_0(f(x_0)) = g(x_0,\varphi_0(x_0)) \tag{9}$$

istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi \in \mathrm{Lip}([0,x_0])$ spełniająca w $[0,x_0]$ równanie (1) oraz taka, że

$$\varphi(x) = \varphi_0(x);\quad x \in [f(x_0),x_0].$$

Dowód

Z założenia (i) oraz warunków (2) i (3) wynika, że funkcje f,g są ciągłe w $[0,x_0]$, a więc w $(0,x_0]$ istnieje ciągłe rozwiązanie równania (1) zależne od dowolnej funkcji (patrz [1], lemat 3.1).

Niech φ_0 będzie funkcją spełniającą warunki (8) i (9), niech $I_0 = [f(x_0),\ x_0]$.

Wprowadźmy oznaczenie $I_k = f^k(I_0)$; $k=1,2,\ldots$

Widzimy, że $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k = I$.

Wiadomo, że ciągłe rozwiązanie równania (1) wyraża się wzorem

$$\varphi(x) = \varphi_k(x);\ x \in I_k;\ k=0,1,\ldots, \tag{10}$$

gdzie

$$\varphi_k(x) = g(f^{-1}(x), \varphi_{k-1}(f^{-1}(x))).$$

Wykażemy, że ciągłe rozwiązanie φ spełnia warunek Lipschitza w $[0,x_0]$. W tym celu utwórzmy ciąg funkcji $V_n : I_n x I_n \quad [0,+\infty)$; $n=0,1,\dots$; gdzie

$$V_n(x,\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} k(f^{-r}(x), f^{-r}(\bar{x}))s(f^{-r+1}(x), f^{-r+1}(\bar{x})\prod_{i=0}^{r-2} l(f^{-i-1}(x), f^{-i-1}(\bar{x})) \times$$

$$\times\, s(f^{-i}(\bar{x}), f^{-i}(\bar{x})) + M\prod_{i=0}^{n-1} l(f^{-i-1}(x), f^{-i-1}(\bar{x}))s(f^{-i}(x), f^{-i}(\bar{x})); \tag{11}$$

$x,\bar{x} \in I_n$; $n=0,1,\dots$

Niech $x,\bar{x} \in I_{n+1}$. Łatwo zauważyć, że

$$V_{n+1}(x.\bar{x}) = k(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x}))s(x,\bar{x}) + l(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x}))s(x,\bar{x})V_n(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x})). \tag{12}$$

Wykażemy teraz nierówność

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| \leqslant V_p(x,\bar{x})\,|x-\bar{x}|; \quad x,\bar{x} \in I_p; \ p=0,1,\dots \tag{13}$$

Z warunku (8) wynika, że dla $p=0$ nierówność (13) jest prawdziwa. Załóżmy, że nierówność (13) jest spełniona dla $p=n$. Dla $p=n+1$ korzystając z (10), (12) i (13) mamy

$$|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})| = |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(\bar{x})| = |g(f^{-1}(x), \varphi_n(f^{-1}(x))) -$$

$$- g(f^{-1}(\bar{x}), \varphi_n(f^{-1}(\bar{x})))| \leqslant k(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x}))s(x,\bar{x})\,|x-\bar{x}| +$$

$$+ l(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x}))\,|\varphi_n(f^{-1}(\bar{x})) - \varphi_n(f^{-1}(x))| \leqslant k(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x}))s(x,\bar{x})\,|x-\bar{x} +$$

$$+ l(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x}))s(x,\bar{x})\, V_n(f^{-1}(x), f^{-1}(\bar{x}))\,|x - \bar{x}| = V_{n+1}(x,\bar{x})\,|x - \bar{x}|;$$

co kończy indukcyjny dowód nierówności (13).

Z (6) i (7) wynika, że

$$V_n(x,\bar{x}) \leqslant \sum_{r=1}^{n} \varkappa_r(x_0) \prod_{j=r}^{n-1} \tau_j(x_0) + M \prod_{j=0}^{n} \tau_j(x_0) \leqslant V_{x_0} + M\, M_{x_0};$$

$$x,\bar{x} \in I_n;\ n=0,1\ldots,$$

a stąd

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| = (V_{x_0} + M\, M_{x_0})|x - \bar{x}|;\ x,\bar{x} \in I_n,\ n=0,1\ldots$$

Tak więc $\varphi \in \mathrm{Lip}(I)$ (por. [2], lemat 1).

Oznaczmy $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \eta$ (granica ta istnieje gdyż $\varphi \in \mathrm{Lip}(I)$).

Z ciągłości funkcji g, f^{-1} otrzymujemy istnienie granicy

$$\lim_{x\to 0} g(f^{-1}(x), \varphi(f^{-1}(x))) = g(0,\eta).$$

Tak więc istnieje rozwiązanie równania $\eta = g(0,\eta)$ i funkcja określona następująco

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{dla } x \in I \\ \eta & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

jest lipschitzowskim rozwiązaniem równania (1).
Jednoznaczność tego rozwiązania wynika z jednoznaczności rozwiązania ciągłego równania (1) co kończy dowód twierdzenia.

W pracy [2] sformułowane zostało twierdzenie o istnieniu rozwiązania $\varphi \in \mathrm{Lip}([0,a])$ równania (1) zależnego od dowolnej funkcji przy mocniejszych założeniach o funkcjach danych ($f^{-1} \in \mathrm{Lip}(I)$, $g \in \mathrm{Lip}(I \times R)$).

Przykład. Zajmijmy się równaniem

$$\varphi(x^2) = \frac{1}{4} x^2 \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)| + 1};\ x \in [0,1). \tag{14}$$

Niech $x_0 = \frac{1}{2}$. Sprawdźmy kolejno założenia twierdzenia.

$$|g(x,y) - g(\bar{x},\bar{y})| = \frac{1}{4}\left|x^2 \frac{y}{|y|+1} - \bar{x}^2 \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|+1}\right| \leqslant \frac{1}{4} x^2 |y-\bar{y}| + \frac{1}{4}(x+\bar{x})|x-\bar{x}|;$$

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(\bar{x})| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\bar{x}}}|x - \bar{x}|.$$

Tak więc dla $x, \bar{x} \in (0, x_0]$; $y \in R$ możemy przyjąć

$$k(x,\bar{x}) = \frac{1}{4}(x + \bar{x});\ l(x,\bar{x}) = \frac{1}{4}x^2;\ s(x,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\bar{x}}}.$$

Jak widać

$$\tau_i(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4} \sup\left\{ \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{\bar{x}}};\ x,\bar{x} \in \left(\frac{1}{2^{2^{i+2}}}, \frac{1}{2^{2^{i+1}}}\right]\right\} \leqslant \frac{1}{4^i};\ i=0,1,\ldots,$$

$$\varkappa_r(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4} \sup\left\{ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{x}+\sqrt{\bar{x}}};\ x,\bar{x} \in \left(\frac{1}{2^{2^{r+1}}}, \frac{1}{2^{2^{r}}}\right]\right\} = \frac{1}{4};\ r=1,2,\ldots,$$

oraz

$$V_{x_0} = \frac{7}{12},\ M_{x_0} = 1.$$

Spełnione są więc wszystkie założenia twierdzenia zamieszczonego w tej pracy a stąd wynika, że równanie (14) ma rozwiązanie $\varphi \in \mathrm{Lip}([0, \frac{1}{2}])$ zależne od dowolnej funkcji.

Powyższy przykład pokazuje, że pomimo tego, że funkcje dane nie spełniają warunku Lipschitza (w naszym przypadku f^{-1}) istnieje lipschitzowskie rozwiązanie równania (14).

LITERATURA

[1] M. Kuczma: Functional equations in a single variable. PWN, Warszawa 1968.

[2] K. Jakowska-Suwalska: On dependence of Lipschitzian solution of non-linear functional equation on an arbitrary function. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, Seria Matematyka (w druku).

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

Р е з ю м е

Работа касается существования и зависимости от произвольной функции решений функционального уравнения

$$\varphi(f(x)) = g(x, \varphi(x)) \tag{1}$$

в классе функций удовлетворяющих условию Липшица.

Пусть I обозначает промежуток $[0,a]$ или $[0,a)$, где $0 < a \leqslant +\infty$. Пусть f, g - данные функции удовлетворяющие условиям (i), (ii), (iii). Функция φ это функция неизвестная.

В работе доказано

Утверждение. Пусть $x_o \in I$. При условиях (i), (ii), (iii) если существует такое число $V_{x_o} > 0$, что

$$\sum_{r=1}^{n} \varkappa_r(x_o) \prod_{i=r}^{n-1} \tau_i(x_o) \leqslant V_{x_o}, \quad n \in N$$

и существует такое число $M_{x_o} > 0$, что

$$\prod_{i=0}^{n} \tau_i(x_o) \leqslant M_{x_o}, \quad n \in N$$

где числа $\varkappa_r(x_o)$, $\tau_i(x_o)$ определены соответственно формулами (6), (7) то липшицовское в $[0,x_o]$ решение уравнения (1) зависит от произвольной функции.

THE SOLUTIONS OF NON-LINEAR FUNCTIONAL EQUATION FULFILLING A LIPSCHITZ CONDITION

S u m m a r y

We shall deal with existence and dependence on an arbitrary function of solution of the functional equation

$$\varphi(f(x)) = g(x, \varphi(x)) \tag{1}$$

in the class of functions fulfilling a Lipschitz condition.

Let $I=[0,a]$ or $[0,a)$, $0< a\leqslant +\infty$. Let f, g be given functions subjected to the conditions (i), (ii), (iii). The function φ is an unknown function.

In this paper there is a theorem proved.

Theorem. Let $x_o \in I$. If hypotheses (i), (ii), (iii) are fulfilled and there exists number $V_{x_o} > 0$ such that

$$\sum_{r=1}^{n} \varkappa_r(x_o) \prod_{i=r}^{n-1} \tau_i(x_o) \leqslant V_{x_o}, \quad n \in N;$$

there exists number $M_{x_o} > 0$ such that

$$\prod_{i=0}^{n} \tau_i(x_o) \leqslant M_{x_o}, \quad n \in N$$

where the numbers $\varkappa_r(x_o)$, $\tau_i(x_o)$ are defined by (6), (7) then lipschitzian in $[0,x_o]$ solution of equation (1) depends on an arbitrary function.

Wpłynęło do Redakcji

Tłumaczył autor artykułu

Recenzent:
Doc. dr hab. Janusz Matkowski