ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Andrzej SOWA

NIEKTÓRE WŁASNOŚCI ZBIORU PUNKTÓW OSIĄGALNYCH W PRZESTRZENI R^3 ZA POMOCĄ MNOŻNIKÓW +1 i -1

Streszczenie. W pracy przedstawiono pewną własność zbioru punktów osiągalnych przez mnożniki +1 i -1 oraz szeregi o wyrazach, które są wektorami w przestrzeni R^3, mające dwie osie rozbieżności i jedną oś zbieżności. W pracy udowodniono, że zbiór punktów osiągalnych jest gęsty w pasku zbieżności. Co więcej, jest on gęsty w przecięciu paska zbieżności z każdą płaszczyzną nierównoległą do płaszczyzny wyznaczonej przez osie główne. Na koniec podano przykład szeregu ilustrującego twierdzenie. W przykładzie tym zbiór punktów osiągalnych jest gęsty w pasku zbieżności, mimo że na każdej płaszczyźnie paska zbieżności jest co najwyżej jeden punkt osiągalny. Nieskończona ilość płaszczyzn nie ma nawet żadnego punktu osiągalnego.

W pracy przedstawiono pewną własność zbioru punktów osiągalnych przez szeregi o wyrazach w przestrzeni R^3 za pomocą mnożników ze zbioru $T = \{+1,-1\}$.

Oznaczmy przez S szereg o wyrazach v_n, $n = 1,2,\ldots$, gdzie v_n są wektorami z przestrzeni R^3 takimi, że

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0$$

Niech v oznacza wektor jednostkowy zaczepiony w początku układu współrzędnych, a R będzie oznaczać otwarty, kątowy obszar o wierzchołku w początku układu współrzędnych. Przez $\sum_R v_n$ oznaczamy $\sum_{v_n \in R} v_n$

Definicja 1

Wektor v nazywamy kierunkiem głównym szeregu S, jeśli $\sum_R v_n =$ dla każdego R zawierającego wektor v. Każdą linię prostą zawierającą kierunek główny szeregu S nazywamy osią główną szeregu. Będziemy mówili, że v jest kierunkiem zbieżności lub rozbieżności, jeśli odpowiednio szereg o wyrazach równych iloczynowi skalarnemu wektorów v i v_n tj. (v,v_n) jest absolutnie zbieżny lub rozbieżny. Odpowiednią oś nazywamy osią zbieżności lub rozbieżności.

Definicja 2

Mówimy, że punkt P z przestrzeni R^3 jest osiągalny przez szereg S, jeśli istnieje taki ciąg mnożników $\{t_n\}$ ze zbioru T, gdzie n = 1,2,..., że

$$\sum_1^{\infty} t_n v_n = p$$

Przytoczmy jeszcze ważne twierdzenie o szeregach wektorowych w R^3.

Twierdzenie 1

Jeśli v jest kierunkiem głównym szeregu S, v_1 i v_2 są dowolnymi wektorami jednostkowymi prostopadłymi do wektora v, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki podciąg $\{v_n'\}$ ciągu $\{v_n\}$, że

$$\sum_1^{\infty} |v, v_n'| = \infty \quad \text{i} \quad \sum_1 |(v_i, v_n')| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla } i = 1,2.$$

Zależnie od tego, jakie osie posiada szereg S różne są własności zbioru punktów osiągalnych. W niniejszej pracy rozpatrywano przypadek, gdy szereg S ma dwie osie główne i oś zbieżności liniowo niezależne. Bez zmniejszenia ogólności można zakładać, że osie te są wzajemnie prostopadłe. Niech więc osie Ox i Oy będą osiami głównymi, oś Oz niech będzie osią zbieżności. Zbiór punktów osiągalnych na osi Oz przez szereg o wyrazach z_n, gdzie z_n jest trzecią współrzędną wektora v_n danego szeregu S, za pomocą mnożników ze zbioru T jest zbiorem doskonałym. Poprowadźmy przez każdy punktu tego zbioru płaszczyznę równoległą do płaszczyzny Oxy. Otrzymany zbiór będziemy nazywać paskiem zbieżności szeregu S. Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli szereg S ma powyższe własności, to dla każdej płaszczyzny q nierównoległej do płaszczyzny wyznaczonej przez osie główne zbiór punktów osiągalnych jest gęsty w przecięciu tej płaszczyzny z paskiem zbieżności.

Dowód twierdzenia

Niech płaszczyzna q ma równanie Ax + By + Cz = 0. Bez zmniejszenia ogólności można zakładać, że przechodzi ona przez początek układu współrzędnych i $A \neq 0$. Niech P (X,Y,Z) będzie punktem płaszczyzny q i paska zbieżności. Zachodzi więc:

$$AX + BY + CZ = 0$$

oraz istnieje taki ciąg mnożników $\{t_n\}$, że

$$Z = \sum_1^{\infty} t_n z_n \tag{1}$$

Można więc dobrać tak duże N, że spełnione są warunki:

$$\left\| z - \sum_{1}^{N} t_n z_n \right\| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2}$$

oraz

$$\| v_n \| < \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{24} \quad \text{dla} \quad n > N.$$

Ponadto, ponieważ Ox i Oy są osiami głównymi, więc z twierdzenia (1) istnieją dwa podciągi ciągu $\{v_n\}$, oznaczmy je odpowiednio przez $\{v_n'\}$ i $\{v_n''\}$, takie, że spełnione są warunki:

$$\sum |x_n'| = \infty \quad \text{i} \quad \sum |y_n'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \sum |z_n'| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

$$\sum |y_n''| = \infty \quad \text{i} \quad \sum |x_n''| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{i} \quad \sum |z_n''| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

gdzie przez v_n' oznaczyliśmy wektor (x_n', y_n', z_n') i podobnie przez v_n'' wektor (x_n'', y_n'', z_n'').
Pozostałe wyrazy ciągu $\{v_n\}$, po odrzuceniu ciągów $\{v_n\}_1^N$, $\{v_n'\}_1^\infty$, $\{v_n''\}_1^\infty$ oznaczmy przez $\{v_n'''\}_1^\infty$.
Dobierzmy ciąg mnożników $\{t_n'''\}$ tak, by zachodziło:

$$\left\| \sum_{1}^{\infty} t_n''' \, v_n''' \right\| \leqslant 24 \max_n \| v_n''' \| \tag{5}$$

można tak zrobić na podstawie dwóch lematów.

Lemat 1

Dla skończonego układu $\{v_n\}_1^S$ można dobrać tak ciąg mnożników $\{t_n\}_1^S$, że

$$\left\| \sum_{1}^{S} t_n v_n \right\| < 12 \max_n \| v_n \|$$

Dowód znajduje się w pracy (1).

Lemat 2

Dla nieskończonego ciągu wektorów $\{v_n\}$, takiego, że $\lim\|v_n\| = 0$ można dobrać tak ciąg mnożników $\{t_n\}$, że

$$\left\|\sum_1 t_n v_n\right\| \leqslant 24\max_n\|v_n\|$$

Dowód lematu

Dobierzmy wskaźnik N_1 i ciąg mnożników $\{t_n\}_1^{N_1}$ tak, aby były spełnione warunki:

$$\left\|\sum_1^{N_1} t_n v_n\right\| \leqslant 12\max_n\|v_n\|$$

oraz

$$\|v_n\| < \max\|v_n\|\,\frac{1}{2} \quad \text{dla } n > N_1$$

Ogólnie w s-tym kroku dobieramy taki wskaźnik N_s i ciąg mnożników $\{t_n\}_{N_{s-1}+1}^{N_s}$ aby były spełnione warunki:

$$\left\|\sum_{N_{s-1}+1}^{N_s} t_n v_n\right\| \leqslant 12\max\|v_n\| \quad \text{oraz} \quad \|v_n\| < \max\|v_n\|\,\frac{1}{2^s} \text{ dla } n > N_s$$

Można tak zrobić na podstawie lematu (1) oraz tego, że $\lim\|v_n\| = 0$. Łatwo zauważyć, że spełnia on warunek Cauchy'ego, ponadto

$$\left\|\sum_1^{\infty} t_n v_n\right\| \leqslant \sum_1^{\infty}\left\|\sum_{N_s-1+1}^{N_s} t_n v_n\right\| < 12\max_{1,\dots,N_1}\|v_n\|(1+\dots+\dots) = 24\max_{1,\dots,N_s}\|v_n\|$$

co kończy dowód lematu.
Obierzmy za punkt $P'(X',Y',Z')$ punkt

$$P' = \sum_1^{N} t_n v_n + \sum_1^{\infty} t_n''' v_n'''$$

Zachodzi

$$|z - z'| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

Dobierzmy następnie ciąg $\{t'_n\}_1^{N_1}$ tak, aby był spełniony warunek:

$$\left|\sum_1^{N_1} t'_n x'_n + X' - X\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

co można zrobić na postawie (3).

Oznaczmy $P_1 = P' + \sum_1^{N_1} t'_n v'_n$

Otrzymujemy

$$|X_1 - X| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{na podstawie (7)} \tag{8}$$

$$|Z_1 - Z| < \varepsilon \tag{9}$$

Następnie na podstawie (4) dobieramy mnożników $\{t''_n\}_1^{\infty}$ tak, aby zachodziło:

$$\sum_1^{\infty} t''_n y''_n + Y_1 = Y \tag{10}$$

Oznaczmy $P_2(X_2,Y_2,Z_2) = P_1 + \sum_1^{\infty} t''_n v''_n$

Zachodzi:

$$|X_2 - X| < \varepsilon \quad \text{na podstawie (4) i (8)}$$

$$|Y_2 - Y| = 0 \quad \text{na podstawie (10)}$$

$$|Z_2 - Z| < \frac{\varepsilon}{2}\,\varepsilon \quad \text{na podstawie (4) i (9)}$$

Punkt P_2 Jest "bliski" punktu P, ale nie musi należeć do płaszczyzny q. Dobieramy na koniec ciąg mnożników $\{t'_n\}_{N_1+1}^{\infty}$ tak, aby punkt $P_3(X_3,Y_3,Z_3) = P_2 + \sum_{N_1+1}^{\infty} t'_n v'_n$ należał do płaszczyzny q oraz $\left\|\sum_{N_1+1}^{\infty} t'_n v'_n\right\|$ dostatecznie mała. Mają więc być spełnione warunki:

$$A(X_2 + \sum_{N_1+1}^{\infty} t'_n x'_n) + B(Y_2 + \sum_{N_1+1}^{\infty} t'_n y'_n) + C(Z_2 + \sum_{N_1+1}^{\infty} t'_n z'_n) = 0 \tag{11}$$

to znaczy

$$A \sum t'_n x'_n + B \sum t'_n y'_n + C \sum t'_n z'_n = (AX_2+BY_2+CZ_2) = a \tag{12}$$

Ponieważ $\sum_{N_1+1}^{\infty} \left| Ax'_n + By'_n + Cz'_n \right| = \infty$ na podstawie (3), więc można dobrać ciąg mnożników t'_n tak, aby był spełniony warunek (12) a więc i (11). Punkt P_3 należy więc do płaszczyzny q. Ponadro P_3 jest "bliski" punktu P. Zauważmy bowiem, że a jest małe oraz

$$\left| \sum t'_n y'_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{na podstawie (3)} \tag{13}$$

$$\left| \sum t'_n z'_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{na podstawie (3)} \tag{14}$$

$$|a| = \left| AX_2+BY_2+CZ_2 \right| = \left| A(X_2-X) + B(Y_2-Y) + C(Z_2-Z) \right| \leq \varepsilon(A+\tfrac{3}{2}C) \tag{15}$$

Zatem na podstawie (12), (13), (14), (15)

$$\left| \sum_{N_1+1}^{\infty} t'_n x'_n \right| < \frac{\varepsilon}{A} \left(A + \frac{3}{2}C+1\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy, że punkt $P_3 \in q$ oraz

$$\left| X_3 - X \right| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{A} \left(A + \frac{3}{2} C+1\right)$$

$$\left| Y_3 - Y \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \left| Z_3 - Z \right| < 2\varepsilon$$

Nasuwając na siebie poszczególne szeregi $\sum_1^N t_n v_n$, $\sum_1^{\infty} t'''_n v'''_n$, $\sum_1^{N_1} t'_n v'_n$, $\sum_1^{\infty} t'' v''$, $\sum_{N_1+1}^{\infty} t' v'$, tak, aby była zachowana kolejność wyrazów nie zmieniamy sumy szeregu S, co kończy dowód twierdzenia.

Przykład

Rozważmy szereg o wyrazach $v_n = \left(\frac{(-1)^n + 1}{n}, \frac{(-1)^n + 1}{n}, \frac{1}{3^n}\right)$

Proste Ox i Oy są osiami głównymi, prosta OZ jest osią zbieżności. Na każdej płaszczyźnie paska zbieżności znajduje się co najwyżej jeden punkt osiągalny, co więcej, możnapokazać, że na nieskończonej ilości płaszczyzn nie ma żadnego punktu osiągalnego, a mimo to zbiór punktów osiągalnych jest gęsty w pasku zbieżności, co więcej, gęsty w przecięciu tego paska z każdą płaszczyzną nierównoległą do płaszczyzny Oxy! Można pokazać, że rzut tych płaszczyzn, które nie mają punktów osiągalnych, na oś OZ jest gęsty w danym zbiorze doskonałym na osi Oz i jak wynika z udowodnionego twierdzenia również brzegowy.

LITERATURA

[1] W. Gross: Bedingt konvergente Reihen. Monatshefte fur Mathematik und Physik 28.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ДОСТИЖИМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПОМОЩИ УМНОЖИТЕЛЕЙ +1 и -1

Р е з ю м е

В работе рассмотрено определённое свойство множества точек достижимых при помощи множителей +1 и -1 и ряда с двумя главными осями и одной осью сходимости. Члены ряда являются векторами в пространстве R^3.

В статье показано, что множество достижимых точек являются плотным в полосе сходимости. Более того, это множество плотно в пересечении области сходимости с каждой плоскостью непараллелной до плоскости главных осей. В конце работы дан пример ряда, демонстрирующего теорему. В примере множество достижимых точек плотно в полосе сходимости, хотя на каждой плоскости полосы находится не более одной достижимой точки. Существует бесконечное множество плоскостей на которых нет достижимых точек.

SOME PROPERTIES OF SET OF THE POINTS AVAILABLE IN R^3 SPACE MEANS OF MULTIPLIERS +1 NAD -1

S u m m a r y

Un the paper, there is presented certain property of tje set of points, that are accessible using the multipliers +1,-1 and the series of vektors in R^3 with two divergence axes and one convergence axis.

It is proved in the paper that the set of points, that are accessible, are dense in convergence strip. What is more it is dense in intersection of every not parallel plane which is with the plane inctuding divergence axis with convergence strip. In the end the example of the series illustating the theorem is given. In this example the set of points, that are accessible is dense in corvengence strip, in spite of the fact that every plane of corvengence strip has at most one point accesible.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 11.I.1986

Recenzent
Prof. zw. dr hab. Zygmunt Zahorski