ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 52 Nr kol. 878

Roman WITUŁA

NOWY DOWÓD TWIERDZENIA O UZBIEŻNIANIU W R^n

Streszczenie. W pracy podano nowy dowód twierdzenia że dla dowolnego ciągu zbieżnego do zera $\{x_k\} \subset R^n$, istnieje ciąg mnożników $\varepsilon_k = \pm 1$ taki, że szereg $\sum \varepsilon_k x_k$ jest zbieżny w R^n. Historia tego twierdzenia rozpoczyna się od nazwiska Bernharda Riemanna, który udowodnił je dla przypadku n=1 (w silniejszym sformułowaniu). Pełne rozwiązanie podał po raz pierwszy dr J. Timmler w swojej pracy doktorskiej.

1. HISTORIA PROBLEMU

Bernhard Riemann udowodnił następujące twierdzenie:

Jeśli $\{x_k\}$ jest zerowym ciągiem liczb dodatnich takim, że $\sum x_k = +\infty$, to dla dowolnego x rzeczywistego istnieje ciąg mnożników $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, dla którego zachodzi $\sum \varepsilon_k x_k = x$.

Jak łatwo zauważyć, twierdzenie to nie da się bezpośrednio uogólnić na przestrzenie R^n, $n > 1$ (wystarczy przyjąć $x_k = (k^{-1}, 0, \ldots, 0) \in R^n$, $K \geq 1$). Nietrywialnym okazuje się nawet problem:
Czy dla każdego ciągu zerowego $\{x_k\} \subset R^n$, $n > 1$ istnieje ciąg mnożników $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ taki, że szereg $\sum \varepsilon_k x_k$ jest zbieżny w R^n?
Częściowe rozwiązanie tego problemu pojawiło się w pracy [1] a pełne rozwiązanie po raz pierwszy w pracy doktorskiej dra J. Timmlera [2]. Warto zaznaczyć, że pozytywne rozwiązanie ostatniego problemu spowodowałd rozpoczęcie badań nad dwoma kolejnymi zagadnieniami:

A. Poczukiwanie warunków wystarczających dla ciągu zerowego $\{x_k\} \subset R^n$ na to, by dla dowolnego $x \in R^n$ istniał ciąg mnożników $\varepsilon_k = \pm 1$ taki, że $\sum \varepsilon_k x_k = x$

B. Opisanie zbiorów postaci $\left\{ x : \bigvee_{\{\varepsilon_k\}} x = \sum \varepsilon_k x_k \right\}$ przy ustalonym, ale dowolnym $\{x_k\}$.

Warunki, o których mowa w zagadnieniu A podane są w pracy [2].

2. TWIERDZENIA POMOCNICZE

Lemat 1

Dla każdego $n \in N$ istnieje $\theta = \theta(n) \in N$ takie, że spośród dowolnych θ wektorów $x_1, \ldots, x_\theta \in R^n$ o normie nie większej od 1, można wybrać x_{k_1} oraz x_{k_2}, $k_1 \neq k_2$, takie, że

$$\|x_{k_1} - x_{k_2}\| \leq 1$$

Dowód:

Niech $n \in N$, $\theta =: (2n+1)^n$, $x_1, \ldots, x_\theta \in R^n$, $\|x_k\| \leq 1$, $1 \leq k \leq \theta$

Przyjmijmy z definicji

$$I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \text{ gdzie } -n \leq k < n-1$$

$$I_{n-1} = \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]$$

Gdy $n > 1$, to istnieje przedział I_{k_1} taki, że co najmniej

$$\theta_1 = \left[\frac{\theta}{2n}\right] > (2n+1)^{n-1}$$

spośród wektorów $x_1, \ldots, x$ ma pierwszą współrzędną w przedziale I_{k_1}; oznaczymy je $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{\theta_1}}$.

Gdy $n > 2$, to istnieje przedział I_{k_2} taki, że co najmniej

$$\theta_2 = \left[\frac{\theta_1}{2n}\right] > (2n+1)^{n-2}$$

spośród wektorów $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{\theta_1}}$ ma drugą współrzędną w przedziale I_{k_2}.

Po $(n-1)$ - krokach dochodzimy do sytuacji gdy mamy $\theta_{n-1} > 2n+1$ wektorów, oznaczymy je $x_{t_1}, \ldots, x_{t_{\theta_{n-1}}}$, o tej własności, że jeśli $n > 1$ to i - te współrzędne tych wektorów należą do pewnego przedziału I_{k_i}, dla $i : 1 \leq i \leq n-1$.

Ponieważ wszystkich przedziałów I_k jest 2n to spośród wektorów $x_{t_1},\dots,x_{t_{\Theta_{n-1}}}$ można wybrać dwa takie, że ich n-te współrzędne należą do pewnego przedziału I_{k_n}; oznaczymy te wektory z_1, z_2.

Jak łatwo zauważyć:

$$\|z_1 - z_2\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}(z_1^i - z_2^i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} n^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{2}} \leqslant 1$$

Lemat 2

Niech $\Theta(n)$ będzie takie, jak w lemacie 1, gdzie $n \in N$. Wówczas dla każdego $m \in N$, dowolnych $x_1,\dots,x_m \in R^n$, $\|x_k\| \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, istnieją $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ takie, że $\Big\|\sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k x_k\Big\| \leqslant \Theta - 1$ dla każdego $i=1,\dots,m$

Dowód:

Gdy $m < \Theta$, to wystarcza przyjąć $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_m = 1$.

Gdy $m = \Theta$, to z lematu 1 wynika, że istnieją k_1, k_2 : $1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m$ o własności $\|x_{k_1} - x_{k_2}\| \leqslant 1$; wystarcza przyjąć

$$\varepsilon_k = \begin{cases} -1 & k = k_2 \\ 1 & k \neq k_2 \end{cases}$$

Załóżmy, że teza lematu jest słuszna dla pewnego $m \geqslant \Theta$.
Niech $x_1,\dots,x_{m+1} \in R^n$, $\|x_k\| \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m+1$.
Na mocy lematu 1 wśród wektorów $x_1,\dots,x$ znajdujemy dwa, np. x_{k_1}, x_{k_2}, $k_1 < k_2$ takie, że $\|x_{k_1} - x_{k_2}\| \leqslant 1$.

Niech

$$y_k = \begin{cases} x_k & \text{jeśli } 1 \leqslant k < k_1 \wedge k_1 < k < k_2 \\ x_{k_1} - x_{k_2} & \text{jeśli } k = k_1 \\ x_{k+1} & \text{jeśli } k_2 \leqslant k \leqslant m \end{cases}$$

Oczywiście zachodzi $\|y_k\| \leqslant 1$. Zatem z założenia indukcyjnego istnieją $\delta_1,\dots,\delta_m \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$\Big\|\sum_{k=1}^{i} \delta_k y_k\Big\| \leqslant \Theta - 1 \quad \text{dla każdego } i : 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Przyjmijmy

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \delta_k & \text{jeśli } 1 \leqslant k < k_2 \\ -\delta_{k_1} & \text{jeśli } k = k_2 \\ \delta_{k-1} & \text{jeśli } k_2 \leqslant k \leqslant m+1 \end{cases}$$

Wówczas dla i : $\theta \leqslant i \leqslant m+1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{i-1} \delta_k y_k \right\| \leqslant \theta - 1$$

3. TWIERDZENIE

Dla każdego ciągu zerowego $\{x_k\} \subset R^n$ można dobrać ciąg $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ taki, że szereg $\sum \varepsilon_k x_k$ jest zbieżny w R^n.

Dowód:

Niech $\{x_k\} \subset R^n$, $x_k \to 0$.

Definiujemy pomocniczy ciąg $\{t_i\} \subset N$

$$t_1 = \min\left\{t \in N : t \geqslant 2 \quad i \quad \|x_k\| \leqslant 2^{-1} \text{ dla każdego } k \geqslant t\right\}$$

$$t_{i+1} = \min\left\{t \in N : t > t_i \quad i \quad \|x_k\| \leqslant 2^{-i-1} \text{ dla każdego } k \geqslant t\right\}$$

Wprowadzamy wektory $y_k =: 2^i x_k$, $t_i \leqslant k < t_{i+1}$, $i \in N$.

Oczywiście stale zachodzi $\|y_k\| \leqslant 1$.

Połóżmy $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{t_1 - 1} = 1$.

Z lematu 2 wynika, że dla każdego zbioru wektorów $y_{t_i}, \ldots, y_{t_{i+1}}$ można dobrać ciąg liczb $\varepsilon_{t_i}, \ldots, \varepsilon_{t_{i+1}-1} \in \{-1, 1\}$ spełniających tezę lematu 2.

Pokażemy, że ciąg $\left\{\sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k x_k\right\}$ $i \geqslant 1$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Istotnie, niech $j \geqslant t_1$, $t_l = \max\{t_s : t_s < j\}$

Wówczas dla $i \geqslant j$ mamy

$$\left\| \sum_{k=j}^{i} \varepsilon_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=t_l}^{i} \varepsilon_k x_k - \sum_{k=t_l}^{j-1} \varepsilon_k x_k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-l} \left\| \sum_{k=t_l}^{j-1} \varepsilon_k y_k \right\| + \sum_{i=l}^{j-1} 2^{-i} \left\| \sum_{k=t_i}^{t_{i+1}-1} \varepsilon_k y_k \right\| + 2^{-l} \left\| \sum_{k=t_i}^{i} \varepsilon_k y_k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant (\Theta-1)(2^{-l} + \sum_{i \geqslant l} 2^{-i}) < 2^{-l+2}(\Theta-1)$$

gdzie $t_l = \max \{ t_s : t_s \leqslant i \}$

Ponieważ przestrzeń R^n jest zupełna, więc szereg $\sum \varepsilon_k x_k$ jest zbieżny w R^n.

LITERATURA

[1] A. Dvoretzky, C. Hanani: Sur les changements des signes des termes d'une serie a'termes complexes. Comptes rendus de l'Academie de Sciences (Paris) 225 (1947) p. 516-518.

[2] J. Timmler (praca doktorska): Uzbieżnianie szeregów wektorowych w przestrzeniach R^n mnożnikami +1 lub -1. Gliwice 1980.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ

Р е з ю м е

В настоящей работе дается новое доказательство следующей теоремы: Для произвольной сходящейся к нулю последовательности $\{x_k\} \subset R^n$ существует последовательность $\varepsilon_k = \pm 1$ такая, что ряд $\sum \varepsilon_k x_k$ сходится.

История этого вопроса восходит от Бернхарда Риманна, который доказал теорему для случая $n = 1$ (в несколько общей формулировке). В докторской диссертации И. Тиммлер доказал ее для произвольного натурального.

A NEW PROOF OF A THEOREM ON CONVERQUENCE IN R^n

S u m m a r y

A new proof of the following Theorem is given: For any zero - sequence $\{x_k\} \subset R^n$ there exist a sequence of multipliers $\varepsilon_k = \pm 1$ such that the series $\sum \varepsilon_k x_k$ converqes. First who inwestiquated this problem was Bernhard

Rieman. He proved the theorem in the case $n = 1$ (in some of general formulation). A proof of the general theorem for arbitrary n was given in doctor dissertation by J. Timmler.

Tłumaczył autor artykułu

Wpłynęło do Redakcji 11.I.1986

Recenzent
Prof. zw. dr hab. Zygmunt Zahorski