ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

Jan Stanisław LIPIŃSKI

PRACE ZYGMUNTA ZAHORSKIEGO Z TEORII FUNKCJI RZECZYWISTYCH[x)]

Profesor Zygmunt ZAHORSKI rozpoczął twórczą działalność naukową jeszcze w okresie międzywojennym. Pierwsza jego publikacja ukazała się w r. 1937 w Sprawozdaniach Warszawskiego Towarzystwa Naukowego. Lata wojny to czas intensywnej pracy, wynikiem której są twierdzenia do dziś cytowane w licznych pracach naukowych, a także w monografiach. Prace te, opublikowane w czasie wojny lub bezpośrednio po jej zakończeniu, poświęcone są różniczkowalności funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej. Ta problematyka interesowała profesora Zahorskiego do końca lat czterdziestych a następnie zajął się problemami zbieżności szeregów Fouriera. Problemy różniczkowalności stały się tematem prac jego uczniów. Obecnie, prace te są kontynuowane przez matematyków polskich, słowackich, czeskich, rumuńskich, węgierskich, włoskich i amerykańskich. Każdy zeszyt amerykańskiego czasopisma Real Analysis Exchange przynosi nowe publikacje cytujące prace Zahorskiego. O roli, jaką odegrał w rozwoju tych badań, można dowiedzieć się z pierwszych zdań wstępu do wydanej w roku 1978 podstawowej w teorii różniczkowalności monografii A. Brucknera "Differentiation of Real Functions": "It has now been about forty years since the publication of Saks's book, Theory of the Integral, a book which deals considerably with topics which are related to differentiation theroy. Since that time, particulary since the publication of Zahorski's paper 216 (pozycja 25 spisu prac prof. Zahorskiego), in 1950, much work has been done related to the differentiation of real functions, ...". Czytelnik tej monografii może przekonać się, jak często wyniki Zahorskiego, a także jego uczniów, są w niej cytowane i jak wiele osiągnięć innych autorów ma swe źródło w jego pracach.

Już pierwsza, wymieniona na początku praca [1] z roku 1937, poświęcona była funkcji różniczkowalnej, monotonicznej, niestałej, mającej gęsty zbiór przedziałów stałości. Choć funkcję o takich własnościach skonstruował już wcześniej S. Mazurkiewicz [14], konstrukcja Zahorskiego była znacznie prostsza. Dziś, kiedy dzięki wynikom pracy Zahorskiego, wymienionej w cytacie z Brucknera, istnienie takich funkcji jest dobrze znane, a ich konstrukcje łatwe (porównaj A.M. Bruckner and J.L. Leonard [5]), mo-

x) Numery prac prof. Zahorskiego odnoszą się do spisu jego prac osobno drukowanego w tym numerze Zesz. Pol. Śl., a numery prac innych autorów, cytowanych w tym artykule, do spisu prac na końcu tego artykułu.

żemy stwierdzić, jak bardzo wiedza o pochodnych pogłębiła się i rozszerzyła.

Druga z prac Zahorskiego [2] opublikowana w czasie wojny w Matematiczeskim Sborniku, zawiera twierdzenie bardzo ważne, bo charakteryzujące zbiory punktów nieróżniczkowalności funkcji ciągłej. Różne twierdzenia charakteryzujące zbiory były znane od dawna. Na przykład zbiory punktów ciągłości, to zbiory typu G_δ, zbiory miejsc zerowych funkcji ciągłych, to zbiory domknięte itd. Pytanie, jak opisać w terminach miary i topologii zbiory punktów nieróżniczkowalności było o wiele trudniejsze. Zahorski wykazał, że w przypadku funkcji ciągłej są nimi i tylko nimi wszystkie zbiory postaci $A \cup B$, gdzie A jest typu G_δ, a B jest typu $G_{\delta\sigma}$ i miary zero. Charakteryzacja ta pozostaje prawdziwa i w przypadku gdy punkty, w których pochodna jest nieskończona uważać za punkty nieróżniczkowalności, i w przypadku gdy uważać je za punkty różniczkowalności. Wynik Zahorskiego uogólnił A. Brudno, pokazując, że charakteryzacja znaleziona przez Zahorskiego pozostaje prawdziwa dla wszystkich funkcji rzeczywistych, a nie tylko ciągłych [6].

O zbiorze punktów, w których pochodna jest nieskończona, było wiadomo od dawna, że musi być typu G_δ i miary zero. Jarnik [12] pokazał, że dla każdego zbioru E tego typu i tej miary istnieje funkcja ciągła, mająca pochodną nieskończoną w punktach zbioru E i wszystkie pochodne Diniego skończone w pozostałych punktach. Równocześnie zapytał, czy funkcja taka może być poza zbiorem E różniczkowalna. Pozytywna odpowiedź Zahorskiego, opublikowana w pracy [3], stanowi równocześnie charakteryzację zbioru punktów, w których pochodna funkcji ciągłej i mającej wszędzie pochodną jest nieskończona.

W punkcie, w którym nie istnieje pochodna, a więc w takim, w którym nie wszystkie pochodne Diniego są sobie równe, mogą zachodzić różne nierówności lub równości między pochodnymi Diniego. Każdy taki układ nierówności i równości wyznacza związany z nim typ nieróżniczkowalności. Zahorski w nieopublikowanej rozprawie habilitacyjnej opisał zbiory punktów nieróżniczkowalności różnych typów. Są to warunki konieczne, dostateczne, a często i warunki charakteryzujące dla tych zbiorów, przy założeniach ciągłości lub bez jakichkolwiek założeń o funkcjach. Streszczenie tych wyników zostało opublikowane w nocie nr [11]. Powtórzenie treści tego streszczenia w tym miejscu nie wydaje się celowe. Każdego mogą zaciekawić jednak pewne sformułowane tam wnioski. Na przykład nie istnieją funkcje ciągłe, których pochodne Diniego przyjmują w każdym punkcie dokładnie trzy lub dokładnie cztery wartości (w jednych punktach trzy, w innych cztery). Funkcja ciągła, której pochodne Diniego w każdym punkcie przyjmują dokładnie dwie albo dokładnie cztery różne wartości, musi w pewnych punktach posiadać choćby jedną pochodną jednostronną. Problemem nierozwiązanym jest, czy takie funkcje w ogóle istnieją. Pewne z tych wyników otrzymał wcześniej i niezależnie A. Brudno [6]. Badania zbiorów nieróżniczkowalności pewnych typów kontynuował F.M.Filipczak, z prac którego wymieńmy tu przede wszystkim rozprawę habilitacyjną [9].

Przejdźmy teraz do najczęściej cytowanej pracy "Sur la première dérivée [25]. Była ona bardzo ważnym krokiem w kierunku poznania własności funkcji pochodnych. Nie znamy do dziś wałsności charakteryzujących pochodne, jeżeli pominąć niewiele różniący się od definicji pochodnej warunek C. Neugebauera [18]. Szerszą niż rodzina wszystkich pochodnych funkcji ciągłych, rodzinę funkcji pierwszej klasy Baire'a o własności Darboux oraz krzyżującą się z rodziną pochodnych rodzinę funkcji aproksymatywnie ciągłych, można opisać za pomocą własności zbiorów Lebesgue'a tych funkcji, czyli zbiorów $\{x : f(x) > a\}$ i $\{x : f(x) < a\}$. Klasy funkcji pochodnych nie można opisać tylko za pomocą własności zbiorów Lebesgue'a. Zahorski zwraca na to uwagę na drugiej stronie pracy [25], wskazując, że charakteryzacja tak ograniczonymi środkami nie obejmie nawet pochodnych ograniczonych. Mylny jest pogląd Brucknera, przedstawiony w pracy [4], że Zahorski postawił problem charakteryzacji funkcji pochodnych za pomocą samych zbiorów Lebesgue'a. Postawił natomiast problem charakteryzacji zbiorów Lebesgue'a dla pochodnych funkcji ciągłych. Sam rozwiązał ten problem dla pochodnych ograniczonych. Zbiory spełniające warunek charakteryzujący nazwał zbiorami klasy M_4. Określił też szerszą klasę zbiorów M_3 i jeszcze szerszą M_2 i wykazał, że zbiory Lebesgue'a pochodnych skończonych należą do klasy M_3, a pochodnych funkcji ciągłych przyjmujących wartości skończone i nieskończone do klasy M_2. Funkcje mierzalne górnie i dolnie względem klasy M_1, czyli takie, że wszystkie zbiory Lebesgue'a należą do klasy M_1, nazwał funkcjami klasy $\mathcal{M}_1$. Klasy Zahorskiego $\mathcal{M}_i$ są dobrymi uogólnieniami klas pochodnych ograniczonych, pochodnych skończonych i pochodnych funkcji ciągłych. Bruckner poświęcił im jeden z rozdziałów swojej monografii. Posługuje się nimi w postaci oryginalnej lub zmodyfikowanej wielu autorów. Wymieńmy tu L. Mišika [16], S.N. Mukhopadhyay'a [17], R.O'Malley'a [20], C. Weila [30] i D. Preissa [21]. Ten ostatni rozwiązał ostatecznie problem Zahorskiego, charakteryzując zbiory Lebesgue'a dla pochodnych skończonych i nieskończonych funkcji ciągłych i nieciągłych.

Trwałe miejsce w literaturze zajmuje zamieszczona w omawianej pracy [25] charakteryzacja zbioru Lebesgue'a funkcji aproksymatywnie ciągłej. Dowód dostateczności własności M_5, charakteryzującej te zbiory, polegający na konstrukcji ograniczonej funkcji aproksymatywnie ciągłej, nieujemnej, z zadanym zbiorem miejsc zerowych, jest bardzo często wykorzystywany jako część składowa innych konstrukcji. W pracy tej znajduje się też silne kryterium monotoniczności funkcji. Składa się na nie koniunkcja własności Darboux badanej funkcji, istnienia jej pochodnej poza zbiorem przeliczalnym (co powoduje, że rozważana funkcja jest pierwszej klasy Baire'a) i nieujemność tej pochodnej prawie wszędzie. Jest ono podobne do kryterium Tołstowa [25], złożonego z aproksymatywnej ciągłości rozważanej funkcji, istnienia jej pochodnej aproksymatywnej poza zbiorem przeliczalnym i nieujemności tej pochodnej prawie wszędzie. Jak widać obszary działania obu kryteriów krzyżują się. Założenia o różniczkowalności są u Tołstowa słabsze niż u Zahorskiego, a z założeniami o samej funkcji, tj. o klasie Baire'a i ciągłości aproksymatywnej jest odwrotnie. Zahorski zapytał, czy wystarczy dla monotoniczności i ciągłości stwierdzić słabsze cztery własności dotyczące zarówno różniczkowalności jak i samej funkcji. (1: f jest I klasy Baire'a; 2: f ma własność Darboux; 3: f'_{ap} skończona lub nie, istnieje z wyjątkiem zbioru najwyżej przeliczalnego; 4: f'_{ap} jest nieujemna prawie wszędzie). Obejmowałoby to zarówno twierdzenie Zahorskiego jak i twierdzenie Tołstowa, a nawet więcej od obu tych twierdzeń. Zahorski pokazał, że żaden z tych czterech warunków nie może być pominięty. Ten trudny problem doczekał się rozwiązania pozytywnego dopiero po 15 latach. Znaleźli niemal jednocześnie i niezależnie A. Bruckner i T. Świątkowski [3], [23].

Innym ważnym zbiorem analizy matematycznej, opisanym przez Zahorskiego, jest zbiór punktów rozbieżności całki osobliwej [9]. Warunki konieczne dla tego zbioru, przy założeniu że jądro spełnia pewne dość ogólne warunki, podał Faddiejew jeszcze w roku 1936, [8], przy czym jądro było funkcją trzech zmiennych: wolnej, całkowania i przejścia do granicy. Zahorski zajął się warunkami wystarczającymi w przypadku szczególnym, gdy jądro ma postać funkcji dwóch zmiennych, z których jedną zastąpiono różnicą dwu innych. Ten przypadek obejmuje jednak jądra najważniejsze dla analizy matematycznej: jądro Fejéra, ogólniej jądro Cesaro (C,r) oraz Abela-Poissona dla sumowalności szeregów trygonometrycznych Fouriera, jądra różniczkowania jednostronnego, symetrycznego i innych bardziej ogólnych. Ten wynik Zahorskiego pozwala charakteryzować zbiory punktów nieróżniczkowalności funkcji absolutnie ciągłych, a nawet funkcji spełniających warunek Lipschitza jako zbiory typu $G_{\delta\delta}$ miary zero.

Konstrukcja Zahorskiego z pracy [3], stanowiącej rozwiązanie problemu Jarnika, pozwoliła jej autorowi na rozwiązanie pewnego trudnego problemu z geometrii różniczkowej przy bardzo słabych założeniach, sformułowanego przez S. Mazura. Wiadomo było (A.J. Ward [29]), że krzywa Jordana, mająca styczną poza przeliczalnym zbiorem punktów, ma przedstawienie parametryczne różniczkowalne prawie wszędzie. Mazur pytał, czy można je poprawić tak, by było różniczkowalne wszędzie. Zahorski odpowiedział pozytywnie, [18] zakładając o samej krzywej mniej niż Ward. Zamiast istnienia stycznych wystarczy lokalna wpisywalność krzywej w stożki kołowe i pewien warunek ograniczający ilość punktów wielokrotnych. Bez żadnych warunków krzywa prostowalna ma przedstawienie parametryczne wszędzie różniczkowalne z pochodnymi ograniczonymi. Do tej samej gałęzi osobliwości geometrii różniczkowej należy praca [27]. Zawiera ona konstrukcję łuku zwykłego, prostowalnego, którego styczna przyjmuje na każdym łuku częściowym wszystkie kierunki. Autor dowodzi przy tym, że taka krzywa nie może posiadać stycznej w gęstym i nieprzeliczalnym zbiorze punktów. Przykład w pewnym sensie przeciwny - bo łuku zwykłego, mającego wszędzie styczną, której indykatrysa sferyczna, różna od punktu, posiada domknięcie będące zbiorem zerowymiarowym - został anonsowany w roku 1946 w C.R. Acad. Paris (nota 6).Pełny dowód wysłany do Journ. of the Chinese Math. Soc. w roku 1947 zaginął i nie jest do dziś opublikowany.

Charakteryzacje pewnych zbiorów punktowych zawiera też praca [10] . Tym razem dotyczy ona funkcji o wysokim stopniu regularności, bo klasy C_∞. Promień zbieżności szeregu Taylora $f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$ funkcji $f \in C_\infty$ może dla pewnych punktów x być równy zero. Punkty takie nazywamy osobliwymi w sensie Pringsheima. Jeżeli promień zbieżności szeregu Taylora jest dodatni i dla wszystkich h z pewnego otoczenia zera szereg ten jest zbieżny do $f(x+h)$, to punkt x nazywa się punktem regularnym. Punkt, który nie jest ani regularny, ani osobliwy w sensie Pringsheima nazywa się osobliwy w sensie Cauchy'ego. Dla każdej funkcji $f \in C_\infty$ zbiory jej punktów osobliwych w obu sensach są rozłączne, ich suma jest zbiorem domkniętym, i jak wykazał Zahorski zbiór punktów osobliwych w sensie Pringsheima jest typu G_δ a w sensie Cauchy'ego typu F_σ i pierwszej kategorii. Trudna i złożona konstrukcja, zajmująca większą część pracy, stanowi dowód, że wymienione tu własności obu zbiorów, a więc pośrednio i dopełnienia ich sumy, charakteryzują całkowicie trójki postaci {zbiór punktów osobliwych w s. Pringsheima, zbiór punktów osobliwych w s.Cauchy'ego,zbiór punktów regularnych}. Dowód tego twierdzenia został później zmodyfikowany przez H. Salzmana i K. Zellera [22] , a samo twierdzenie częściowo uogólnione przez T. Banga [1] i H. Zahorskę [31] .

Praca o punktach osobliwych powstała w związku z problemem Ulama, który Banach zakomunikował Zahorskiemu w następującej postaci: czy istnieje funkcja ciągła $f(x)$, taka, że dla każdej funkcji analitycznej $g(x)$ zbiór rozwiązań równania $f(x) = g(x)$ jest co najwyżej przeliczalny. Odpowiedź pozytywna, otrzymana w kilka minut po zadaniu pytania, jest opublikowana w pracy [10] . Warto zauważyć, że Ulam wpisał do Książki Szkockiej pytanie w formie przeciwnej niż zadał je Banach, odpowiadającej sformułowaniu "Czy nie istnieje funkcja ciągła...". Przeczytawszy, że Zahorski odpowiada pozytywnie, nie zwrócił uwagi na różnice sformułowań i publikując książkę [26] przypisał Zahorskiemu wynik przeciwny niż Zahorski otrzymał, a więc błędny, niemożliwy.

Rozwiązania równań $f(x) = g(x)$ są też tematem pracy [20] . J. Gillis [11] skonstruował skomplikowany przykład funkcji ciągłej $f(x)$, takiej, że dla najprostszej funkcji analitycznej $ax + b$ mającej punkty wykresu nad i pod wykresem funkcji f zbiory rozwiązań wymienionego równania są nieprzeliczalne. Praca [20] zawiera bardzo prosty, elementarny dowód, że fenomen taki zachodzi dla bardzo wielu funkcji f, między innymi dla ciągłej i nigdzie nie różniczkowalnej funkcji Weierstrassa, przy tym g może być dowolną funkcją analityczną, nie tylko liniową, a nawet więcej,dowolną funkcję mającą pochodne Diniego skończone.

Najbardziej znane są prace Zahorskiego z teorii szeregów Fouriera. Wiadomo od roku 1966 [7], że szereg Fouriera funkcji sumowalnej z kwadratem jest zbieżny prawie wszędzie. Przypuszczenie, że tak jest znajduje się w rozprawie doktorskiej Łuzina z roku 1912. Wielu wybitnych matematyków, wśród nich Zahorski, próbowało wykazać prawdziwość tej hipotezy. Gdy próby te nie wiodły się, coraz większego znaczenia nabierało stwierdzenie Kołmogorowa zamieszczone we wspólnej pracy z Mieńszowem w roku 1927 [13], że istnieje szereg trygonometryczny ze zbieżną sumą kwadratów współczynników, który po pewnym przestawieniu wyrazów staje się prawie wszędzie rozbieżny. Wobec twierdzenia Riesza-Fischera, jest to równoważne istnieniu funkcji sumowalnej z kwadratem, której szereg Fouriera po pewnym przestawieniu jest rozbieżny prawie wszędzie. Kołmogorow jednak nie podał ani dowodu, ani współczynników szeregu, ani permutacji jego wyrazów. Próby wykazania tego twierdzenia, niektóre nawet po otrzymaniu wskazówek od samego Kołmogorowa nie dawały rezultatu. Dopiero Zahorski opublikował (bez wskazówek) w roku 1960 przykład szeregu i metodę permutacji z dowodem w nocie 41, potwierdzające zapis Kołmogorowa. Praca ta jest oceniana przez specjalistów jako niezwykle trudna. Świadczy o tym też historia zagadnienia. Twierdzenie Carlesona o zbieżności prawie wszędzie szeregu Fouriera funkcji sumowalnej z kwadratem podnosi znaczenie wyniku Zahorskiego. Ciekawe, że w przestrzeni permutacji szeregów z pewną naturalną miarą, permutacje dające rozbieżność prawie wszędzie tworzą zbiór miary zero, jak wynika z prac A.M. Garsii [10].

Natychmiast po opublikowaniu metody Zahorskiego przeniesiono ją na szeregi ortogonalne Haara i Walsha a następnie na dowolne układy ortogonalne zupełne w L^2 (P. Ulianow [27], [28]), a nawet na rozwinięcia względem dowolnych baz w L^2 (A.M. Olewskij [19]). Do matematyków rozwijających metodę Zahorskiego i metody analogiczne należą też A.A. Tałalian [24] i K. Tandori.

Na tym kończymy przegląd prac. Obejmuje on tylko prace powszechnie uznane za ważne lub interesujące specjalnie autora przeglądu. Pełny i wnikliwy przegląd wszystkich prac Zygmunta ZAHORSKIEGO musiałby być opracowaniem zbiorowym.

PRACE CYTOWANE

[1] Bang T.: Sur les points singuliers dans un sens généralisé des fonctions indéfiniment dérivables. Den 11^{e} Skandiviske Matematikerkongress, Trondheim (1949), 259-263.

[2] Bartczak T.: O punktach osobliwych Cauchy'ego funkcji wielu zmiennych. Zesz. Nauk. Uniw. Łódzkiego, Nauki Matem.-Przyr. Seria II, z.52, Łódź (1973), 85-108.

[3] Bruckner A.: An affirmative answer to a problem of Zahorski and some consequences. Mich. Math. J. 13 (1966), 15-26.

[4] - On characterizing classes of functions in terms of associated sets. Canadian Math. Bull. 10 (1967), 227-232.

[5] Bruckner A., Leonard J.: On differentiable functions having an everywhere dense set of intervals of constancy. Canadian Math. Bull. 8 (1965), 73-76.

[6] Brudno A.: Непрерывность а диференцируемость. Mat. Sbornik,13, (55) (1943), 119-144.

[7] Carleson L.: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math., 116 (1966), 135-157.

[8] Faddeev D.K.: О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a. Mat. Sbornik 1 (43) (1936), 351-368.

[9] Filipczak F.M.: Sur le structure de l'ensemble des points où une fonction continue n'admet pas de dérivé symétrique. Dissertationes Mathematicae 130, PWN, Warszawa (1976), 1-48.

[10] Garsia A.M. and Rodemich E.: Monotonicity of certain functionals under rearrangements. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 24, (1974).

[11] Gillis J.: Note on a conjencture of Erdös. Quarterly J. of Math. 10 (1939), 151-154.

[12] Jarnik V.: Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich wird. Tôhoku Math. Journal 37 (1933), 248.

[13] Kolmogoroff A., Menschoff D.: Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. Math. Zeitschrift 26, (1927), 432-441.

[14] Mazurkiewicz S.: Konstrukcya funkcyi różniczkowalnej, mającej wszędzie gęsty zbiór przedziałów stałości. Prace Matematyczno-Fizyczne 27, (1915), 87-91.

15 Meres L.: On a certain family of functions of class C^{∞} in the space E^2. Demonstration Math. t. XV, No 1, 1982, str. 19-37.

15a Meres L.: On the singular points of Pringsheim - du Bois Reymond of a function of two variables. Demonstration Math. t. XV, No 2, 1982, str, 297-310.

[16] Mišik L.: Über die Klasse M_2. Časopis pro pěstování mat. 91,(1966), 389-393.

[17] Mukhopadhyay S.N.: Dini derivatives and certain classes de Z. orski. Coll. Math. t. XXV zesz. 1, (1972), 105-111.

[18] Neugebauer C.: Darboux functions of Baire class 1 and derivatives. Proc. Amer. Soc. 1, (1962), 838-843.

[19] Olevskii A.M.: Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам. DAN SSSR 138, (1961), 545-548.

[20] O'Malley R.: M_3 functions. Ind. Univ. Math. J. 24, (1974), 585-591.

[21] Preiss D.: Level sets of derivatives. Trans. Amer. Math. Soc. 272, (1982), 161-184.

[22] Salzman H. und Zeller K.: Singularitaten unendlich oft differenzierbarer Funktionen. Math. Zeitschrift 62, (1955), 354-357.

[23] Świątkowski T.: On the condition of monotonicity of functions. Fund. Math. 59, (1966), 189-201.

[24] Talalyan A.A.: Переставленные тригонометрические системы являющиеся системой сходимости в слабом смысле. Matem. Sbornik 63, (105),(1964), 620-638.

[25] Tolstoff G.: Sur quelques propriétés des fonctions approximativement comtineus. Rec. Math. Mat. Sbornik 5, (1939), 637-645.

[26] Ulam S.M.: A collection of Mathematical Problems. Los Alamos Scientific Laboratories, New Mexico. Przekład rosyjski: C. Улам. Нерешенные математические задачи, издат. "Наука", Москва 1964.

[27] Ulyanov P.L.: Расходящиеся ряды Фуре. Uspehi Matem. Nauk 16,(1961), 61-142.

[28] – Расходящиеся ряды по системе Хаара и по базисам. DAN SSSR 138,(1961). 556-559.

[29] Ward A.J.: On Jordan curves possessing a tangent everywhere. Fund. Math. 28, (1937), 280-288.

[30] Weil C.: A property for certain derivatives. Indiana Univ. Math. J. 23. (1973/74), 527-536.

[31] Zahorska H.: Über die singulären Punkte einer Funkction der Klasse C_{∞}. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 15, (1964), 77-94.

Wpłynęło do redakcji: 5.I.1984 r.

SPIS PUBLIKACJI NAUKOWYCH, DYDAKTYCZNYCH I POPULARNYCH Z. ZAHORSKIEGO

1. Über die Konstruktion einer differenzierbaren, monotonem, nicht konstanten Funktion, mit uberall dichter Menge von Konstanzintervallen. Sprawozd. Tow. Naukowego Warszawskiego XXX, 1937, Wydział III, s.202-206.
2. О множестве точек недиференцируемости непрерывной функции. Rec. Math. Moscou (Matem. сборник), N.S., t. 9 (51):3, 1941, s. 487-510.
3. Uber die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist. Tohoku Mathematical Journal, t. 48, cz. 2, 1941, s. 321-330. Sendai, Japan.
4. Sur les intégrales singulières. Compt. Rend. de l'Academie des Sciences, Paris, t. 223, 1946, s. 399-401.
5. Sur les dérivées des fonctions partout dérivables. C.R. de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 223, 1946, s. 415-417.
6. Problèmes de la théorie des ensembles et des fonctions. C.R. de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 223, 1946, s. 449-451.
7. Un problème de la thèorie des ensembles et des fonctions. C. R. de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 223, 1946, s. 465-467.
8. Sur l'ensemble des points de non-dérivabilité d'une fonction continue. Bull. de la Société Mathématique de France, t. 74, 1946, s. 147-178.
9. Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières. Ann. de la Soc. Polonaise de Math. (Rocznik Pols. Tow. Matematycz.), t. 19, 1946 (1947), s. 66-105.
10. Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres. Fundamenta Mathematicae, Warszawa, t. 34, 1947, s. 183-245.
11. O zbiorze punktów nieróżniczkowalności funkcji dowolnej. Sprawozd. z V Zjazdu Matem. Polskich w Krakowie z dn. 29-31 maja 1947, odbitka z Dodatku do Rocznika Pol. Tow. Matematycz. t. 21, 1949 (1952?) s.25-26.
12. Sur un problème de M.G. Choquet. Interm. des Recherches Mathém., 3, (1947) s. 37.
13. Tytuły prac Z. Zahorskiego zrobionych w czasie wojny 1939-1945. Sprawozdanie (Biuletyn) Pol. Akad. Um., 1947, 7, s. 7.

14. P 8. (Problem, nie prace, w jęz. francuskim). Problem o funkcjach gładkich, od dawna banalny. Colloquium Mathem., Wrocław, t.I, zesz.1, 1947, s. 32.

15. P 9. Problem o funkcjach gładkich (trudniejszy). Coll. Math., t. I, zesz. 1, s. 32, 1947.

16. On zeros of Quasi-analytic (B) functions. Bull.of the Calcutta Mathem. Society, t. 39, No 4, 1947, s. 157-165.

17. On a problem of M.F. Leja. Rocznik Pol. Tow. Matematycz., t. 20, 1947 (1948), s. 215-222.

18 О жордановых кривых, обладающих в каждой точке касательной. Rec. Math. (Mat. сборник) N.S., t. 22 (64) :1,1948, s. 3-26.

19. On aproblem of G. Choquet. Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky, t. 73, 1948, s. 69-77.

20. Sur l'ensemble des racines de l' équation W(x) = f(x). Sprawozd.Tow. Naukowego Warszawskiego, Wydz. III, t. 41, 1948, s. 43-45.

21. Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque. Rocznik Pols. Tow. Matem., t. 21, cz. II, 1948 (1949), s. 306-323.

22. P 69. Problem o funkcjach elementarnych. Coll. Math., t. II, zesz.1, 1949, s. 61-62.

23. Supplement au memoire "Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres". Fund. Math., t. 36, 1949, s. 319-320.

24. Sur les courbes dont la tangente admet sur chaque arc toutes les directions. O krzywych, których styczna przyjmuje na każdym łuku wszystkie kierunki. Plus streszczenie w języku czeskim, napisane przez V. Jarnika. Časopis pro pěstováni mat. a fis., t. 74, 1949, s. 233-235, Sprawozdanie z wspólnego VII Zjazdu Matematyków Polskich i III Zjazdu Matematyków Czechosłowackich w Pradze Czeskiej we wrześniu 1949 r.

25. Sur la première dérivée. Transactions of the American Mathematical Society, t. 69, No 1, 1950, s. 1-54.

26. (Recenzja w języku francuskim). Banach S. Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych. Rocznik Pols. Tow. Matem., t. 24, cz. II, 1951 (1953), s. 203-206.

27. Sur les courbes dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions. Czechoslov. Math. Journal, t. 1 (76), 1952, s. 105-117.

28. О кривых, касательная которых принимает на любом отрезке дуги все возможные направления. Чехословацкий математический журнал, t.1 (76),1952, s. 125-139. Oczywiście dosłowny przekład poprzedniej pozycji.

29. (Recenzja po polsku) 209. S. Mandelbrojt. Quelques nouveaux théorèmes de fermeture. Pols. Bibliografia Analityczna. Matem., rok II, zesz.1, 1956, s. 41-42.

30. (Recenzja po polsku) 233. H. Freudenthal. Enden und Primenden. Pols. Bibliogr. Analit., Matematyka, rok II, zesz. 1, 1956, s. 62-63.

31. (Recenzja po rosyjsku) 6257. J.S. Lipiński. Une propriété des ensembles $\{f'(x) > a\}$. Реферативный журн. Математика, 1957, No 8, s.34-35.

32. (Recenzja po rosyjsku) 6287. Kleiner W. Démonstration du théorème de Osgood - Caratheodory par la méthode des points extremaux. Реф.журнал Математика, 1957, No 8, s. 44.

33. (Recenzja po rosyjsku) 8527. J.S. Lipiński. Sur les ensembles $\{f(x) > a\}$ où f(x) sont des fonctions integrables au sens de Riemann. Реферативный журнал Математика, , 1957, No 11, s. 38-39.

34. P 168. Problem o pewnej całce trygonometrycznej,związanej z szeregami Fouriera. Coll. Mathematicum, t. IV, zesz. 2, 1957, s. 241.

35. P 169. Problem o współczynnikach Fouriera funkcji ograniczonej. Coll. Mathematic., t. IV, zesz. 2, 1957, s. 241.

36. P 170. Problem o mnożnikach Weyla układu trygonometrycznego przestawionego. Coll. Math., t. IV, zesz. 2, 1957, s. 241.

37. Wykłady matematyki cz. III (części I i II, znacznie lapsze dydaktycznie, napisał zmarły doc. Jan Słowikowski). Skrypt, Państw. Wyd.Naukowe, oddz. w Łodzi, 1959, s. 3-251.

38. Przypisy do przekładu z niemieckiego przez B. Konorskiego, redaktorzy L. Włodarski i Z. Zahorski, książki K.W. Wagner, Rachunek Operatorowy i przekształcenie Laplace'a, przypisy z elektrotechniki B. Konorski, przypisy z matematyki L. Włodarski i Z. Zahorski. Warszawa 1960, Państw. Wyd. Naukowe, s. 93-97, 534-543, 610-614-617.

39. Komentarze do ośmiu prac Banacha w zbiorowym wydaniu dzieł Banacha przez Inst. Matemat. Pol. Akad. Nauk. Danych o roku wydania brak

40. (Recenzja po rosyjsku) pracy R. Sikorski, O twierdzeniu Vitaliego.Реферативный журн. Математ. danych szczegółowych (rok, tom, strony) brak.

41. Une série de Fourier permutée d'une fonction de classe L^2 divergente presque partout. Compt. Rend. de l'Acad. des Scien., Paris, t. 251, 1960, s. 501-503.

42. Sur la convergence presque partout des séries de Fourier. Compt.Rend. de l'Acad. des Scien., Paris, 1961, pozostałych danych brak.

43. O królowej nauk. (Tytuł nie mój, wymyślony przez redakcję "Przekroju" Artykuł popularny dla czytelników z wykształceniem od niepełnego podstawowego do średniego). Przekrój, 1975, NR 1557, s. 10-11,23.