ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

Piotr Włodzimierz GAWRON

О РАСПОЛОЖЕНИИ НЕПОЛИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ЮНГА В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

Резюме. В работе изучается решетка подгрупп, содержащих фиксированную подгруппу Юнга. Описано строение букетов, опирающихся на подгруппах Юнга. Приводятся нужные сведения из работ [1], [2], [3]. Доказана теорема.

Пусть μ-эквивалентность на множестве $I = \{1,\dots,n\}$ и S_n - симметрическая группа, действующая на I. Пусть $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$ - разбиение I на μ-классы и подгруппа Юнга $S(\mu) = S(I_1)\times \dots \times S(I_m)$ - неполинормальна в S_n (т.е. число одноэлементных μ-классов не меньше числа элементов в некотором нетривиальном μ-классе). Зафиксируем μ-класс R (мощность которого p минимальна среди всех мощностей нетривиальных μ-классов) и p одноэлементных μ-классов $R_1,\dots,R_p$. Подгруппа $S(\mu)$ является веерной в группе S_n, тогда и только тогда, когда для любого набора $P_1,\dots,P_r$; $Q_1,\dots,Q_s$ различных μ-классов, отличных от R и $R_1,\dots,R_p$ всегда имеем:

$$|P_1| + \dots + |P_r| \neq |Q_1| + \dots + |Q_s|.$$

1. ПОДГРУППЫ ЮНГА

В этом параграфе приводим некоторые свойства подгрупп Юнга из [2].

Пусть $I = \{1,\dots,n\}$ - отрезок натурального ряда. Симметрическую группу, действующую на I будем обозначать через S_n. Если X-подмножество множества I, то $S(X)$ считаем подгруппой в S_n. Русть μ-эквивалентность на I и $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$ - соответствующие разбиение на μ-классы. Тогда группу $S(\mu) = S(I_1)\times\dots\times S(I_m)$ называем подгруппой Юнга в S_n. Нормализатор подгруппы $S(\mu)$ в S_n обозначаем через $N(\mu)$.

Все подгруппы Юнга в симметрической группе образуют подрешетку решетки подгрупп в S_n и эта подрешетка изоморфна решетке всех эквивалентностей на множестве I.

Если μ -эквивалентность на I и $\pi \in S_n$, то μ^{π} обозначает эквивалентность классами которой являются множества $\pi(I_1),\dots,\pi(I_m)$, где $I_1,\dots,I_m$ - μ-классы. Тогда имеем, что

$$(S(\mu))^{\pi} = S(\mu^{\pi}).$$

Типом подгруппы Юнга $S(\mu)$ (эквивалентности μ) называем последовательность неотрицательных целых чисел

$$T(\mu) = (T_1(\mu),\ldots,T_n(\mu))$$

где $T_r(\mu)$ обозначает число μ-классов, состоящих из r элементов. Две подгруппы Юнга $S(\mu)$ и $S(\vartheta)$ сопряжены тогда и только тогда, когда $T(\mu) = T(\vartheta)$.

Если P и Q два μ-класса имеющие одинаковое число элементов:

$$P = \{i_1 < \ldots < i_r\}, \quad Q = \{j_1 < \ldots < j_r\},$$

то положим

$$\pi_{PQ} = (i_1 j_1)\ldots(i_r j_r).$$

Ясно, что $\pi_{PQ} \in N(\mu)$. Тогда нормализатор $N(\mu)$ является полупрямым произведением подгруппы $S(\mu)$ и подгруппы, порожденной всеми подстановками вида π_{PQ}, где P и Q пробегают все μ-классы с условием $|P| = |Q|$.

Фактор-группа $N(\mu)/S(\mu)$ – изоморфна прямому произведению симметрических групп степеней $T_1(\mu),\ldots,T_n(\mu)$.

Если μ-нееденичная эквивалентность $(\mu \neq 1)$, то через $p(\mu)$ обозначаем наименьший из порядков всех ее неединичных μ-классов.

2. ВЕЕРНЫЕ ПОДГРУППЫ. РАЗЛОЖЕНИЕ НА БУКЕТЫ

Напомним несколько фактов из [1], [3] (см. тоже [2] и [4]).

Пусть G-группа и D-ее подгруппа. Всякую подгруппу H, для которой $D \leqslant H \leqslant G$ называем промежуточной. Решетку всех промежуточных подгрупп обозначим $L(D,G)$. Если для D существует множество промежуточных подгрупп $\{G_\alpha\}$, такое что для любой промежуточной подгруппы H имеется точно одна подгруппа G_α, которая является нормальным делителем в H, то множество $\{G_\alpha\}$ называем веером подгруппы D в группе G, а подгруппу D в е е р н о й. Подгруппы G_α называем базисными подгруппами веера $\{G_\alpha\}$. Обозначим нормализатор базисной подгруппы G_α через N_α. Решетку $L(G_\alpha,N_\alpha)$ будем называть секцией веера $\{G_\alpha\}$, а фактор-группу N_α/G_α – фактор-секцией веера. Для веерной подгруппы D решетка $L(D,G)$ распадается в дизъюнктное объединение решеток $L(G_\alpha,N_\alpha)$ т.е.

$$L(D,G) = \bigcup_{\alpha}^{\Phi} L(G_\alpha,N_\alpha). \tag{1}$$

Если D-веерная подгруппа в G и H – промежуточная подгруппа, то D является веерной подгруппой в H.

Заметим, что если D – веерная подгруппа и H – минимальная, промежуточная подгруппа, не нормализирующая D, то H является базисной подгруппой веера подгруппы D.

Пусть A – подмножество в G. Через D^A обозначим подгруппу, порожденную всеми подгруппами D^a, сопряженными с D при помощи элементов из A. Промежуточная подгруппа F называется D – полной, если $F = D^F$. Для любой D– полной подгруппы F можно построить множество $\beta(F)$, всех промежуточных подгрупп, в которых F является субнормальной (в широком трансфинитном смысле) подгруппой. Множество $\beta(F)$ называется букетом опирающимся на подгруппе F. В [3] доказано, что решетка $L(D,G)$ распадается в дизъюнктное объединение букетов $\beta(F)$, т.е.

$$L(D,G) = \bigcup_{F=D^F}^{\Phi} \beta(F). \tag{2}$$

Если D-подгруппа конечного индекса в G и промежуточная подгруппа H лежит в букете $\beta(F)$ то ряд

$$H \trianglerighteq D^H \trianglerighteq D^{D^H} \trianglerighteq \ldots \tag{3}$$

стабилизируется на подгруппе F.

Пусть подгруппа D-веерна, тогда любая D-полная подгруппа F тоже веерна.

Если подгруппа D-веерна, то любая секция ее веера целиком содержится в некотором букете. Подгруппу D называем полинормальной в G, если она веерна и для нее разложение на секции [1] совпадает с разложением на букеты [2]. Напомним, что субнормализатором подгруппы D называем наибольшую подгруппу, в которой D является субнормальной, если такая подгруппа существует. Если подгруппа D-полинормальна, то субнормализатор любой D-полной подгруппы F совпадает с ее нормализатором.

3. СТРОЕНИЕ БУКЕТОВ ОПИРАЮЩИХСЯ НА ПОДГРУППАХ ЮНГА

Пусть μ -эквивалентность на множестве I. В работе [2] описывается строение $S(\mu)$-полных подгрупп. Приведем нужные леммы из этой работы.

<u>Лемма 1</u> ([2]). Пусть $E \neq S(\mu) \leqslant S(\vartheta)$. Подгруппа $S(\vartheta)$ порождается системой сопряженных с $S(\mu)$ подгрупп тогда и только тогда, когда $p(\mu) \leqslant p(\vartheta)$.

<u>Лемма 2</u> ([2]). Подгруппа Юнга $S(\mu)$ является нормальным делителем подгруппы Юнга $S(\vartheta)$ тогда и только тогда, когда любой неодноэлементный μ-класс является ϑ-классом (т.е. любой ϑ -класс является или μ -классом или объединением одноэлементных μ -классов).

<u>Следствие 1</u> ([2]). В решетке подгрупп Юнга отношение нормальности транзитивно.

Следующая лемма описывает $S(\mu)$-полные подгруппы Юнга в S_n. Очевидно, все $S(\mu)$-полные подгруппы являются подгруппами Юнга.

<u>Лемма 3</u> ([2]). Пусть $S(\mu) \leqslant S(\vartheta)$. Подгруппа Юнга $S(\vartheta)$ является $S(\mu)$-полной тогда и только тогда, когда не существует ϑ-классов, которые были бы объединениями по крайней мере двух различных одноэлементных μ-классов.

<u>Теорема 1</u> ([2]). Неединичная подгруппа Юнга $S(\mu)$ является полинормальной в S_n тогда и только тогда, когда

$$\tau_1(\mu) < p(\mu), \tag{4}$$

т.е. число одноэлементных μ-классов строго меньше числа элементов в каждом из прочих классов.

Теорема 1 в месте с леммой 3 описывают строение букетов для полинормальных подгрупп Юнга.

Условие полинормальности подгрупп Юнга можно дать в других терминах.

<u>Теорема 2</u>. Подгруппа Юнга $S(\mu)$ является полинормальной в S_n тогда и только тогда, когда нормализатор $N(\vartheta)$ любой подгруппы Юнга $S(\vartheta)$, в которой $S(\mu)$ нормальна, содержится в нормализаторе $N(\mu)$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $S(\mu)$-неединичная подгруппа.

Пусть $S(\mu)$ является полинормальной подгруппой в S_n. Русть $S(\mu)$-нормальная подгруппа в некоторой подгруппе Юнга $S(\vartheta)$. Если не выполнено условие теоремы, то или подгруппа $S(\mu)$ не имеет субнормализатора или существует субнормализатор ио отличный от $N(\mu)$ поскольку содержит $N(\vartheta)$.

Обратно, пусть $S(\mu)$-неполинормальная подгруппа. Значит не выполняется условие [4]. Положим $p = p(\mu)$. Пусть $P = \{x_1, \dots, x_p\}$ - μ-класс содержащий p элементов и $\{y_1\}, \dots, \{y_p\}$ - p одноэлементных μ-классов. Положим $Q = \{y_1, \dots, y_p\}$ и $S(\vartheta) = S(\mu) \times S(Q)$. Тогда $S(\mu)$-нормальна в $S(\vartheta)$ и подстановка π_{PQ} нормализует $S(\vartheta)$, но не содержится в $N(\mu)$. Теорема доказана.

Если подгруппа $S(\mu)$-неполинормальна, то надо описать еще максимальные подгруппы букета $\beta(S(\mu))$.

<u>Теорема 3</u>. Максимальными подгруппами в букете $\beta(S(\mu))$ опирающимся на подгруппе Юнга $S(\mu)$ являются нормализаторы всех полинормальных подгрупп Юнга $S(\vartheta)$, в которых $S(\mu)$ является нормальным делителем, и которые порождаются подгруппами сопряженными с $S(\mu)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть H-максимальная подгруппа в $\beta(S(\mu))$. Из следствия 1 получаем, что цепь (3) имеет вид $H \trianglerighteq S(\mu)^H \trianglerighteq S(\mu)$. Положим $S(\vartheta) = S(\mu)^H$. Из максимальности H в букете следует, что $H = N(\vartheta)$. Если подгруппа Юнга $S(\vartheta')$ содержит $S(\vartheta)$ и содержится в $N(\vartheta)$, то $N(\vartheta')$ содержится в $N(\vartheta)$. Значит, для $S(\vartheta)$ выполнено условие теоремы 2, т.е. $S(\vartheta)$-полинормальная подгруппа в S_n.

4. УСЛОВИЯ ВЕЕРНОСТИ ПОДГРУПП ЮНГА

До конца параграфа предполагаем, что μ-нееденичная эквивалентность.

Лемма 4. Если для эквивалентности μ выполняется неравенство $p(\mu) + 2 \leqslant T_1(\mu)$, то подгруппа Юнга $S(\mu)$-невеерна в группе S_n.

Доказательство. Пусть P будет μ-классом содержащим $p = p(\mu)$ элементов и Q-объединение $p+2$ одноэлементных μ-классов. Через μ' обозначим эквивалентность, неодноэлементными классами которой являются все неодноэлементные μ-классы кроме P. Если $S(\mu)$-веерная подгруппа в S_n, то $S(\mu)$-веерна в $S(\mu')\times S(P\cup Q)$ и следовательно получаем, что $S(P)$ является веерной подгруппой в $S(P\cup Q)$.

Пусть $Q = Q_1 \cup \{x,y\}$, где $|Q_1| = p$. Определим $H_1 = \langle S(P), S(Q_1), \pi_{PQ_1}\rangle$ и $H_2 = \langle S(P), S(Q_1), \pi_{PQ_1}(x\,y)\rangle$. Так как $S(P)^{H_1} = S(P)^{H_2} = S(P)\times S(Q_1)$ и индекс подгрупп H_1 и H_2 над подгруппой $S(P)\times S(Q_1)$ равняется 2, то подгруппы H_1 и H_2 являются минимальными промежуточными подгруппами, не нормализующими $S(P)$, т.е. H_1 и H_2 - базисные подгруппы веера подгруппы $S(P)$. Но H_1 и H_2 имеют общий нормализатор $\langle S(P), S(Q_1), \pi_{PQ}, (xy)\rangle$ в группе $S(P\cup Q)$, что противоречит веерности $S(P)$.

Лемма 5. Если для некоторого числа m, $1 < m \leqslant T_1(\mu)$, имеем не менее трех m-элементных μ-классов, то подгруппа $S(\mu)$-невеерна в группе S_n.

Доказательство. По подобным рассуждениям как в начале доказательства леммы 4 достаточно доказать, что подгруппа $S(\mu) = S(P_1)\times S(P_2)\times S(P_3)$ - не веерна в $S(P)$, где $P = P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4$, $|P_1| = |P_2| = |P_3| = |P_4| \geqslant 2$ и $P_i \cap P_j$ пусто, если $i \neq j$. Предположим, что $S(\mu)$-веерная подгруппа в $S(P)$. Положим $H = S(\mu)\times S(P_4)$ и $H_1 = \langle H, \pi_{P_1P_2}\pi_{P_3P_4}\rangle$, $H_2 = \langle H, \pi_{P_1P_3}\pi_{P_2P_4}\rangle$. Поскольку $S(\mu)^{H_1} = S(\mu)^{H_2} = H$ и $|H_1 : H| = |H_2 : H| = 2$, то H_1 и H_2 - базисные подгруппы веера подгруппы $S(\mu)$. Но H_1 и H_2 - нормальные подгруппы в $\langle H_1, H_2\rangle$, что противоречит веерности $S(\mu)$ в $S(P)$.

Лемма 6. Пусть $S(\mu)$-неполинормальная подгруппа Юнга в S_n. Если для некоторого $m > p(\mu)$ имеем не менее двух m-элементных μ-классов, то $S(\mu)$-невеерная подгруппа в S_n.

Доказательство. Пусть m такое, что $T_m(\mu) \geqslant 2$ и $m > p(\mu)$. Пусть P_1, P_2 - два m-элементные μ-класса, Q - μ-класс содержащий $p(\mu)$ элементов и R-объединение $p(\mu)$ одноэлементных μ-классов. Как и выше достаточно доказать, что подгруппа $S(\vartheta) = S(P_1)\times S(P_2)\times S(Q)$ является невеерной в группе $S(P)$, где $P = P_1\cup P_2\cup R\cup Q$. Предположим, что $S(\vartheta)$ является веерной в $S(P)$. Тогда подгруппы

$$H_1 = \langle S(\vartheta), \pi_{QR}\rangle, \quad H_2 = \langle S(\vartheta), \pi_{QR}\pi_{P_1P_2}\rangle$$

являются минимальными подгруппами, не нормализующими $S(\vartheta)$. Значит, H_1 и H_2 - базисные подгруппы веера подгруппы $S(\vartheta)$. Но H_1 и H_2 являются нормальными делителями в подгруппе ими порожденной, что противоречит веерности подгруппы $S(\vartheta)$ в группе $S(P)$.

Перейдем теперь к основной теореме.

Теорема 4. Пусть $S(\mu)$ – неполинормальная подгруппа Юнга в симметрической группе S_n. Зафиксируем μ-класс R имеющий $p = p(\mu)$ элементов и p разных одноэлементных μ-классов $R_1,\dots,R_p$. Подгруппа $S(\mu)$ является веерной в S_n тогда и только тогда, когда для любого набора $P_1,\dots,P_r$; $Q_1,\dots,Q_s$ различных μ-классов (отличных от R и $R_1,\dots,R_p$) всегда имеем:

$$|P_1| + \dots + |P_r| \neq |Q_1| + \dots + |Q_s|. \tag{5}$$

Доказательство. В начале докажем достаточность условия теоремы. Заметим, что если $S(\vartheta)$ является $S(\mu)$-полной подгруппой, то или $S(\vartheta)$-полинормальна, или для $S'(\vartheta)$ тоже выполняются условия теоремы. Значит, достаточно доказать веерность $S(\mu)$ в ее букете, т.е. доказать существование разложения типа 1. Из условия 5 следует, что $T_1(\mu) \leqslant p+1$, $T_p(\mu) \leqslant 2$ и $T_u(\mu) \leqslant 1$, если $u > p$. Очевидно, $T_1(\mu)$ может принимать значения p или $p+1$.

Рассмотрим случай $T_1(\mu) = p$. Единственной полинормальной подгруппой из букета $\beta(S(\mu))$, порожденной подгруппами сопряженными с $S(\mu)$ является $S(\vartheta) = S(\mu) \times S(P)$, где P есть объединение μ-классов $R_1,\dots,R_p$. Следовательно, букет $\beta(S(\mu))$ имеет единственную максимальную подгруппу $N(\vartheta)$. Тогда фактор-группа $G = N(\vartheta)/S(\vartheta)$ изоморфна группе S_2, если $T_p(\mu) = 1$ или группе S_3, если $T_p(\mu) = 2$.

Если G-изоморфна группе S_2, то единственной подгруппой в $\beta(S(\mu))$, ненормализующей $S(\mu)$, является $N(\vartheta)$ и базисными подгруппами веера подгруппы $S(\mu)$ в ее букете являются $S(\mu)$ и $N(\vartheta)$.

Если G-изоморфна группе S_3, то подгруппы $S(\vartheta)$, $\langle S(\vartheta), \pi_{Q_1Q_2} \rangle$ (Q_1, Q_2 - μ-классы имеющие p элементов), нормализуют $S(\mu)$ и остаются четыре подгруппы ненормализующие $S(\mu)$, т.е.

$$\langle S(\vartheta), \pi_{PQ_1} \rangle,\ \langle S(\vartheta), \pi_{PQ_2} \rangle,\ \langle S(\vartheta), \pi_{PQ_1}\pi_{PQ_2} \rangle\ N(\vartheta).$$

Так как третья из них нормальна в $N(\vartheta)$ и две первые самонормализуются, то подгруппы

$$S(\mu),\ \langle S(\vartheta), \pi_{PQ_1} \rangle,\ \langle S(\vartheta), \pi_{PQ_2} \rangle,\ \langle S(\vartheta), \pi_{PQ_1}\pi_{PQ_2} \rangle$$

составляют систему базисных подгрупп веера подгруппы $S(\mu)$ в ее букете.

Рассмотрим случай $T_1(\mu) = p+1$. Тогда из условия (5) следует, что $T_{p+1}(\mu) = 0$ и следовательно все максимальные подгруппы в букете $\beta(S(\mu))$ это нормализаторы следующих подгрупп Юнга:

$$S(\vartheta_i) = S(\mu) \times S(P_i), \quad S(\vartheta) = S(\mu) \times S(P),$$

где P_i -объединение p одноэлементных μ-классов, $i=1,\dots,p+1$, и P-объединение $p+1$ одноэлементных μ-классов.

Очевидно, нормализатор $N(\vartheta)$ подгруппы $S(\vartheta)$ совпадает с нормализатором $N(\mu)$ подгруппы $S(\mu)$.

Если $T_p(\mu) = 1$, то все подгруппы не нормализующие $S(\mu)$ это максимальные подгруппы в $\beta(S(\mu))$ (кроме $N(\vartheta)$) и базисными подгруппами веера подгруппы $S(\mu)$ в ее букете являются $S(\mu)$ и $N(\vartheta_1)$.

Пусть $T_p(\mu) = 2$ и Q_1, Q_2 $-\mu$-классы имеющие p элементов. По подобным рассуждениям как выше получаем, что базисными подгруппами веера подгруппы $S(\mu)$ в ее букете будут подгруппы:

$$S(\mu),\ \langle S(\mu_1), \mathfrak{T}_{P_1Q_j}\rangle,\ \langle S(\vartheta_1), \mathfrak{T}_{P_jQ_1}\mathfrak{T}_{P_jQ_2}\rangle,$$

$$i = 1,\dots, p+1;\quad j = 1,2.$$

Обратно, докажем необхрдимость условия теоремы. Пусть для различных μ-классов $P_1,\dots,P_r$; $Q_1,\dots,Q_s$, отличных от R и $R_1,\dots,R_p$ имеем

$$|P_1| + \dots + |P_r| = |Q_1| + \dots + |Q_s| = t.$$

Если между классами $P_1,\dots,P_r$; $Q_1,\dots,Q_s$ имеем более одного одноэлементного μ-класса, то $T_1(\mu) \geqslant p+2$ и из леммы 4 следует невеерность $S(\mu)$. Пусть все классы $P_1,\dots,P_r$; $Q_1,\dots,Q_3$ - неодноэлементные (кроме может быть одного). Если $t=p$, то $r=s=1$ и имеем три p-элементные μ-классы P_1, Q_1, R и по лемме 5 получаем невеерность $S(\mu)$. Пусть теперь $t > p$. Определим эквивалентность ϑ. Ее классы это $P = P_1 \cup \dots \cup P_r$, $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_s$ и все другие μ-классы. Тогда подгруппа $S(\vartheta)$-неполинормальна и $S(\mu)$-полная. Из леммы 6 следует, что $S(\vartheta)$-невеерна в S_n. Из $S(\mu)$-полноты подгруппы $S(\vartheta)$ следует, что $S(\mu)$-тоже невеерная подгруппа. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боревич З.И.: О расположении подгрупп. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 94, с. 5-12.

[2] Боревич З.И., Гаврон П.В.: О расположении подгрупп Юнга в симметрической группе. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1983, т. 132, с. 34-43.

[3] Боревич З.И., Мацедонская О.Н.: О решетке подгрупп. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1980, т. 103, с. 13-19.

[4] Gawron P.W., Macedońska O.N.: Struktury podgrup. Zesz. nauk. Pol. Śląskiej (w druku).

Recenzent: Doc. dr hab. Ernest Płonka

Wpłynęło do redakcji: 21.II.1984

O POŁOŻENIU NIEPOLINORMALNYCH PODGRUP YOUNGA W GRUPIE SYMETRYCZNEJ

S t r e s z c z e n i e

W pracy badana jest struktura podgrup, zawierających daną podgrupę Younga. Opisuje się budowę bukietów opartych na podgrupie Younga. Przytoczono potrzebne wiadomości z prac [1], [2], [3]. Głównym wynikiem pracy jest następujące twierdzenie:

Niech μ będzie relacją równoważności na zbiorze $I = \{1,\dots,n\}$ i S_n grupę symetryczną działającą na I. Niech $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$ będzie rozbiciem I na klasy równoważności relacji μ (μ-klasy). Załóżmy, że podgrupa Younga $S(\mu) = S(I_1) \times \dots \times S(I_m)$ jest niepolinormalna w S_n (tzn. liczba jednoelementowych μ-klas jest nie mniejsza od liczby elementów w pewnej nietrywialnej μ-klasie). Ustalmy μ-klasę R, moc której p jest najmniejsza wśród mocy nietrywialnych μ-klas i p jednoelementowych μ-klas $R_1,\dots,R_p$. Podgrupa $S(\mu)$ jest wachlarzowa w grupie S_n wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych μ-klas $P_1,\dots,P_r$; $Q_1,\dots,Q_s$, różnych od R i $R_1,\dots,R_p$ zawsze mamy:

$$|P_1| + \dots + |P_r| \neq |Q_1| + \dots + |Q_s|.$$

ON ARRANGEMENT OF YOUNG SUBGROUPS IN THE SYMMETRIC GROUP

S u m m a r y

The paper concerns the lattice of subgroups which contain a fixed Young subgroup. The constructions of bouquets are given. The main result reads:

Let μ be an equivalence on the set $I = \{1,\dots,n\}$ and S_n the symmetric group acting on I. Let $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$ be a splitting of I for μ-classes and $S(\mu) = S(I_1) \times \dots \times S(I_m)$ is not polynormal in S_n that is the number of single element μ-classes is not less then the number of elements in some non-trivial μ-class. We fix μ-class R (where $|R| = p$ is the minimal cardinality for non-trivial μ-classes) and fix p single element μ-classes $R_1,\dots,R_p$. Then the subgroup $S(\mu)$ is a fan-subgroups in S_n if and only if for any collection $P_1,\dots,P_r$; $Q_1,\dots,Q_s$ of different μ-classes not equal to R, $R_1,\dots,R_p$ we hove

$$|P_1| + \dots + |P_r| \neq |Q_1| + \dots + |Q_s|.$$