ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

M. KUCHARZEWSKI

ÜBER DIE GRUNDLEGENDEN BEGRIFFE DER KLEINSCHEN RÄUME

Streszczenie. Praca ma charakter przeglądowy. Zostały w niej zebrane, uporządkowane i uzupełnione najważniejsze wyniki związane z przestrzeniami Kleina, uzyskane w ostatnich czasach. Sprecyzowano pojęcia przestrzeni Kleina i jej geometrii, reperu i orientacji. Podano warunek wystarczający i konieczny na tzw. s-orientowalność przestrzeni. Pojęcia zostały zilustrowane na kilku przykładach szczególnie ważnych w zastosowaniach. Na zakończenie przedstawiono sugestię pewnej metody, która może służyć do określenia podprzestrzeni. Otwiera to możliwości dalszych badań nad klasyfikacją tych przestrzeni.

Ich möchte hier wichtigste Ergebnisse, die in der Theorie der Kleinschen Räume in den letzten Zeiten erhalten worden sind, darstellen und ergänzen. Diese sind in verschiedenen oft schwer zugänglichen Arbeiten enthalten und gewisse Ergänzungen und sogar Verbesserungen efordern, ([1], [2], [3], [4], [5], [14], [15]).

Die Begriffe des Kleinschen Raumes und seiner Geometrie wurden in [5] möglichst genau dargestallt. Da aber die entsprechende Arbeit [5] noch unter der Presse sich befindet und sie polnisch geschrieben ist, wiederhole ich hier die wichtigsten Sachen, die dort enthalten sind.

Die Betrachtungen werden mit einigen Beispielen erläutern. Ein dieser zeigt wie man die Euklidische Ebene orientieren kann, das andere - wie man Unterräume (Geraden) im affinen Kleinschen Raume difinieren kann.

Die hier auftretenden Begriffe sind sehr allgemein, aber dadurch abstrakt. Es ist nicht leicht sie in speziellen Fällen anzuwenden und gute Intuitionen zu bilden. Darum es scheint, dass es nützlich sei diese Beispiele zu geben.

Die Arbeit enthält keine Beweise. Diese sind in der zietierten Literatur zu finden.

1. Zuerst gebe ich die Definitionen des Kleinschen Raumes und der Kleinschen Geometrie. Ähnliche Definition des Kleinschen Raumes hat R.Sulanke in [8], (vgl. auch [9]), eingeführt. Diese Begriffe sind aber nicht identisch.

Def. 1.1. Unter dem Kleinschen Raum verstehe ich den folgenden Dreitupel (Tripel)

$$(M, G, f), \qquad (1,1)$$

wo M beliebige nicht leere Menge ist, G eine beliebige Gruppe bedeutet und $f : M \times G \longrightarrow M$ eine effektive linksseitige Wirkung von G auf M darstellt. Die Abbildung f muss also die drei folgenden Beidingungen

$$\bigwedge x \in M \bigwedge a, b, \in G \quad f(f(x,a), b) = f(x, b \cdot a), \tag{1.2}$$

$$\bigwedge x \in M \quad f(x, e) = x, \tag{1.3}$$

$$\bigwedge x \in M \; (f(x,g) = x) \Longrightarrow g = e, \tag{1.4}$$

erfüllen.

Zur Erläuterung dieser Definition geben wir zwei Beispiele das n-dimensionalen affinen und des n-dimensionalen Euklidischen Raumes, die im Folgenden nötig sind.

1. Der n-dimensionale affine Raum.

Wir bezeichnen mit $GA(n, R)$ die affine Gruppe n-ter Ordnung, d.h. Menge der Paare (A, a), wobei $A \in GL(n, R)$ und $a \in R^n$ gehören mit der folgenden Multiplikation "o":

$$\bigwedge (B, b), (A, a) \in GA(n, R). (B, b) \, o (A, a) := (B \cdot A, B.a+b).$$

Der n-dimensionale affine Raum ist der Dreitupel

$$(R^n, GA(n, R), f), \tag{1.5}$$

wobei die Abbildung f folgendermassen

$$\bigwedge x \in R^n \quad \bigwedge (A, a) \in GA(n, R) \quad f(x, A, a) := A.x+a$$

definiert ist.

Der n-dimensionale Euklidische Raum ist der zum (1.5) ähnliche Dreitupel

$$(R^n, E(n, R), f), \tag{1.6}$$

wo die Euklidische Gruppe n-ter Ordnung $E(n, R)$ ganz analog, wie die affine Gruppe definiert ist, nur jetzt A zur orthogonalen Gruppe $O(n, R)$ gehören soll.

2. In diesem Paragraphen werden Definitionen des geometrischen Objektes und der Kleinschen Geometrie gegeben.

Def. 2.1. Jeder Dreitupel

$$(\mathfrak{M}, G, F), \tag{2.1}$$

wo $\mathfrak{M}$ eine beliebige nicht leere Menge ist, G dieselbe Gruppe bedeutet, die in (1.1) auftritt und $F : \mathfrak{M} \times G \to \mathfrak{M}$ eine beliebige linksseitige aber nicht unbedingt effektive Wirkung von G auf $\mathfrak{M}$ darstellt, heisst geometrisches Objekt des Kleinschen Raumes (1.1). Die Menge $\mathfrak{M}$ wird auch Faser des geometrischen Objektes (2.1) genannt.

Jetzt definieren wir Kleinsche Geometrie des Kleinschen Raumes (1.1). Zuerst bestimmen wir eine Kategorie. Als Objekte dieser Kategorie nehmen wir die geometrischen Objekte (2.1). Es seien

$$(\mathfrak{M}, G, F) \text{ und } (\mathfrak{M}_1, G, F_1) \tag{2.2}$$

zwei solche Objekte. Morphismus von $(\mathfrak{M}, G, F)$ zum $(\mathfrak{M}_1, G, F_1)$ in dieser Kategorie ist jede Abbildung

$$h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_1 \tag{2.3}$$

die invariant ist, d.h. die Bedingung

$$\bigwedge_{\omega \in \mathfrak{M}} \bigwedge_{a \in G} F_1(h(\omega), a) = h(F(\omega, a)),$$

erfüllt.

Komposition in dieser Kategorie ist Zusammensetzung der Abbildungen (2.3).

Man kann nachprüfen, dass die obendefinierte Klasse der Objekte und Morphismen mit dieser Komposition alle Axiomen der Kategorie. (vgl. [11]), erfüllen also wirklich eine Kategorie bilden.

Def. 2.2. Diese Kategorie wird Kleinsche Geometrie des Kleinschen Raumes (1.1) bzw. G-Geometrie genannt.

Im Gebiete der Lieschen Transformationsgruppen ist diese Definition mit derjenigen von R. Sulanke in [8] , (vgl. auch [9]), gegebenen identisch.

3. Orientierbarkeit und Orientation des Kleinschen Raumes.

Zuerst sind s-Repers im Kleinschen Raume (1.1) zu bestimmen. Es sei P eine nichtleere Untermenge von M. Mit dieser wird eine Untergruppe $H(P)$ verbunden. Sie besteht aus allen diesen Elementen von G, die jeden Punkt von P ungeändert bleiben, d.h.

$$H(P) := \left\{ a \in G;\ \bigwedge_{x \in P} f(x, a) = x \right\}.$$

Mit dieser Untergruppe wird s-Repers folgendermassen definiert.

Def. 3.1. s-Reper im (1.1) ist jede Folge von s verschiedenen Punkten

$$(p_1, p_2, \ldots, p_s), \qquad 1 \leqslant s < \infty$$

aus M derart, dass die Untergruppe $H(\{p_1, p_2, \ldots, p_s\})$ trivial ist, d.h. die Relation $H(\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}) = \{e\}$ gilt.

Jetzt übergehen wir zum Definieren s-Orientierbarkeit und s-Orientation des Kleinschen Raumes (1.1). Dazu müssen wir noch annehmen, dass in diesem Raume die s-Repers existieren. Dann bilden wir das folgende Produktobjekt von s-Faktoren, das auch G-Produkt genannt ist, (vgl [1] bzw. [14]).

$$(M^s, G, f^s). \tag{3.1}$$

$M^s = M \times M \times \ldots \times M$ (s Faktoren) ist das Kartesiche Produkt von s Faktoren. Jeder dieser ist mit M identisch. Die Wirkung $f^s : M^s \times G \longrightarrow M^s$ hat die Form

$$\bigwedge x(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in M^s \quad \bigwedge a \in G \qquad f^s(x,a) :=$$

$$= (f(x_1,a), f(x_2,a), \ldots, f(x_s,a)) \in M^s.$$

G ist dieselbe Gruppe, die im (1.1) auftritt.

Die Menge aller s-Repers ist offensichtlich eine eigentliche Untermenge von M^s. Diese wird mit M_s, (s unten), bezeichnet. M_s ist nicht leer und gegen die Wirkung f^s invariant, (vgl. [2]). Man kann also das folgende Teilobjekt, (vgl. [1]), von (3.1)

$$(M_s, G, f_s), \quad f_s := f^s\big|M_s \times G. \tag{3.2}$$

bilden. Im (3.2) bedeutet f_s, die auf $M_s \times G$ beschränkte Wirkung f^s.

Das Objekt (3.2) kann nicht unbedingt transitiv sein. Wird mit $\mathfrak{M}$ eine beliebige transitive Faser von M_s bezeichnet, so bilden wir das weitere Teilobjekt von (3.2)

$$(\mathfrak{M}, G, F), \quad F := f_s\big|\mathfrak{M} \times G. \tag{3.3}$$

Mit Hilfe dieses kann die s-Orientierbarkeit und die s-Orientation definiert werden und zwar auf folgende Weise.

Def. 3.2. Gibt es eine invariante Zerlegung der Faser $\mathfrak{M}$ von (3.3) auf genau zwei Untermengen $\mathfrak{M}^+$ und $\mathfrak{M}^-$, so sagen wir, dass der Kleinsche Raum (1.1) s-Orientierbar ist. Jede der Untermengen $\mathfrak{M}^+$ und $\mathfrak{M}^-$ wird die s-Orientation genannt. Ein Paar, das aus dem Kleinschen Raume und aus der gewählten s-Orientation besteht, heisst s-orientierter Kleinscher Raum.

Man kann zeigen, dass die s-Orientierbarkeit von der Wahl der transitiven Faser $\mathfrak{M}$ nicht abhängt. Die s-Orientation hängt natürlich von dieser Wahl ab. Die Abhängigkeit ist aber unwesentlich. Im allgemeinen ist die s-Orientation sogar bei festem s und bei ausgewählter Faser nicht eindeutig.

Jetzt wird noch eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung für die s-Orientierbarkeit des Kleinschen Raumes (1.1) dargestellt. Zuerst müssen wir noch Begriff der Orientierbarkeit der Gruppe erklären.

Def. 3.3. Gruppe heisst orientierbar, wenn sie eine Untergruppe G_o mit dem Index 2 hat. Index der Gruppe G_o in G ist Anzahl der Elemente der Faktorgruppe G/G_o. Der Begriff der Orientierbarkeit einer Gruppe wurde von J.A. Schouten eingeführt.

Satz 3.1. Der Kleinsche Raum (1.1) ist dann und nur dann s-orientierbar, wenn er die s-Repers besitzt und die Gruppe G orientierbar ist.

Eine Gruppe kann nicht orientierbar, eindeutig orientierbar und nicht eindeutig orientierbar sein. Infolgedessen kann auch der Kleinsche Raum dieselben Arten der Orientierbarkeit erweisen.

Auf diese Weise werden Untersuchungen über die s-Orientierbarkeit des Kleinschen Raumes auf Orientierbarkeit seiner Gruppe zurückgeführt.

Die s-Repers wurden in [2] eingeführt. Die hier dargestellte Definition der s-Orientierbarkeit ist in [14], [3], [4] enthalten. Eine ähnliche Definition der Orientierbarkeit des Kleinschen Raumes hat Z. Moszner in [10] gegeben. Verschiedene Eigenschaften der Repers haben Z. Moszner in [12] und J. Tabor in [13] gezeigt. Sie haben auch interessante Bedingungen für die Orientierbarkeit einer Gruppe in der gemeinsamen Arbeit [6] bewiesen. Mit Hilfe dieser kann man zeigen, das die n-dimensionale projektive Gruppe für ungerades n eindeutig orientierbar ist und für gerades n nicht orientierbar ist, (vgl. [4]). Da es im n-dimensionalen projektiven Raume stets die $(n+2)$ Repers gibt, folgt daraus, dass der n-dimensionale projektive Raum für ungerades n eindeutig $(n+2)$- orientierbar ist und für gerades n nich orientierbar ist, (vgl. [4]).
Im n-dimensionalen projektiven Raume wurden alle $(n+2)$ - Repers und im Falle ungerades n auch die $(n+2)$ - Orientation bestimmt, (vgl. [2], [4], [14]).

Um diese Betrachtungen zu erläutern geben wir noch ein einfaches Beispiel der Orientation der gut bekannten Euklidischen Ebene.

Beispiel 3. Orientation der Euklidischen Ebene d.h. des zwei dimensionalen Euklidischen Raumes.

Gemäss der im Beispiel 2 gegebenen Definition ist die Euklidische Ebene der folgende Dreitupel

$$(R^2, E(2, R), f). \tag{3.4}$$

Die Gruppe $E(2,R)$ und die Wirkung f haben, die in (1.6) beschriebenen Formen.

Hier existieren die 3-Repers. Jeder dieser ist eine Folge von drei verschiedenen Punkten

$$(p_o, p_1, p_2) \tag{3.5}$$

mit der Bedingung, dass die Determinante der Matrix $(p_1 - p_o, p_2 - p_o)$,

$$\mathrm{Det}(p_1 - p_o, p_2 - p_o) \neq 0,$$

von Null verschieden ist. M_3 als Faser des Objektes

$$(M_3, E(2,R), f_3)$$

ist nicht transitiv . Es sei $\mathfrak{M}(p_o, p_1, p_2)$ eine transitive Untermenge von M_3, die das Element (p_o, p_1, p_2) enthält. Sie besteht aus allen Folgen von drei Punkten (q_o, q_1, q_2), welche die Bedingungen

$$(\overrightarrow{q_oq_1})^2 = (\overrightarrow{p_op_1})^2,\ (\overrightarrow{q_oq_2})^2 = (p_op_2)^2,\ (\overrightarrow{q_oq_1}).(\overrightarrow{q_oq_2}) = (\overrightarrow{p_op_1}).(\overrightarrow{p_op_2}),$$

erfüllen. Die Menge $\mathfrak{M}(p_o, p_1, p_2)$ kann auf zwei Untermengen

$$\mathfrak{M}^+ := \left\{(q_o,q_1,q_2)\in \mathfrak{M}(p_o,p_1,p_2);\ \mathrm{Det}(q_1-q_o,q_2-q_o).\ \mathrm{Det}(p_1-p_o,p_2-p_o) > 0\right\}$$

$$\mathfrak{M}^- := \left\{(q_o,q_1,q_2)\in \mathfrak{M};\ \mathrm{Det}(q_1-q_o,q_2-q_o)\ .\ \mathrm{Det}(p_1-p_o,p_2-p_o) < 0\right\}\ .$$

geteilt werden.

Es ist leicht nachzuprüfen, das $(\mathfrak{M}^+, \mathfrak{M}^-)$ eine invariante Zerlegung von $\mathfrak{M}(p_o,p_1,p_2)$ in dem Objekt

$$(\mathfrak{M}(p_o,p_1,p_2),\ E(2,R),F),\quad F := f|\mathfrak{M}\times E(2,R)$$

bilden. Jede dieser Mengen ist also eine 3-Orientation der Euklidischen Ebene (3.4). Diese ist also 3-orientierbar. Bei festem $\mathfrak{M}(p_o,p_1,p_2)$ ist diese Orientation eindeutig. Wenn wir eine andere Folge von drei Punkten $(\tilde{p}_o,\tilde{p}_1,\tilde{p}_2)$ aus M_3 wählen, die zur $\mathfrak{M}(p_o,p_1,p_2)$ nich gehört, ändert sich die Orientation unwesentlich.

4. Jetzt möchte ich eine Methode darstellen, die zur Definition der Unterräume, insbesondere der Geraden, im Kleinschen Raume dienen kann. Sie wurde zum ersten Mal von K. Dębowski in [7] zur Definition der Geraden im projektiven Raume angewandt.

Wir nehmen in Betracht die affine Ebene, d.h. den zwiedimensionalen affinen Raum, (vgl. (1.5)). Gremäss der Definition ist er durch den Dreitupel

$$(R^2,\ GA(n,R),\ f) \tag{4.1}$$

dergestellt.

Zuerst bestimnen wir die so genennte stationäre Gruppe $H(\{p_o\})$ des Punktes $p_o(0,0)\in R^2$. Sie hat die Form

$$H(\{p_o\}) := \{(A,a)\in GA(2,R);\ A.0 + a = 0\} = \{(A,o);\ A \in GL(2R)\}.$$

Dann wird die Untergruppe $H(\{p_o,\ p_1\})$ bestimmt, wo $p_1(1,0)$. Sie ist mit dem gemeisamen Teil von $H(\{p_o\})$ und $H(\{p_1\})$ identisch.

$$H(\{p_o,p_1\}) = \{(A,o);\ A \in GL(2R),\ Ap_1 = p_1\}.$$

$$= \{(A,o);\ A = \begin{pmatrix}1, a_2^1\\ 0, a_2^2\end{pmatrix},\ a_2^2 \neq 0\}.$$

Wir nehmen noch den dritten Punkt $p_2(0,1)$ an. Die Untergruppe ist jetzt trivial, $H(\{p_o,\ p_1,\ p_2\}) = \{(E,0)\}$. Die Folge $(p_o,\ p_1,\ p_2)$ bildet also einen 3-Reper im (4.1). Dieser ist sogar minimal. Denn wen wir irgendeinen der Punkte $p_o,\ p_1,\ p_2$ weglassen, so bilden die übriggebleibenen Punkte keinen Reper mehr.

Im folgenden werden wir die Menge S aller dieser Punkte $p \in R^2$ suchen, welche der Bedingung

$$H(\{p_p,p_1\}) < H(\{p\}) \tag{4.2}$$

genügen. Diesen Bedingung bedeutet, dass jede Transformation, welche die Punkte p_o und p_1 ungeändert bleibt, auch den Punkt p nich rührt. Dann zeigen wir, dass die Menge L aller solcher Punkte p die Form

$$S = \{p \in R^2;\ \bigvee_{t\in R}\ p = p_o + tp_1\} =: L \tag{4.3}$$

hat, also eine Gerade bildet.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Inklusion

$$L \subset S \tag{4.4}$$

gilt. In der Tat die nachstehende Rechnung

$$\left(\begin{pmatrix}1, a_2^1\\ 0, a_2^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)(p_o + tp_1) = \begin{pmatrix}1, a_2^1\\ 0, a_2^2\end{pmatrix}(p_o + tp_1) = p_o + tp_1,$$

zeigt, dass jedes Element der Untergruppe $H(\{p_o, p_1\})$ rührt den Punkt $p \in L$ nicht. Es gehört also zur $H(\{p\})$.

Um die umgekehrte Inklusion

$$S \subset L \tag{4.5}$$

zu beweisen, bezeichnen wir mit $q(q^1, q^2)$ einen Punkt von S. Zum indirekten Beweis nehmen wir an dass q zur L nicht gehört. Dann mus q^2 von Null vershieden sein,

$$q^2 \neq 0. \tag{4.6}$$

In diesem Fall gehört das Element

$$\left(\begin{pmatrix}1,1\\0,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \tag{4.7}$$

der Gruppe $H(\{p_o, p_1\})$ zur $H(\{q\})$ nicht, weil es den Punkt q in einen anderen führt,

$$\begin{pmatrix}1,1\\0,1\end{pmatrix}q + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q^1+q^2\\0+q^2\end{pmatrix} \neq q = \begin{pmatrix}q^1\\q^2\end{pmatrix}, \text{ (vgl. (4.6))}.$$

Also q kann nicht in S enthalten werden. Daraus folgt, das q zur L gehören muss und (4.5) gilt. Aus (4.4) und (4.5) ergibt sich $L = S$.

Die Untermenge S, die durch Relation (4.2) bestimmt ist, bildet eine Gerade im Kleinschen Raum (4.1). Wir können also diese Relation auf Definieren der Geraden in diesem Raume anwenden.

5. Endlich wird gezeigt, dass die Gerade L wirklich als einen affinen eindimensionalen Raum angesehen werden kann.

Zuerst definieren wir noch stationäre Untergruppe einer Menge. Es sei $P \subset M$ eine nichtleere Untermenge im Raume (1.1). Mit $G(P)$ bezeichnen wir die Untergruppe von G, die aus allen diesen Elementen besteht, welche P auf sich abbilden

$$G(P) := \{a \in G;\ f(P,a) = P\}. \tag{5.1}$$

Offensichtlich gilt die Inklusion $H(P) < G(P)$. $H(P)$ ist in $G(P)$ sogar invariant. $G(P)$ heisst stationäre Untergruppe der Menge P. Die stationäre Gruppe der Gerade L in der affinen Ebene (4.1) hat die Form

$$G(L) = \left\{\left(\begin{pmatrix}a^1_1 a^1_2\\0, a^2_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^1\\0\end{pmatrix}\right);\ a^1_1 \cdot a^2_2 \neq 0\right\}$$

und der Dreitupel

$$(R^2,\ G(L),\ \hat{f})$$

ist das durch die Untergruppe $G(L) < GA(2,R)$ bestimmte Unterobjekt des Objektes (4.1), (vgl. [1]). Da die Menge L für diese Untergruppe invariant ist, kann man weiter das folgende Teilobjekt

$$(L,\ G(L),\ \tilde{f}) \tag{5.2}$$

bilden, (vgl. [1]). Dieses ist leider nicht effektiv. Um ein effektives zuerhalten, konstruieren wir zuerst die nachstehende Faktorgruppe

$$\tilde{G} := G(L)/H(\{p_o,\ p_1\}). \tag{5.3}$$

Ihre Elemente $<(A,\ a)>$ haben die folgende Gestalt.

$$\left\langle\left(\begin{pmatrix} a_1^1, a_2^1 \\ 0, & a_2^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\rangle = \left(\begin{pmatrix} a_1^1, a_2^1 \\ 0, & a_2^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot H(\{p_o,\ p_1\}) =$$

$$= \left\{\left(\begin{pmatrix} a_1^1, a_2^1 \\ 0, & a_2^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} 1, b_2^1 \\ 0, b_2^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right);\ b_2^1,\ b_2^2 \in R,\ b_2^2 \neq 0\right\} =$$

$$= \left\{\left(\begin{pmatrix} a_1^1, a^1 b_2^1 + a_2^1 b_2^2 \\ 0, & a_2^2 b_2^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \end{pmatrix}\right);\ b_2^1,\ b_2^2 \in R,\ b_2^2 \neq 0\right\} =$$

$$= \left\langle\left(\begin{pmatrix} a_1^1, 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\rangle,\quad \left(b_2^2 = \frac{1}{a_2^2},\ b_2^1 = \frac{-a_2^1 a_1^1}{a_2^2}\right).$$

Mit Hilfe der Gruppe (5.3) bilden wir den Kleinschen Raum

$$(L,\ \tilde{G},\ F), \tag{5.4}$$

wobei $F : L \times \tilde{G} \rightarrow L$ folgendermassen definiert ist

$$\bigwedge x(x_1^1 0) \in L,\quad \bigwedge \langle(A,a)\rangle \in \tilde{G}\quad F(x,\ \langle A,a\rangle) := Ax + a \in L.$$

Der Dreitupel (5.4) ist eindimensionaler affiner Raum, weil der mit dem Objekt

$$(R,\ GA(1,R),\ f),\quad f(x,(a_1^1, a^1)) := a_1^1\ x + a^1 \in R,$$

äquivalent ist. Die Äquivalenz wird durch die Bijektion

$$h : L \longrightarrow R, \ \bigwedge_{(x^1,0)\in L} \ h(x^1,0) = x^1 \in R$$

und durch den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \tilde{G} \longrightarrow GA(1,R), \ \bigwedge_{\left\langle \left(\begin{pmatrix} a^1_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \in \tilde{G}} \varphi\left(\left\langle \left(\begin{pmatrix} a^1_1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \right) =$$

$$= (a^1_1, a^1) \in GA(1,R)$$

bestimmt, (vlg. [1]).

Wir haben also gezeigt, dass die Menge $S = L$ ein dimensionaler affiner Unterraum (5.4) im Kleinschen Raume (4.1) bestimmt. Daraus ergibt sich, dass die folgende Definition der Geraden jedenfalls im affinen Raume einen Sinn hat.

Def. 5.1. Gerade im affinen Raume (1.6) ist jede Menge, die aus allen Punkten besteht, in welchen die stationäre Untergruppe die Gruppe $H(\{p_0, p_1\})$ enthält, wo p_0 und p_1 zwei beliebige aber verschiedene Punkte aus L bedeuten, d.h. welche die Relation (4.2) erfüllen.

In dieser Definition treten nur die Begriffe ein, welche in jedem Kleinschen Raume definiert werden können. Es entsteht also jetzt die Frage, wie man die Definition für beliebige Kleinsche Räume verallgemeinert kann und was für Eigenschaften so allgemeine Geraden haben.

Auf diese Weise geben die obendargestellten Betrachtungen eine Methode für die ganz allgemeine Definition der Geraden in beliebigen Kleinschen Raümen (1.1). Analogische Methode kann auch auf Definieren der k-dimensionalen Hyperbenen in diesen Räumen Anwendung finden. Es scheint, dass die Kleinschen Räumen, in welchen die Geraden existieren wichtigste Rolle in der Geometrie spielen. Die Eigenschaften der Geraden im grossen Mass die Eigenschaften der entsprechenden Kleinschen Geometrie bestimmen. So kann eine spezielle Klasse der Kleinschen Räumen ausgezeichnet werden, die für Geometrie besonders wichtig sind. Eben darum glaube ich, dass diese einfachen und elementeren Batrachtungen für die Geometrie doch eine Bedeutung haben.

LITERATUR

[1] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Kleinsche Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte, Colloq. Math. 26 (1972), 271-279.

[2] Kucharzewski M.: Über die Orientierung der Kleinschen Geometrien, Ann. Polon. Math. 25 (1975), 363-371.

[3] Kucharzewski M.: Orientacja przestrzeni Kleina, Materiały Konferencji Naukowej z Geometrii Różniczkowej, Szczecin 1980, 51-53 (streszczenie referatu).

[4] Kucharzewski M.: Orientability of n-dimensional projective geometry, Demonstratio Math. 11 (4), (1978), 983-995.

[5] Pojęcie przestrzeni Kleina i jej geometrii. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 747 Mat.-Fiz.. 42 (1983), 65-73.

[6] Moszner Z., Tabor J.: Sur la notion du biscalaire. Ann. Polon. Math. 19 (1967), 383-330.

[7] Dębowski K.: Desargues Theorems in Some Klein's Space, Demonstratio Math. 17 (1) (1984), 565-580.

[8] Sulanke R.: Zu den Grundlagen der Differentialgeometrie, Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt - Universität zu Berlin, Math.-Nat. R. 19 (1970), 6, 589-592.

[9] Sulanke R. und Wintgen P.: Differentialgeometrie und Faserbündel, Berlin 1972.

[10] Moszner Z.: L'orientation dans la géométrie de Klein, Tensor N.S. 30 (1976), 293-296.

[11] Semadeni Z., Wiweger A.: Wstęp do teorii kategorii i funktorów, Warszawa 1978.

[12] Moszner Z.: Les repers dans la géométrie de Klein, Tensor N.S. 33 (1979), 37-39.

[13] Tabor J.: On Some Groups Connected with The Repers, Tensor N.S. 33 (1979), 21-22

[14] Kucharzewski M.: Uwagi do pojęcia orientacji geometrii Kleina. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 560, Mat.-Fiz. 30 (1979), 165-172.

[15] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie, Demonstratio Math. 7 (3), (1974), 381-402.

Recenzent: Prof. dr hab. W. Waliszewski

Wpłynęło do redakcji: 21.X.1983 r.

ОБ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЯХ ПРОСТРАНСТВ КЛЕЙНА

Р е з ю м е

В работе дан обзор достижений, которые в последние годы были получены в области пространств Клейна. Собраны, упорядочены и дополнены многие результаты. Даны точные определения понятий: пространства и геометрии Клейна, репера и ориентации. Приведены их важнейшие свойства, на пример необходимое и достаточное условие т.н. s-ориентируемости пространства. Общие понятия пояснены несколькими примерами, особенно значимыми в приложениях. Представляется некоторый метод, который можно использовать для определения подпространства. Это даёт возможность дальнейших исследований над классификацией пространств Клейна.

ON THE BASIC CONCEPTS OF THE KLEIN SPACES

S u m m a r y

The paper is a survey of the results obtained in recent years in the Klein spaces. The results are collected, systematized and also complemented with some new results. In particular, the notions of Klein space and Klein geometry are stated precisely in the paper and as well as those of the reper and orientation. Their most important properties are given, in this number the criterion of the so called s-orientability. The notions are illustrated with the examples especially important for applications. At the end, a method of defining subspaces is presented which may serve as a start point for a study of classification of Klein spaces.