ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

Zenon MOSZNER

SUR L'ÉQUATION $f(x-1)f(x+1) = f(x) + 1$

Summary. In the paper it has been proved that for the equation in title where $f: R \to R$ we have:

1) there exists continuous - of the class C^n or C^∞ solution which has not a period 5,

2) there exist analytical solutions which are equal zero and others which have no such value,

3) every analytical solution has a period 5.

All solutions (all continuous solutions, of the class C^n, or of the class C^∞ are given which have value different than zero.

H.H. Kairies (voir [1]) pendant la XVII Conférence au sujet des équations fonctionnelles en Oberwolfach en 1979 annoncé une remarque de A. Clausing que les solutions de l'équation

$$f(x-1)f(x+1) = f(x) + 1 \tag{1}$$

pour $f: R \to R$, sont des fonctions périodiques avec la période 5. A.Clausing a fait la même remarque sur la III Conférence au sujet des inégalités générales en Oberwolfach en 1981. Wilczyński dans [2] a donné une solution générale de (1) sous la forme un peu compliquée et a remarqué que l'équation (1) a aussi les solutions pas périodique, en donnant un exemple à propos, dans lequel la fonction f n'est pas continue. Plus bas nous faisons quelques remarques au sujet de cet équation.

1. La fonction

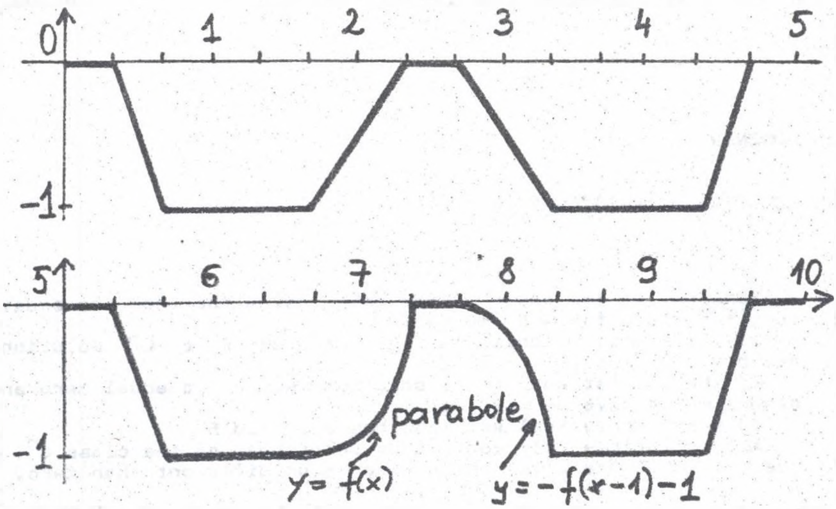
$$f(x) = \frac{1}{2}((-1)^{E(x)} - 1),$$

où $E(x)$ désigne l'entier de x, est très simple solution de (1) qui n'a pas de la période 5. Cette fonction niest pas continue.

2. Il existe une solution continue de (1) qui n'a pas de la période 5. Plus bas nous avons le graphique de cette fonction.

Nous posons notre fonction 10 à $+\infty$ comme une fonction périodique de la période 10 et pour $x < 0$ comme la fonction paire ($f(x) = f(-x)$).

La fonction à ce graphique est continue, elle remplit (1) puisque elle admet sur les classes d'équivalence du groupe additif des nombres réels par rapport au sous-groupe des nombers entiers comme les valuers seulement



les cycles: 0, -1, $a(\neq 0,-1)$, $-a-1$, $-1,0$ et chaque telle fonction satisfait à (1). La fonction au graphique n'a pas de la période 5 puisque $f(2) \neq f(7)$.

3. En remplassant dans notre fonction les segments pas horisontals et les paraboles par les fonctions convenablement construites à l'aide de la fonction e^{-1/x^2} nous receverons une fonction de classe C^{∞}, remplissante (1) et pas avec la période 5.

4. Chaque solution de (1) qui n'admet pas de la valeur zéro (en abrégé $f \neq 0$) doit avoir la période 5. Cela nous constatons en calculant $f(x+2)$, $f(x+3)$, $f(x+4)$, $f(x+5)$ de (1) par $f(x)$ et $f(x+1)$. Si nous remplassons dans notre graphique les paraboles par les segments nous recevons une solution de (1), ayant zéro comme la valeur, continue et avec la période 5.

5. Ils existent des solutions analytiques de (1).

En effet soit h une fonction sur $[0,2)$ telle que $h(x) \neq 0, h(x) \neq -1$ et $h(x) + h(x+1) \neq -1$ pour x de $[0,1)$ et posons

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{pour } x \in [0,2), \\ \dfrac{h(x-1)+1}{h(x-2)} & \text{pour } x \in [2,3), \\ \dfrac{h(x-2)+h(x-3)+1}{h(x-2)h(x-3)} & \text{pour } x \in [3,4), \\ \dfrac{h(x-4)+1}{h(x-3)} & \text{pour } x \in [4,5) \end{cases} \tag{2}$$

et élargissons f sur R comme la fonction de la période 5. On peut vérifier facilement que f remplit (1) et $f(x) \neq 0$ sur R.

a) Si nous supposons que

$$\lim_{h \to 2-} h(x) = \frac{h(1) + 1}{h(0)} \tag{3}$$

et que h est continue sur $[0,2)$, alors f soit continue sur R.

En effet d'après (3) la fonction f est continue en 2. Puisque f remplit (1) il résulte de la continuité de f sur $[0,2]$ que

$$f(x+1) = \frac{f(x) + 1}{f(x-1)}$$

est continue aussi sur $[2,3]$ et

$$f(x-1) = \frac{f(x) + 1}{f(x+1)}$$

est continue sur $[-1,0]$ et de là f est continue sur R tout entier.

b) Si nous supposons que h soit définie sur $[0,2]$, qu'il existe la dérivé $h'(x)$ sur $[0,2]$ et de plus que a lieu (3) et

$$\left[\frac{h(x-1) + 1}{h(x-2)}\right]_2' = h'(2)$$

dans ce cas f soit différentiable sur $[0,2]$ et de la d'après (1) sur R tout entier.

c) De la même manière si nous supposons que h soit différentiable n-fois sur $[0,2]$ et de plus que

$$\left[\frac{h(x-1) + 1}{h(x-2)}\right]_2^{(v)} = h^{(v)}(2)^{x)} \qquad \text{pour } v = 0,1,2,\dots,n, \tag{4}$$

dans ce cas f est différentiable n-fois sur R tout entier.

---

x) Cette supposition détermine les dérivées $h^{(v)}(2)$ par les dérivées de h en points 0 et 1 compatible avec les formules pour les coeficientes du quotient des séries entières. Par exemple pour $v = 0,1$ nous avons

$$h(2) = \frac{h(1) + 1}{h(0)}, \qquad h'(2) = \frac{h'(1)}{h(0)} - \frac{h(1)h'(0)}{[h(0)]^2}$$

d) Si nous supposons que h soit de classe C^{∞} (analytique) sur $[0,2]$ et que les conditions de compatibilité (4) ayons lieu pour $v = 0,1,2,\dots$ dans ce cas f est aussi de classe C^{∞} (analytique) sur R tout entier. L'analycité résulte des théorèmes de la somme et de quotient de deux séries entières.

6. Puisque chaque solution $f \neq 0$ de (1) doit être de la forme (2), donc chaque sulution $f \neq 0$ de (1) continue (différentiable n-fois, de classe C^{∞}, analytique) doit etre de la forme (2) avec h continue (différentiable n-fois, de classe C^{∞}, analytique) sur $[0,2]$ remplissant les convenables conditions de compatibilité (4).

7. <u>Il existe aussi une solution analytique de</u> (1) <u>qui s'annule</u>.

Soit h une fonction analytique sur $[0,2]$ et teelle que $h(0) = 0$, $h(x) \neq 0$ sur $(0,2]$, $h(2) \neq -1$

$$h(1) = -1,\ h''(0) \neq 0,\ h'(1) = 0,\ h'(0) = 0^{x)} \tag{5}$$

$$h(2) = \lim_{x\to 2+} \frac{h(x-1)+1}{h(x-2)}^{xx)}, \tag{6}$$

$$g^{(v)}(2) = h^{(v)}(2) \qquad \text{pour } v = 1,2,3,\dots{}^{xxx)} \tag{7}$$

ou

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x-1)+1}{h(x-2)} & \text{pour } x > 2 \\ h(2) & \text{pour } x = 2. \end{cases}$$

x) Les relations dans (5) ne sont pas indépendantes des autres suppositions. Par exemple $h(1) = -1$ résulte de $h(0) = 0$ et de (6), les relations $h'(0) = 0$ et $h'(1) = 0$ sont équivalentes d'après (6) et $h(2) \neq 0$.

xx) La condition (6) est, sous les suppositions (5), équivalente à la relation

$$h(2) = \frac{h''(1)}{h''(0)}.$$

xxx) Les conditions (7) déterminent les dérivées $h^{(v)}(2)$ par les dérivées de h en points 0 et 1 compatible avec les formules pour les coeficientes du quotient des séries entières. Par exemple pour $v = 1$ nous avons

$$h'(2) = \frac{h'''(1)}{h''(0)} - \frac{h''(1)h'''(0)}{[h''(0)]^2},$$

La fonction f définie sur $[0,5) \setminus \{2,3,4\}$ par la formule (7)

$$f(2) = h(2),\ f(3) = -(h(2)+1),\ f(4) = -1 \tag{8}$$

et élargie sur R comme la fonction avec la période 5 est la solution analytique de (1) qui s'annule en 0. On peut vérifier facilement que f remplit (1). Évidemment $f(0) = h(0) = 0$. Il suffit donc de montrer que f est analytique sur R et pour cela il suffit ca montrer en points 2, 3, 4 et 5.

La fonction h est analytique en point 2 d'après la supposition. D'après (5) et (6) la fonction g est analytique en point 2, donc d'après (7) la fonction f est aussi analytique en point 2.

Puisque d'après (5): $f(1) = h(1) = -1 \neq 0$, et aussi d'après (8):

$$f(2) = h(2) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(3) = -(h(2)+1) \neq 0$$

nous avons

$$f(x) = \frac{f(x-1)+1}{f(x-2)}$$

dans les certaines entourages de 3, 4, 5. Il en résulte d'après le théorème de la division des séries entières que f est analytique en points 3, 4, 5 succesivement, c.q.f.d.

8. <u>Chaque solution analytique de</u> (1) <u>doit avoir la période 5</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit f une solution de (1). Appelons la classe d'équivalence W du groupe additif R par rapport au sous-groupe des nombres entiers

(i) périodique si f est sur W périodique avec la période 5,
(ii) non-périodique dans le cas contraire.

On voit facilement que si $f \neq 0$ sur W, alors W est périodique. De plus on voit aussi que

(9) - s'il existe un x_0 de W pour lequel $f(x_0) = 0$, dans ce cas les valeurs de f sur W forment une suite composée des suites:

$0, -1, a, -1-a$ pour $a \neq 0, -1$ ou $0, -1$ ou $0, -1, -1$.

Supposons que f n'a pas de la période 5, alors elle est non-périodique sur une classe W. Il existe donc un $\bar{x}$ de W tel que

$$f(\bar{x}) \neq f(\bar{x}+5).$$

Si f est continue en $\bar{x}$, il existe un entourage Δ de $\bar{x}$ qui se compose seulement des points des classes non-périodiques. En effet dans le cas contraire il existerait une suite $x_n \rightarrow \bar{x}$ telle que

$$f(x_n) = f(x_n+5).$$

De là $f(\bar{x}) = f(\bar{x}+5)$ et nous aurions une contradiction.

Puisque f sur W non-périodique admet comme valeurs 0, -1 et éventuellement $a \neq 0, -1$ nous avons seulement comme possibles les cas suivants:

(I) $\bar{x}$ est la point d'accumulation de l'ensemble $\{x \in R : f(x) = 0\}$

(II) $\bar{x}$ est le point d'accumulation de l'ensemble $\{x \in R : f(x) = -1\}$,

(III) $\bar{x}$ est le point d'accumulation de l'ensemble

$$\{x \in R : f(x) \neq 0, -1\}.$$

Ad (I). S'il existe une suite telle que $x_n \rightarrow \bar{x}$, $x_n \neq \bar{x}$, $f(x_n) = 0$, donc si f est analytique nous avons $f^{(v)}(\bar{x}) = 0$ pour $v = 0,1,2,\ldots$ alors $f \equiv 0$, ce qui est impossible d'après (1).

Ad (II). Nous avons dans ce cas pour une suite $x_n : x_n \rightarrow \bar{x}$, $x_n \neq \bar{x}$, $f(x_n) = -1$ et de là d'après (9) il existe une suite $\bar{x}_n$ (on a $\bar{x}_n = x_{k_n} \pm 1$) telle que $\bar{x}_n \rightarrow x_o$ pour un x_o, $\bar{x}_n \neq x_o$, $f(\bar{x}_n) = 0$ et nous avons le cas (I).

Ad (III). Dans ce cas le raisonnement est comme plus haut, seulement nous avons $\bar{x}_n = x_{k_n} - 2$ ou $\bar{x}_n = x_{k_n} + 2$.

Dans tous les cas possibles la supposition que f est analytique et n'a pas de la période 5 donne la cotradiction, donc notre proposition 8 est démontrée.

TRAVAUX CITÉS

[1] Reports of Meetings. Siebzehnte internationale Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach vom 17.6. bis 23.6.1979, Aequationes Math. 20 (1980), p. 309.

[2] Wilczyński Z.: Ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego $f(x+1)f(x-1) = f(x) + 1$ (Solution générale de l'équation fonctionnelle $f(x+1)f(x-1) = f(x) + 1$), Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Rzeszowie (1982), z. 6/50, p. 129-143.

Recenzent: Doc. dr hab. Józef Tabor

Wpłynęło do redakcji: 21.X.1983 r.

O RÓWNANIU $f(x-1)f(x+1) = f(x) + 1$

S t r e s z c z e n i e

Dowodzi się na temat równania w tytule, gdzie $f : R \to R$, że:

1) istnieje rozwiązanie ciągłe (klasy C^n lub klasy C^∞) i nie mające okresu 5,

2) istnieją rozwiązania analityczne, nie przyjmujące wartości zero oraz takie, które wartość zero przyjmują,

3) każde rozwiązanie analityczne ma okres 5.

W pracy podaje się także wszystkie rozwiązania (wszystkie rozwiązania ciągłe, klasy C^n lub klasy C^∞) nie przyjmujące wartości zero.

ОБ УРАВНЕНИИ $f(x-1)f(x+1) = f(x) + 1$

Р е з ю м е

Доказывается на тему уравнения в заглавии, где $f : R \to R$, что

1) существует непрерывное решение (класса C^n или класса C^∞) и не имеющее периода 5,

2) существуют аналитические решения не принимающие нулевого значения и такие, которые принимают нулевое значение,

3) всякое аналитическое решение имеет период 5.

В работе даются тоже решения (все непрерывные решения, класса C^n или класса C^∞) не принимающие нулевого значения.