ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

Józef SICIAK

PUNKTY REGULARNE I OSOBLIWE FUNKCJI KLASY C^{∞}

Streszczenie. Głównym celem pracy jest przedstawienie dowodu twierdzenia Zahorskiego w przypadku wielowymiarowym. Dla wygody Czytelnika artykuł zawiera, stanowiący pewną całość, przegląd znanych wyników, mających bezpośredni związek z twierdzeniem Zahorskiego, na temat zbiorów punktów osobliwych i regularnych funkcji klasy $\mathcal{C}^{\infty}$ p zmiennych rzeczywistych.

1. PRZESTRZEŃ $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$

Niech Ω będzie podzbiorem otwartym przestrzeni R^p. Niech $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ oznacza przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R wszystkich funkcji zespolonych p zmiennych rzeczywistych klasy $\mathcal{C}^{\infty}$ w Ω, z topologią niemal jednostajnej zbieżności. $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ jest liniową przestrzenią Frecheta (tzn. jest to przestrzeń wektorowa, lokalnie wypukła metryzowalna, zupełna), w której topologia jest określona przez rodzinę seminorm postaci

$$q_{jk}(f) := \sup\left\{|D^{\alpha}f(x)| \;:\; |\alpha| \leqslant k,\; x \in K_j\right\}, \qquad j,k \geqslant 1, \tag{1.1}$$

gdzie K_j jest ciągiem podzbiorów zwartych zbioru Ω spełniających warunki: $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$, $\bigcup_1^{\infty} K_j = \Omega$. Symbol D^{α} oznacza operator różniczkowania cząstkowego $/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}$, zaś $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$. Jeśli A jest zbiorem, to $\mathring{A}$ oznacza jego wnętrze.

Baza otoczeń zera w $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ dana jest przez zbiory $U = U(K, , s)$ postaci

$$U = \left\{f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) : \|D^{\alpha}f\|_K < \varepsilon,\; |\alpha| \leqslant s\right\}, \tag{1.2}$$

gdzie K jest dowolnym podzbiorem zwartym zbioru Ω, s - dowolną liczbę naturalną, zaś $\|h\|_K$ oznacza normę supremum modułu funkcji h na zbiorze K.

Topologia przestrzeni $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ dana jest także za pomocą metryki

$$\varrho(f,g) = \sum_{j,k=1}^{\infty} 2^{-j-k} \frac{q_{jk}(f-g)}{1 + q_{jk}(f-g)}. \tag{1.3}$$

Ciąg $\{f_n\}$ elementów przestrzeni $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ jest zbieżny do elementu f tej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wielowskaźnika α ciąg $\{D^{\alpha}f_n\}$ jest zbieżny niemal jednostajnie w Ω do $D^{\alpha}f$.

Zbiór funkcji rzeczywistych klasy $\mathcal{C}^{\infty}$ w Ω tworzy podprzestrzeń Frecheta przestrzeni $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.

2. WIELOMIANY I SZEREGI TAYLORA

Jeśli f jest funkcją klasy $\mathcal{C}^{\infty}$ w punkcie $a \in R^p$, to

$$T_a^n f(x) := \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^{\alpha}f(a)}{\alpha!} x^{\alpha}, \text{ gdzie } \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_p!,\ x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}, \tag{2.1}$$

nazywamy n-tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie a, zaś wyrażenie

$$T_a f(x) := \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^{\alpha}f(a)}{\alpha!} x^{\alpha} \tag{2.2}$$

nazywamy szeregiem Taylora funkcji f w punkcie a.

Liczbę

$$r(T_a f) := \sup\left\{t \in R_+ : \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^{\alpha}f(a)}{\alpha!} t^{|\alpha|} < +\infty\right\}$$

nazywamy promieniem zbieżności szeregu $T_a f$. Łatwo sprawdzić, że

$$r(T_a f) = 1/\limsup_{|\alpha| \to \infty} \sqrt[|\alpha|]{|D^{\alpha}f(a)|/\alpha!} = 1/\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sum_{|\alpha| = n} \frac{|D^{\alpha}f(a)|}{\alpha!}}. \tag{2.4}$$

Jeśli $r(T_a f) > 0$, to

$$\tilde{f}(z) := \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^{\alpha}f(a)}{\alpha!} z^{\alpha} \tag{2.5}$$

jest funkcją holomorficzną p zmiennych zespolonych w polidysku $\{z \in \mathbb{C}^p : |z| < r = r(T_a f)\}$, gdzie $|z| := \max_{1 \leq j \leq p} |z_j|$. Jeśli ograniczymy się do zmiennych rzeczywistych, to funkcja $\tilde{f}$ jest R-analityczna w kostce

$$\{x \in R^p : |x_j| < r,\ j = 1,\ldots,p\}.$$

3. OPERATOR M_n

Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, punktu $x \in \Omega$ oraz liczby naturalnej $n \geq 0$ definiujemy

$$M_n(f,x) := \sup\left\{ \left| \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \right|^{\frac{1}{|\alpha| + 2}},\ |\alpha| \leq n \right\}. \tag{3.1}$$

Łatwo sprawdzić, że operator M_n ma następujące własności:

(W_0) $M_n(f,x) \leq M_{n+1}(f,x)$,

(W_1) $\max\left\{M_n(f,x),\ M_n(g,x)\right\} \leq M_n(f+g,x) \leq M_n(f,x) + M_n(g,x)$

dla dowolnych $f,\ g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $x \in \Omega$, $n \geq 0$;

(W_2) Dla każdego $x \in \Omega$ oraz $n \geq 0$ odwzorowanie

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \in f \rightarrow M_n(f,x) \in R$$

jest ciągłe. Co więcej, jeśli $f_k \rightarrow f$ w $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, to $M_n(f_k,x) \rightarrow M_n(f,x)$ niemal jednostajnie w Ω, gdzie $k \rightarrow \infty$;

(W_3) Jeśli $M_n(f,x) \leq 1/(n+1)$ dla wszystkich $x \in \Omega$ oraz $n \geq 0$, to szereg $\sum_1^\infty f_n$ jest zbieżny w przestrzeni $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$;

(W_4) $r(T_a f) > 0 \Longleftrightarrow \exists_{c>0} \forall_n\ M_n(t\ a) < c.$

4. PUNKTY REGULARNE I OSOBLIWE FUNKCJI KLASY $\mathcal{C}^\infty$

Niech f będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ w zbiorze otwartym $\Omega \subset R^p$. Elementy zbioru $A = A(f)$ danego wzorem

$$A := \left\{ a \subset \Omega :\ f \text{ jest R-analityczna w otoczeniu punktu } a \right\} \tag{4.1}$$

nazywamy punktami regularnymi (lub punktami R-analityczności) funkcji f. Dla punktu $a \in \Omega$ następujące warunki są równoważne:

(i) $a \in A$;

(ii) Istnieje takie $r > 0$, że $T_a^n f(x) \longrightarrow f(a+x)$, gdy $n \rightarrow \infty$, jednostajnie w kostce $|x| < r$;

(iii) Istnieje takie $r > 0$, że $f(a+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} x^\alpha \right)$, gdy $|x| < r$.

Elementy zbioru $S = S(f)$, gdzie

$$S := \Omega - A, \tag{4.2}$$

nazywamy punktami osobliwymi (syngularnymi) funkcji f.

Elementy zbioru $D = D(f)$, gdzie

$$D := \left\{a \in \Omega : r(T_a f) = 0\right\} \tag{4.3}$$

nazywamy punktami rozbieżności funkcji f, a elementy zbioru $F := S - D$, czyli zbioru

$$F := \left\{a \in \Omega : r(T_a f) > 0, \ a \in S\right\} \tag{4.4}$$

- punktami zbieżności fałszywej funkcji f. Oczywiście

$$S = D \cup F, \Omega = A \cup D \cup F, \quad A \cap D = \emptyset, \quad A \cap F = \emptyset, \quad D \cap F = \emptyset.$$

Przykład 1. Funkcja $f(x) = \exp(-1/\|x\|^2)$ dla $x \in R^p - \{0\}$, $f(0) = 0$, gdzie $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_p^2$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty(R^p)$. Dla niej $A = R^p - \{0\}$, $S = F = \{0\}$, $D = \emptyset$.

Przykład 2. Funkcja $f(x) = \exp(1/(\|x\|^2 - 1))$, gdy $\|x\| < 1$, $f(x) = 0$ dla $\|x\| \geqslant 1$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ w R^p. Tutaj $A = R^p - \{\|x\| = 1\}$, $S = F = \{\|x\| = 1\}$, $D = \emptyset$.

Przykład 3. Funkcja $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1+a^{2n}z^2)}$, gdzie $a > 1$, jest meromorficzna w $C - \{0\}$, ma bieguny pojedyncze w punktach ia^{-n}, $-ia^{-n}$ $(n \geqslant 0)$. Ponadto szereg jest niemal jednostajnie zbieżny na osi rzeczywistej R wraz ze wszystkimi pochodnymi. Aby to stwierdzić wystarczy zauważyć, że

$$f(z) = (1/2) \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{1 + ia^n z} + \frac{1}{1 - ia^n z}\right]$$

oraz

$$f^{(s)}(z) = \frac{s!}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia^n)^s}{n!} \left[\frac{(-1)^s}{(1+ia^n z)^{s+1}} + \frac{1}{(1-ia^n z)^{s+1}}\right], \quad s \geqslant 0.$$

Dla $z = x$ rzeczywistych moduł wyrażenia w nawiasie kwadratowym szacuje się kolejno przez

$$2\,\frac{(1+a^n|x|)^{s+1}}{(1+a^{2n}x^2)^{s+1}} \leqslant 2(1+a^n|x|)^{s+1} \leqslant 2a^{n(s+1)}(1+|x|)^{s+1}.$$

Zatem szereg s-tych pochodnych jest niemal jednostajnie zbieżny na R. Ponieważ $f^{(2s)}(0) = (2s)!\, i^s\, e^{s^{2s}}$, więc $|f^{(2s)}(0)/(2s)!|^{\frac{1}{2s}} e^{s^{2s}/2s} \to \infty$, gdzie $s \to \infty$. Przeto $r(T_0 f|R) = 0$. Dla funkcji $\varphi := f|R$ mamy $A = R - \{0\}$, $S = D = \{0\}$, $F = \emptyset$.

Przykład 4. Jeśli $g(x,y) = \varphi(x)\psi(x,y)$ dla $(x,y) \in R^2$, gdzie φ jest funkcją z Przykładu 3, a ψ - funkcją z Przykładu 2 (dla p = 2), to g jest funkcją klasy $\mathcal{C}^{\infty}(R^2)$, dla której $A = R^2-(D \cup F)$, $D = \{(x,y) : x = 0,\ y^2 \neq 1\}$, $F = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Lemat (R.P. Boas, Jr. [2]). Jeśli $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ oraz $r(T_a f) > 0$ dla każdego $a \in \Omega$, to $A = A(f)$ jest podzbiorem otwartym i gęstym zbioru Ω.

Dowód. Ponieważ zbiór A jest otwarty, wystarczy wykazać, że dla dowolnego podzbioru otwartego G zbioru Ω przecięcie $A \cap G$ jest niepuste. Zauważmy w tym celu, że zbiór

$$A_k := \{a \in G : M_n(f,a) \leqslant k,\quad n \geqslant 1\}, \qquad k \geqslant 1,$$

jest domknięty, $A_k \subset A_{k+1}$ oraz $G = \bigcup_1^{\infty} A_k$. Ponieważ G ma własność Baire'a, więc istnieje taki wskaźnik k, że wnętrze $\mathring{A}_k$ zbioru A_k jest niepuste. Twierdzę, że $\mathring{A}_k \subset A$. Rzeczywiście, ponieważ

$$|D^{\alpha} f(a)| \leqslant \alpha!\, k^{2+|\alpha|}, \quad \text{gdy } a \in A_k \text{ i } |\alpha| \geqslant 0,$$

więc na podstawie wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej, otrzymujemy nierówność

$$|f(a+x) - T_a^n f(x)| \leqslant k^2 \sum_{|\alpha|=n+1} (k|x|)^{|\alpha|} = k^2 \binom{p+n}{n} (k|x|)^{n+1}$$

gdy $|x| < \operatorname{dist}(a, \partial\mathring{A}_k)$. Jeśli ponadto $k|x| \leqslant 1/2$, to $f(a+x) = T_a f(x)$, skąd wynika, że każdy punkt a zbioru $\mathring{A}_k$ leży w A. Zatem $A \cap G \neq \emptyset$. Q.E.D.

Wniosek. Dla funkcji $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ zbiór A jest otwarty, zbiór $S = D \cup F$ jest domknięty w Ω, zbiór D jest typu G_{δ}, zaś zbiór F jest typu F_{σ} i I kategorii.

Dowód. Otwartość zbioru A i domkniętość zbioru S są oczywiste. Ponieważ na podstawie własności (W_4) z § 3 mamy

$$A \cup F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{a \in \Omega : M_n(f,a) \leqslant k,\ n > 0\},$$

więc $A \cup F$ jest zbiorem typu F_σ. Zatem $D = \Omega - (A \cup F)$ jest typu G_δ. Ponieważ A jest otwarty oraz $F = (A \cup F) \cap (\Omega - A)$ jest przecięciem zbioru $A \cup F$ typu F_σ ze zbiorem domkniętym $\Omega - A$, więc F jest typu F_σ. Zbiór F jest I kategorii, gdyż w przeciwnym razie miałby niepuste wnętrze, co byłoby sprzeczne z Lematem Boasa. Q.E.D.

5. TWIERDZENIE PRINGSHEIMA

Dla funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, następujące warunki są równoważne:

(1) $A = \Omega$; tzn. f jest R-analityczne w Ω;

(2) $\forall_{K \subset\subset \Omega} \exists_{M > 0} \exists_{r > 0} \forall_\alpha \ \|D^\alpha f\|_K \leq \alpha! \, M r^{-|\alpha|}$;

(3) $\forall_{K \subset\subset \Omega} \exists_{c > 0} \forall_\alpha \ \|D^\alpha f\|_K \leq \alpha! \, c^{|\alpha|}$;

(4) $\forall_{K \subset\subset \Omega} \exists_{c > 0} \ \forall_{a \in K} \ \forall_n \ M_n(f,a) \leq c$;

(5) $\forall_{K \subset\subset \Omega} \ \exists_{\delta > 0} \ \forall_{a \in K} \ \ r(T_a f) > \delta$

Dowód. Implikacja (1) $\Longrightarrow$ (2) wynika z nierówności Cauchy'ego dla współczynników szeregu Taylora funkcji holomorficznej. Implikacje (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) są oczywiste.

Jeśli $M_n(f,a) \leq c$ $(n \geq 0)$, to $|D^\alpha f(a)| \leq \alpha! \, c^{2+|\alpha|}$, więc $r(T_a f) \geq 1/c$. Zatem (4) $\Longrightarrow$ (5).

Pozostaje do wykazania implikacja (5) $\Longrightarrow$ (1), na którą pierwszy zwrócił uwagę Pringsheim [7] (ale pierwszy poprawny jej dowód podał Boas, Jr. [2]). Udowodnimy ją najpierw w przypadku jednowymiarowym a następnie dla dowolnego $p > 1$.

1° $p = 1$. Niech $K = [a_1, b_1]$, gdzie $a_1 < b_1$, będzie dowolnym przedziałem zwartym leżącym w Ω. Wystarczy wykazać, że $K \subset A$. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że $S \cap K \neq \emptyset$ i weźmy taki przedział $[a, b] \subset K$, że $a < b$, $[a, b] \cap S \neq \emptyset$, $a, b \in A$, $b - a < \delta$, gdzie δ jest liczbą dodatnią dobraną do K, zgodnie z warunkiem (5). Końce przedziału $[a, b]$ można wybrać w zbiorze A, gdyż A jest gęsty w Ω (na podstawie Lematu Boasa).

Zbiór

$$S_k := \left\{ x \in S \cap [a,b] \ ; \ |f^{(n)}(x)| \leq n! \, \delta^{-n}, \quad n \geq k \right\}, \quad k \geq 0,$$

jest domknięty, przy czym $S_k \subset S_{k+1}$ oraz $S \cap [a,b] = \bigcup_1^\infty S_k$. Ponieważ $S \cap [a,b]$ jest podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej zupełnej R, więc ma własność Baire'a. Zatem istnieje taki wskaźnik k, że $\mathring{S}_k \neq \emptyset$ (gdzie $\mathring{S}_k$ oznacza wnętrze zbioru S_k w topologii indukowanej z R na $S \cap [a,b]$).

Istnieje więc przedział $[\alpha,\beta]$ taki, że $a \leqslant \alpha<\beta<b$, $\beta-\alpha<\delta/4$, $\alpha,\beta \in A$ oraz

$$[\alpha,\beta] \cap S = [\alpha,\beta] \cap S_k \neq \emptyset. \tag{5.1}$$

Ponadto istnieje taka stała $M > 0$, że

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant n!\, M\delta^{-n}, \quad \text{gdy} \quad x \in S \cap [\alpha,\beta], \quad n \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Niech I będzie dowolnym przedziałem składowym zbioru $[\alpha,\beta] - S$. Wówczas

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n, \quad \text{gdzie} \quad y \in I, \tag{5.3}$$

gdzie x jest końcem przedziału I, leżącym w S. Równość (5.3) wynika stąd, że f jest analityczna w I, $r(T_a f) > \delta$ dla każdego $a \in I$ oraz długość I jest mniejsza niż δ.

Szereg (5.3) jest zbieżny co najmniej w kole $K(x,\delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z-x| < \delta\}$, przy czym jego suma $g(z)$ spełnia dzięki (5.2) nierówność

$$|g(z)| \leqslant M/(1 - \tfrac{1}{\delta}|z-x|), \quad \text{gdy} \quad |z-x| < \delta. \tag{5.4}$$

Ponieważ dla każdego $t \in I$ koło $K(t,\delta/2)$, leży w kole $K(x, \frac{3}{4}\delta)$, więc dzięki (5.4) i nierównościom Cauchy'ego

$$|f^{(n)}(t)| = |g^{(n)}(t)| \leqslant n!\, 4\, M\, (\delta/2)^{-n}, \quad \text{gdy} \quad t \in I, \quad n \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Ostatecznie, dzięki (5.2) i (5.5)

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant n!\, 4\, M\, (2/\delta)^n, \quad \text{gdy} \quad x \in [\alpha,\beta], \quad n \geqslant 0,$$

skąd wynika, że $[\alpha,\beta] \subset A$ wbrew (5.1).

2° $p > 1$. Ustalmy punkt $a \in \Omega$. Bez szkody dla ogólności można założyć, że istnieje taka stała $\delta > 0$, że $r(T_x f) > \delta$ dla każdego $x \in \Omega$. Możemy też założyć, że kula $K(a,\delta)$ leży wraz z domknięciem w Ω. Wystarczy udowodnić, że

$$f(a+x) = \sum_{0}^{\infty} f_n(x), \quad \text{gdy} \quad \|x\| < \delta,$$

gdzie $f_n(x) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} x^\alpha$. W tym celu zauważmy, że dla ustalonego x, spełniającego nierówność $\|x\| < \delta$, funkcja $h(t) := f(a+tx)$ zmiennej rzeczywistej t jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ w przedziale otwartym I, zawierającym przedział $[-1, 1]$. Ponieważ

$$|h^{(n)}(t)| = n! \left| \sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha f(a+tx)}{\alpha!} x^\alpha \right| \leqslant n! \delta^n \sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha f(a+tx)}{\alpha!},$$

gdy $\|x\| < \delta$ oraz $t \in I = I(x)$, więc

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|h^{(n)}(t)|}{n!}} < \delta/r(T_{a+tx}f) < 1, \quad \text{gdy } t \in I.$$

W myśl punktu 1° funkcja h jest R-analityczna w I, przy czym

$$h(t) = \sum_0^\infty \frac{h^{(n)}(0)}{n!} t^n, \quad \text{gdy } |t| \leqslant 1.$$

Przeto

$$h(1) = f(a+x) = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} x^\alpha \right) \quad \text{gdy } \|x\| < \delta. \qquad \text{Q.E.D.}$$

6. PRZYPOMNIENIE DWÓCH TWIERDZEŃ WHITNEYA ([4], [6], [9])

I. Twierdzenie aproksymacyjne Whitneya

Niech f będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ w zbiorze otwartym $\Omega \subset R^p$. Załóżmy, że η jest funkcją ciągłą w Ω oraz $\eta(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \Omega$. Wtedy istnieje funkcja g R-analityczna w Ω taka, że

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \eta(x), \quad \text{gdy } x \in \Omega, \ |\alpha| \leqslant 1/\eta(x).$$

II. Twierdzenie Whitneya o rozszerzaniu regularnych pól Taylorowskich

Niech X będzie podzbiorem domkniętym zbioru otwartego $\Omega \subset R^p$. Niech $\{f_\alpha : \alpha \in Z_+^p\}$ będzie ciągiem p-krotnym zespolonych funkcji ciągłych na X. Wówczas następujące warunki są równoważne:

$$\forall_\alpha \ \forall_{m \geqslant 0} \ \forall_{K \subset\subset X}$$

zachodzi równość

$$f_\alpha(x) = \sum_{|\beta|\leq m} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta + O(|x-y|^m), \tag{1}$$

gdzie $\frac{O(|x-y|^m)}{|x-y|^m} \longrightarrow 0$ jednostajnie przy $|x-y| \longrightarrow 0$, $x,y \in K$ (tzn. istnieje taka funkcja ciągła $\omega : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, że $\omega(0) = 0$ oraz $O(|x-y|^m) = \omega(|x-y|)\,|x-y|^m$, gdy $x,y \in K$);

$$\exists_{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)} \forall_\alpha \forall_{x \in X} \quad D^\alpha f(x) = f_\alpha(x); \tag{2}$$

$$\exists_{h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap A(\Omega - X)} \forall_\alpha \forall_{x \in X} \quad D^\alpha h(x) = f_\alpha(x). \tag{3}$$

Uwaga 1. Ciąg (f_α) spełniający warunek (1) nazywa się regularnym polem Taylorowskim na X lub funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ na X w sensie Whitneya.

Uwaga 2. Najtrudniejszy jest dowód implikacji (1) $\Longrightarrow$(2). Implikacja (2) $\Longrightarrow$(3) łatwo wynika z twierdzenia aproksymacyjnego Whitneya. Mianowicie, twierdzenie aproksymacyjne pozwala znaleźć taką funkcję g R-analityczną w $\Omega - X$, że

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \exp(-1/\mathrm{dist}(x,X)), \text{ gdy } x \in \Omega - X, |\alpha| < e^{1/\mathrm{dist}(x,X)}.$$

Funkcja

$$h(x) := \begin{cases} g(x) & \text{dla} \quad x \in \Omega - X, \\ f(x) & \text{dla} \quad x \in X \end{cases}$$

spełnia żądane warunki.

Implikacje (3) $\Longrightarrow$(2) $\Longrightarrow$(1) są oczywiste.

Uwaga 3. Jeśli zbiór Ω jest wypukły, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ oraz dla każdego α pochodna $D^\alpha f$ przedłuża się do funkcji f_α ciągłej w $\bar{\Omega}$, to istnieje funkcja $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(R^p)$ taka, że $\tilde{f} = f$ w Ω. Mianowicie ze wzorów Taylora z resztą w postaci całkowej łatwo wynika, iż pole (f_α) spełnia warunek (1) na $X = \bar{\Omega}$.

7. FUNKCJE PŁASKIE

Funkcja $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ nazywa się płaska na podzbiorze X zbioru Ω, jeśli

$$\forall_{\alpha} \ \forall_{x \in X} \ D^{\alpha}f(x) = 0.$$

Twierdzenie. Jeśli X jest podzbiorem domkniętym zbioru otwartego $\Omega \subset R^p$, to istnieje funkcja $h \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ taka, że $h(x) > 0$ w każdym punkcie $x \in \Omega - X$, h jest R-analityczna w $\Omega - X$ oraz płaska na X. Jeśli ponadto X jest nigdziegęsty w Ω, to X jest zbiorem punktów fałszywej zbieżności funkcji h.

Dowód Niech $\{a_n\}$ będzie podzbiorem przeliczalnym i gęstym zbioru $\Omega - X$. Niech $r_n := \mathrm{dist}(a_n, \partial(\Omega - X))$, $u_n(x) := \exp \frac{1}{\|x-a_n\|^2 - r_n^2}$ w kuli $\|x-a_n\| < r_n$ oraz $u_n(x) = 0$, gdy $\|x-a_n\| \geqslant r_n$. Dobierzmy liczbę $\varepsilon_n > 0$ tak małą, by

$$M_n(\varepsilon_n u_n, x) < 1/(n+1) \quad \text{dla} \quad x \in R^p.$$

Wówczas funkcja $u := \sum_1^{\infty} \varepsilon_n u_n$ jest klasy $\mathcal{C}^{\infty}(R^p)$, płaska na $X \cup (R^p - \Omega)$, dodatnia w $\Omega - X$. Na podstawie twierdzenia aproksymacyjnego Whitneya istnieje funkcja g R-analityczna w $\Omega - X$ taka, że

$$|D^{\alpha}g(x) - D^{\alpha}u(x)| < \tfrac{1}{2}\, u(x), \quad \text{gdy} \quad x \in \Omega - X,\ |\alpha| < 1/u(x).$$

Funkcja

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & \text{gdy} \quad x \in \Omega - X \\ 0, & \text{gdy} \quad x \in X \end{cases}$$

ma żądane własności. Q.E.D.

8. UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA ZAHORSKIEGO NA PRZYPADEK FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Zajmiemy się następującym problemem Zahorskiego [10]. Niech Ω będzie zbiorem otwartym w R^p i niech A, D, F będą takimi podzbiorami rozłącznymi, że $\Omega = A \cup D \cup F$. Znaleźć warunki konieczne i wystarczające na to, by istniała funkcja $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, dla której A jest zbiorem jej punktów regularnych, D - zbiorem jej punktów rozbieżności, F - zbiorem jej punktów fałszywej zbieżności. W § 4 wykazaliśmy, że następujące warunki są konieczne: A jest zbiorem otwartym, D jest zbiorem typu G_{δ}, F jest zbiorem I kategorii typu F_{σ}. W przypadku jednowymiarowym, Zahorski [10] udowodnił w 1940 roku, że warunki te są również wystarczające. W roku 1955 Salzman i Zeller [8] podali prosty dowód twierdzenia Zahorskiego, zaznaczając, że ich metoda może być przydatna w przypadku wielowymiarowym. Celem tego paragrafu jest rozszerzenie - w oparciu o metodę Salzmana i Zellera - wyniku Zahorskiego na funkcje wielu zmiennych.

Dowód zasadniczego wyniku otrzymamy za pomocą trzech następujących lematów.

Lemat 1. Jeśli P, Q są kostkami otwartymi w R^p, przy czym $Q \subset\subset P$ (tzn. Q jest podzbiorem relatywnnie zwartym kostki P), to dla każdej liczby naturalnej $n \geq 0$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja rzeczywista u, spełniająca następujące warunki:

(i) u jest w każdym punkcie $x \in R^p$ płaska lub R-analityczna;

(ii) $\operatorname{supp} u \subset\subset P$;

(iii) $|D^{\alpha}u(x)| < \varepsilon$, gdy $x \in R^p$, $|\alpha| \leq n$;

(iv) $M_{n+2}(u,x) > 1/\varepsilon$, gdy $x \in Q$.

Dowód. Funkcji u będziemy szukać wśród funkcji postaci

$$u(x) = a\, v(x) \cos b(x_1 + \ldots + x_p),$$

gdzie: $a > 0$, $b > 1$, zaś v jest funkcją klasy $\mathcal{C}^{\infty}(R^p)$ taką, że $\operatorname{supp} v \subset\subset P$, $v = 1$ na Q oraz v jest w każdym punkcie $x \in R^p$ płaska lub R-analityczna. Jako v możemy wziąć funkcję postaci

$$v(x) = \exp \frac{1}{\|x-\mathring{x}\|^2 - r^2}, \text{ gdy } \|x-\mathring{x}\| < r; \quad v(x) = 0, \text{ gdy } \|x-\mathring{x}\| \geq r,$$

gdzie $\mathring{x}$ jest punktem wewnętrznym kostki Q i liczba $r > 0$ jest dostatecznie mała.

Zauważmy, że

$$|D^{\alpha}u(x)| \leq 2^n c_n a b^n, \quad \text{gdy } x \in R^p, \ |\alpha| \leq n,$$

$$|D^{\alpha}u(x)| = a b^{|\alpha|}\left|\cos\left[b(x_1+\ldots+x_p) + |\alpha|\frac{\pi}{2}\right]\right|, \text{ gdy } x \in Q, \ |\alpha| \geq 0, \tag{2}$$

gdzie $c_n := \sup\left\{|D^{\alpha}v(x)| \ : x \in R^p, |\alpha| \leq n\right\}$. Ze wzoru (2) wynika,

$$M_{n+2}(u,x) \geq \max\left\{\left[\frac{ab^{n+1}}{(n+1)!}|\cos y|\right]^{\frac{1}{n+3}}, \ \left[\frac{ab^{n+2}}{(n+2)!}\left|\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right|\right]^{\frac{1}{n+4}}\right\}, \tag{3}$$

gdy $x \in Q$, gdzie $y := b(x_1+\ldots+x_p) + (n+1)\frac{\pi}{2}$. Biorąc pod uwagę, że

$$\max\left\{|\cos y|, |\cos(y+\tfrac{\pi}{2})|\right\} \geqslant 1/\sqrt{2},$$

po prostych przekształceniach nierówność (3) implikuje nierówność

$$M_{n+2}(u,x) \geqslant b^{\frac{1}{n+3}}(\sqrt{2})^{-\frac{1}{n+4}} \max\left\{\left[\frac{ab^n}{(n+1)!}\right]^{\frac{1}{n+3}}, \left[\frac{ab^n}{(n+2)!}\right]^{\frac{1}{n+4}}\right\}. \quad (4)$$

Wybierając $a > 0$, $b > 1$ w ten sposób, by zachodziła równość $2^n c_n ab^n = \varepsilon/2$ oraz by prawa strona nierówności (4) była większa niż $2/\varepsilon$, otrzymamy funkcję u spełniającą żądane warunki.

<u>Lemat 2.</u> Niech $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ będą dwoma ciągami kostek otwartych i ograniczonych w R^p, spełniającymi warunek

$$Q_n \subset\subset P_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Wówczas istnieje ciąg $\{u_n\}$ funkcji rzeczywistych klasy $\mathcal{C}^\infty(R^p)$ o następujących własnościach:

(c_o) funkcja u_n jest w każdym punkcie $x \in R^p$ płaska lub R-analityczna;

(c_1) $\operatorname{supp} u_n \subset\subset P_n$;

(c_2) $M_n(u_n,x) < 1/(n+1)$ dla każdego $x \in R^p$;

(c_3) $M_{2k}(u_1+\ldots+u_n,x) > k$, gdy $x \in Q_k$, $k = 1,\ldots,n$.

<u>Dowód.</u> Na podstawie Lematu 1 istnieje funkcja u_1 klasy $\mathcal{C}^\infty(R^p)$, spełniająca warunki (c_o)-(c_3) dla $n = 1$. Załóżmy, że już mamy funkcje $u_1,\ldots,u_n$ klasy $\mathcal{C}^\infty$ spełniające warunki (c_o)-(c_3). Ponieważ nośnik funkcji $u_1+\ldots+u_n$ jest zwarty, więc $\sup\left\{M_{n+2}(u_1+\ldots+u_n,x) : x \in R^p\right\} < +\infty$. Stosując Lemat 1 dobierzemy teraz funkcję u_{n+1} taką, że spełnione są warunki (c_o)-(c_3) dla $n+1$. Mianowicie dla dowolnego $\varepsilon > 0$ Lemat 1 gwarantuje istnienie funkcji $u_{n+1} \in \mathcal{C}^\infty(R^p)$, dla której zbiór punktów rozbieżności D jest pusty, $\operatorname{supp} u_{n+1} \subset\subset Q_{n+1}$ oraz

$$\left|D^\alpha u_{n+1}(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{gdy} \quad x \in R^p, \ |\alpha| \leqslant 2n,$$

$$M_{2n+2}(u_{n+1},x) > 1/\varepsilon, \quad \text{gdy} \quad x \in Q_{n+1}.$$

Gdy $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie małe, to funkcje $u_1,\ldots,u_{n+1}$ spełniają warunki (c_o)-(c_3). Rzeczywiście, zadośćuczynienie warunkom (c_o)-(c_2) jest oczywiste. Kosztem wyboru $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego, dzięki własności (W_2) operatora M_n, uzyskamy nierówności

$$M_{2k}(u_1+\ldots+u_{n+1},x) > k, \quad \text{gdy} \quad x \in Q_k, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Analogiczną nierówność dla $k = n+1$ otrzymamy stąd, iż

$$M_{2n}(u_1+\dots+u_{n+1},x) \geq M_{2n}(u_{n+1},x) - M_{2n}(u_1+\dots+u_n,x), \quad x \in R^p,$$

oraz stąd, że $\sup\limits_{x \in R^p} M_{2n}(u_1+\dots+u_n,x)$ jest liczbą skończoną. Q.E.D.

Lemat 3. Jeśli G jest zbiorem otwartym w R^p, to istnieją ciągi kostek otwartych i ograniczonych $\{Q_j\}$, $\{P_j\}$ o następujących własnościach:

1° $Q_j \subset\subset P_j$, $j \geq 1$;

2° $\bigcup\limits_1^{\infty} Q_j = \bigcup\limits_1^{\infty} P_j = G$;

3° Każdy podzbiór zwarty K zbioru G przecina tylko skończoną liczbę kostek Q_j oraz tylko skończoną liczbę kostek P_j.

Dowód. Niech $\{K_n\}$ będzie ciągiem podzbiorów zwartych zbioru G spełniającym warunki

$$K_n \subset \mathring{K}_{n+1}, \quad \bigcup_1^{\infty} K_n = G.$$

Przyjmijmy $K_0 = \emptyset$ i przy dowolnym ustalonym n przyporządkujemy każdemu punktowi $x \in K_{n+1} - \mathring{K}_n$ kostki U_x, V_x o środkach w punkcie x takie, że

$$U_x \subset\subset V_x \subset\subset K_{n+2} - K_{n-1}.$$

Z pokrycia zbioru zwartego $K_{n+1} - \mathring{K}_n$ kostkami U_x wybierzmy pokrycie skończone $U_{x_1},\dots,U_{x_{s_n}}$ i połóżmy

$$Q_{n1} := U_{x_1},\dots,Q_{ns_n} := U_{x_{s_n}}, \quad P_{n1} := V_{x_1},\dots,P_{ns_n} := V_{x_{s_n}}.$$

Wówczas jako $\{Q_j\}$ można wziąć ciąg o wyrazach

$$Q_{11},\dots,Q_{1s_1}, Q_{21},\dots,Q_{2s_2},\dots$$

a jako $\{P_j\}$ ciąg o wyrazach

$$P_{11},\dots,P_{1s_1}, P_{21},\dots,P_{2s_2},\dots$$ Q.E.D.

Twierdzenie Zahorskiego. Jeśli A, D, F są podzbiorami rozłącznymi przestrzeni R^p takimi, że

A jest zbiorem otwartym,
D jest zbiorem typu G_δ,
F jest zbiorem I kategorii typu F_σ,
$R^p = A \cup D \cup F$,

to istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(R^p)$, dla której A jest zbiorem punktów regularnych, D - zbiorem punktów rozbieżności, F - zbiorem punktów fałszywej zbieżności.

Dowód. Ponieważ D jest zbiorem typu G_δ, więc $D = \bigcap_1^\infty G_s$, gdzie $G_s \supset G_{s+1}$, G_s jest zbiorem otwartym dla $s \geqslant 1$. Stosując Lemat 3, przedstawmy zbiór G_s w postaci sumy

$$G_s = \bigcup_{j=1}^\infty Q_{sj},$$

gdzie Q_{sj} jest kostką relatywnie zwartą w G_s i każdy zbiór zwarty $K \subset G_s$ przecina co najwyżej skończoną liczbę tych kostek. Niech $\{P_{sj}\}_{j \geqslant 1}$ będzie ciągiem kostek mających analogiczną własność i ponadto $Q_{sj} \subset\subset P_{sj}$ dla $j \geqslant 1$.

Ustawmy kostki ciągu podwójnego $\{Q_{sj}\}$ w ciąg pojedynczy $\{Q_n\}$ o wyrazach

$$Q_{11}, Q_{21}, Q_{12}, Q_{31}, Q_{22}, Q_{13}, \ldots, Q_{n1}, \ldots, Q_{1n}, \ldots$$

Niech $\{P_n\}$ oznacza ciąg pojedynczy, powstały przez analogiczne uporządowanie wyrazów ciągu podwójnego $\{P_{sj}\}$.

Zauważmy, że $x \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in Q_n$ (odpowiednio $x \in P_n$) dla nieskończenie wielu n. Niech $\{u_n\}$ będzie ciągiem funkcji klasy $\mathcal{C}^\infty(R^p)$, spełniających warunki z Lematu 2 ze względu na skonstruowane ciągi kostek $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$. Dzięki (c_2) funkcja

$$u := \sum_1^\infty u_n$$

jest klasy $\mathcal{C}^\infty(R^p)$. Na podstawie (c_3) mamy

$$M_{2k}(u,x) > k, \quad \text{gdy} \quad x \in Q_k, \quad k \geqslant 1.$$

Ponieważ każdy punkt x zbioru D leży w nieskończenie wielu kostkach Q_k, więc $r(T_x u) = 0$ dla $x \in D$.

Jeśli $a \in R^p - D$, to $u_n(x) = 0$ w pewnym otoczeniu (zależnym od n) punktu a dla prawie wszystkich n, powiedzmy dla $n > s$. Ponieważ $T_a u = T_a(u_1+\dots+u_s)$ oraz dla każdego j funkcja u_j jest w punkcie a bądź płaska, bądź analityczna, więc $r(T_a u) > 0$, gdy $a \in R^p - D$.

Stosując II Twierdzenie Whitneya do u, $\Omega := R^p$, $X := \bar{D}$, znajdziemy funkcję $g \in \mathcal{C}^\infty(R^p)$, analityczną w $R^p - \bar{D}$, dla której

$$D^\alpha g(x) = D^\alpha u(x), \quad \text{gdy} \quad x \in \bar{D}.$$

Niech h będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty(R^p)$, R-analityczną i dodatnią w $R^p - \bar{F}$ oraz płaską na $\bar{F}$ (zob. § 7). Wówczas funkcja f określona wzorem

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad x \in R^p,$$

ma szukane własności.

Rzeczywiście, f jest R-analityczna w $R^p - (D \cup F)$. Jeśli $x \in \bar{D}$, to $T_x f = T_x(u+h)$. Zatem $r(T_x f) = 0$, gdy $x \in D$ oraz każdy punkt $a \in \bar{D} - D$ jest punktem fałszywej zbieżności funkcji f, gdyż a jest punktem skupienia punktów osobliwych oraz $r(T_a f) = r(T_a(u+h)) > 0$, bowiem $r(T_a u) > 0$ i $r(T_a h) > 0$.

Jeśli $a \in F - \bar{D}$, to istnieje kula $B = B(a,\delta)$ rozłączna z $\bar{D}$. Zbiór $B \cap F$ jest domknięty i nigdziegęsty w B (gdyż $D \cup F$ jest zbiorem domkniętym oraz F jest pierwszej kategorii i typu F_σ). Ponieważ g jest analityczna w B zaś h jest płaska w a i a jest jej punktem osobliwym (w przeciwnym razie h znikałaby w pewnym otoczeniu punktu a), więc a jest punktem fałszywej zbieżności funkcji f. Q.E.D.

<u>Wniosek</u>. Niech A, D, F będą podzbiorami rozłącznymi zbioru otwartego $\Omega \subset R^p$ takimi, że A jest otwarty, D jest typu G_δ, F jest I kategorii typu F_σ oraz $\Omega = A \cup D \cup F$, to istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, dla której A jest zbiorem punktów regularnych, D - zbiorem punktów rozbieżności, F - zbiorem punktów fałszywej zbieżności.

<u>Dowód</u>. Na podstawie Twierdzenia Zahorskiego istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(R^p)$ taka, że $A(f) = A \cup (R^p - \bar{\Omega})$, $D(f) = D$, $F(f) = F \cup \partial\Omega$. Funkcja $f|\Omega$ ma żądane własności. Możemy też znaleźć funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(R^p)$, dla której $A(f) = A \cup (R^p - \bar{\Omega})$, $D(f) = D \cup \partial\Omega$, $F(f) = F$. Znowu $f|\Omega$ ma żądane własności. Analogicznie istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(R^p)$ taka, że $A(f) = A$, $D(f) = D \cup (R^p - \Omega)$, $F(f) = F$. Więc $f|\Omega$ ma żądane własności.

9. TWIERDZENIE ZAHORSKIEGO DLA FUNKCJI OKRESOWYCH

Niech $\mathcal{C}^\infty_{2\pi}(R)$ oznacza przestrzeń funkcji klasy $\mathcal{C}^\infty$ jednej zmiennej rzeczywistej okresowych o okresie 2π. Niech $\Gamma := \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

oznacza okrąg jednostkowy na płaszczyźnie R^2, utożsamianej - jeśli tak będzie wygodniej - z płaszczyzną zespoloną $\mathbb{C}$. Odwzorowanie R-analityczne

$$\varphi: R \ni t \longrightarrow e^{it} \in \Gamma$$

przekształca oś liczbową R na okrąg Γ. Niech A, D, F będą takimi rozłącznymi podzbiorami okręgu Γ, że

1) $\Gamma = A \cup D \cup F$,
2) A jest podzbiorem otwartym okręgu Γ,
3) D jest zbiorem typu G_δ na Γ,
4) F jest zbiorem I kategorii typu F_σ na Γ.

Zauważmy, że zbiór typu G_δ na Γ jest typu G_δ na płaszczyźnie R^2. Analogicznie zbiór $F \subset \Gamma$ I kategorii typu F_σ na Γ jest zbiorem I kategorii typu F_σ na R^2. Łatwo widać, że oś R jest sumą rozłączną zbiorów $\varphi^{-1}(A)$, $\varphi^{-1}(D)$, $\varphi^{-1}(F)$, przy czym $\varphi^{-1}(A)$ jest podzbiorem otwartym prostej R, $\varphi^{-1}(D)$ jest jej podzbiorem typu G_δ, $\varphi^{-1}(F)$ - jej podzbiorem I kategorii typu F_σ. Ponadto, jeśli E oznacza którykolwiek spośród ostatnich trzech zbiorów, to dla każdego $x \in E$ i dla każdej liczby całkowitej k jest $x+2k\pi$ należy do E. Innymi słowy, E jest podzbiorem okresowym o okresie 2π prostej rzeczywistej R.

Na odwrót, jeśli R jest sumą rozłączną zbiorów okresowych $\tilde{A}$, $\tilde{D}$, $\tilde{F}$ o okresie 2π, z których $\tilde{A}$ jest otwarty, $\tilde{D}$ - typu G_δ, $\tilde{F}$ - I kategorii typu F_σ, to Γ jest sumą rozłączną zbiorów $A := \varphi(\tilde{A})$, $D := \varphi(\tilde{D})$, $F := \varphi(\tilde{F})$ spełniających warunki 1) - 4).

<u>Twierdzenie</u>. Jeśli A, D, F są rozłącznymi podzbiorami okręgu Γ, spełniającymi warunki 1) - 4), to istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(R)$, dla której $\varphi^{-1}(A)$ jest zbiorem punktów regularnych, $\varphi^{-1}(D)$ - zbiorem punktów rozbieżności, $\varphi^{-1}(F)$ - zbiorem punktów fałszywej zbieżności.

<u>Dowód</u>. Zauważmy, że Lemat 3 pozostaje prawdziwy, gdy G jest podzbiorem otwartym okręgu Γ, zaś Q_j, P_j oznaczają łuki otwarte okręgu Γ o długościach mniejszych niż π. Stosując Lemat 3 w tak zmodyfikowanej postaci, znajdziemy dla zbioru $D \subset \Gamma$ typu G_δ takie dwa ciągi łuków otwartych $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, że $Q_n \subset\subset P_n$, długość $P_n < \pi$ oraz $z \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \in Q_n$ (odp. $z \in P_n$) dla nieskończenie wielu n. Analogicznie, $t \in \varphi^{-1}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t \in \varphi^{-1}(Q_n)$ (odp. $t \in \varphi^{-1}(P_n)$) dla nieskończenie wielu n.

Dla ustalonego n niech P_n^* oznacza dowolną ustaloną składową spójną (przedział otwarty) zbioru $\varphi^{-1}(P_n)$ i niech Q_n^* oznacza składową spójną zbioru $\varphi^{-1}(Q_n)$ zawartą w P_n^*.

Niech $\{u_n^*\}$ oznacza ciąg funkcji rzeczywistych klasy $\mathcal{C}^\infty(R)$, spełniających warunki $(c_0)-(c_3)$ Lematu 2 ze względu na ciągi przedziałów $\{P_n^*\}$, $\{Q_n^*\}$. Ponieważ supp $u_n^* \subset\subset P_n^*$ oraz długość $P_n^* < \pi$, więc istnieje funkcja $u_n \in \mathcal{C}^{\infty}_{2\pi}(R)$ taka, że $u_n^* = u_n$ na P_n^*. Ciąg $\{u_n\}$ spełnia następujące warunki:

(C_o) u_n jest w każdym punkcie $x \in R$ płaska lub R-analityczna;

(C_1) $\operatorname{supp} u_n \subset \varphi^{-1}(P_n)$, $\operatorname{supp}(u_n | P_n^*) \subset\subset P_n^*$;

(C_2) $M_n(u_n, x) < 1/(n+1)$ dla $x \in R$;

(C_3) $M_{2k}(u_1 + \ldots + u_n; x) > k$, gdy $x \in \varphi^{-1}(Q_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Dzięki (C_2) funkcja $u := \sum_1^{\infty} u_n$ jest klasy $\mathcal{C}^{\infty}_{2\pi}(R)$, przy czym rozumowanie analogiczne jak w dowodzie twierdzenia Zahorskiego pozwala stwierdzić, że $\varphi^{-1}(D)$ jest zbiorem punktów rozbieżności funkcji u. Natomiast w każdym punkcie $a \in R - \varphi^{-1}(D)$ funkcja u jest bądź płaska, bądź R-analityczna.

Funkcja

$$\tilde{u}(x,y) := \begin{cases} u(\operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y}), & y \neq 0 \\ u(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}), & \text{gdy } x \neq 0, \end{cases}$$

jest klasy $\mathcal{C}^{\infty}$ w zbiorze otwartym $\Omega = R^2 - \{(0,0)\}$ oraz $\tilde{u}(e^{it}) = u(t)$ gdy $t \in R$. Na podstawie II twierdzenia Whitneya istnieje funkcja $\tilde{g} \in \mathcal{C}^{\infty}\Omega$ analityczna w $\Omega - \bar{D}$, dla której

$$(\%) \qquad \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \tilde{g}(x,y) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \tilde{u}(x,y), \quad \text{gdy} \quad (x,y) \in \bar{D},\ k,\ l \geq 0.$$

Niech $\tilde{h}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^{\infty}(R^2)$ R-analityczną i dodatnią w $\Omega - \bar{F}$ oraz płaską na $\bar{F}$. Szukana funkcja f może być teraz określona wzorem

$$f(t) := g(t) + h(t),\ t \in R, \text{ gdzie } g(t) := \tilde{g}(e^{it}),\ h(t) := \tilde{h}(e^{it}).$$

Rzeczywiście f jest R-analityczna w $R - \varphi^{-1}(D \cup F)$ jako superpozycja funkcji R-analitycznych. Jeśli $a \in \varphi^{-1}(D)$, to $T_a f = T_a(u+f)$. Przeto $r(T_a f) = 0$, gdy $a \in \varphi^{-1}(D)$, ponieważ h jest R-analityczna na $R - \varphi^{-1}(F)$ oraz płaska na $\varphi^{-1}(\bar{F})$. Dalsza część dowodu przebiega analogicznie jak odpowiednia część dowodu twierdzenia Zahorskiego.

10. TWIERDZENIE MORGENSTERNA [5]

Zbiór

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) : D(f) = \Omega \right\}$$

jest dopełnieniem zbioru I kategorii typu F_σ. W szczególności zbiór $\mathcal{D}$ jest rezydualny, a więc zbiór tych funkcji $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, dla których każdy punkt $a \in \Omega$ jest punktem rozbieżności, jest bardzo duży.

Dowód. Przedstawmy Ω w postaci sumy wstępującego ciągu zbiorów zwartych K_j : $\Omega = \bigcup_1^{\infty} K_j$. Ponieważ $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) - \bigcup_{j,m=1}^{\infty} Z_{jm}$, gdzie

$$Z_{jm} := \left\{ f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) : \exists_{a \in K_j} \ \forall_{n \geq 0} \ M_n(f,a) \leq m \right\},$$

wystarczy wykazać, że dla każdego $j,m \geq 1$ zbiór Z_{jm} jest domknięty i nigdziegęsty. Dla dowodu domkniętości niech $\{f_k\}$ będzie ciągiem elementów zbioru Z_{jm}, zbieżnym do f w $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem punktów zbioru K_j, takim że

$$M_n(f_k, a_k) \leq m, \quad n \geq 0, \quad k > 0.$$

Ponieważ K_j jest zwarty - bez szkody dla ogólności rozumowania - można założyć, że $\lim a_k = a \in K_j$. Korzystając z własności (W_2) operatora M_n, widać, że

$$M_n(f,a) \leq m, \qquad n \geq 0.$$

Przeto $f \in Z_{jm}$.

Aby udowodnić, że zbiór Z_{jm} jest nigdziegęsty, niech

$$U := \left\{ f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) : \|D^{\alpha}f - D^{\alpha}g\|_K < \varepsilon, \quad |\alpha| \leq s \right\}$$

będzie dowolnym otoczeniem elementu g zbioru Z_{jm}. Niech a będzie takim punktem zbioru K_j, że $M_n(g,a) \leq m$ dla $n \geq 0$. Niech Q będzie kostką zwartą o środku a zawierającą w swoim wnętrzu sumę $K \cup K_j$. Na podstawie Lematu 2 istnieje funkcja $u \in \mathcal{C}^{\infty}(R^p)$ o nośniku zwartym, taka, że $g + u \in U$ oraz

$$M_{s+1}(g+u,x) \geq M_{s+1}(u,x) - M_{s+1}(g,x) > m+1, \quad \text{gdy} \quad x \in K_j.$$

Zatem funkcja $g+u \notin Z_{jm}$. Q.E.D.

11. PROBLEM

Niech $\mathcal{A}^{\infty}(\Delta)$ oznacza zbiór funkcji holomorficznych w kole jednostkowym $\Delta := \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ i klasy $\mathcal{C}^{\infty}$ w jego domknięciu. Niech A, D, F będą takimi podzbiorami rozłącznymi okręgu $\Gamma := \partial\Delta$, iż $\Gamma = A \cup D \cup F$. A jest podzbiorem otwartym zbioru Γ, D - zbiorem typu G_{δ} na Γ, F - zbiorem I kategorii typu F_{σ} na Γ. Czy istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}^{\infty}(\Delta)$ taka, że f jest R-analityczna na $\Delta \cup A$, f nie jest R-analityczna w żadnym punkcie zbioru $D \cup F$, $r(T_a f) = 0$ dla każdego $a \in D$ oraz $r(T_a f) > 0$ dla każdego $a \in F$?

Można sprawdzić, iż funkcja $f \in \mathcal{A}^{\infty}(\Delta)$ ma żądane własności wtedy i tylko wtedy, gdy ma je jej część rzeczywista $u = \mathrm{re}\, f$.

Opierając się na Twierdzeniu Zahorskiego dla funkcji okresowych, można wykazać, że dla każdego podzbioru domkniętego D okręgu Γ istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}^{\infty}(\Delta)$ holorficzna na $\bar{\Delta} - D$, dla której $r(T_a f) = 0$, gdy $a \in D$.

LITERATURA

[1] Bang Th.: Sur le points singuliers (dans un sens gemeralisé) des fonctions indefiniment dérivables. Den 11te Scand. Mat. Kongress,269-263, Oslo 1952, MR 14 # 626.

[2] Boas R.P.Jr.: A theorem on analytic functions of a real variable. Bull. Amer. Math Soc. 41 (1935), 233-236.

[3] Cartan H.: Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs derivées successives. Actual.Sci.Industr.867 (1940), 20-22.

[4] Malgrange B.: Ideals of differentiable functions, Oxford University Press 1966.

[5] Morgenstern D.: Unendlich oft differenzierbare nirgends analytische Funktionen, Math. Nachritten 12 (1954), 74.

[6] Narasimhan R.: Analysis on real and complex manifolds, North Holland 1968.

[7] Pringsheim A.: Zur Theorie der Taylorschen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich. Math.Ann. 42 (1893),153-184.

[8] Salzmann H. und Zeller K.: Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen. Math. Z. 62 (1955), 354-367.

[9] Whitney H.: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 63-83.

[10] Zahorski Z.: Sur l'ensemble de points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les derivées de tous les ordres. Fund.Math. 34 (1947), 183-245.

Recenzent: Prof. dr Jerzy Górski

Wpłynęło do redakcji: 22.XII.1983 r.

РЕГУЛЯРНЫЕ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ КЛАССА C^{∞}

Р е з ю м е

Автором доказана теорема обобщающая теорему Захорского на случай R^p. Пусть R^p разлагается на сумму непересекающихся подмножеств $R^p = A \cup D \cup F$, где A – открыто, D – множество типа G_{δ}, F – типа F_{σ} и I категории. Тогда существует функция $f \in C^{\infty}(R^p)$ такая, что A – множество регулярных точек для f, D – множество точек расходимости для f, F – множество точек ложной сходимости для f.

REGULAR AND SINGULAR POINTS OF THE FUNCTION OF THE CLASS C^{∞}

S u m m a r y

The aim of this paper is to show a proof of a theorem of Zahorski in the case of R^p:

Let A, D, F be disjoint subsets of R^p such that A is open, D – of type G_{δ}, F – of type F_{σ} I kat. and $R^p = A \cup D \cup F$. Then there exists a function $f \in C^{\infty}(R^p)$ such that A, D, F are the sets of regular points of f, of divergence points and of the points of false convergence, respectively.