ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 48 Nr kol. 853

А.А. ТАЛАЛЯН

# ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ, ЗАМКНУТЫХ В СЛАБОМ СМЫСЛЕ В МЕТРИКАХ $C[0,1]$ И $L^p[0,1]$

посвящается 70-летию З. Захорского

Резюме. Система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций из пространства X называется замкнутой в слабом смысле в X, если для любой $f \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi$ из линейной оболочки $\{f_n\}$ такая, что

$$\mu(\{x : f(x) = \varphi(x)\}) > 1 - \varepsilon .$$

В работе рассматривается $X = C[0,1]$ и $X = L^p[0,1]$, $p > 1$. Доказывается, что удаление из замкнутой в слабом смысле системы любой конечной а также некоторых бесконечных подсистем, не нарушает их свойства замкнутости.

В работе [1] (см. также [2] и [3]) было установлено, что если система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в пространстве S почти везде конечных на $[0,1]$ измеримых функций с метрикой сходимости по мере, то тем же свойством обладают и все ее подсистемы вида $\{f_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$, N-любое натуральное число, а также некоторые подсистемы $\{f_{n_k}(x)\}$, не содержащие бесконечное число функций из $\{f_n(x)\}$.

В настоящей работе подобные вопросы рассматриваются для систем, обладающих некоторыми ослабленными свойствами замкнутости в метриках $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$.

Определение. Система $\{f_n\}$, $f_n \in C[0,1]$ определенных на $[0,1]$ функций называется замкнутой в $C[0,1]$ в слабом смысле (соответственно замкнутой в $L^p[0,1]$, $f_n \in L^p$ в слабом смысле), если для любой почти везде конечной на $[0,1]$ измеримой функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi(x)$ из замкнутой в метрике $C[0,1]$ линейной оболочки системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (из замкнутой в метрике $L^p[0,1]$ линейной оболочки системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$), такая, что

$$\mu\{x;\ f(x) = \varphi(x)\} > 1 - \varepsilon \tag{1}$$

В настоящей работе установлены некоторые аппроксимационные свойства систем $\{f_n(x)\}$, замкнутых в слабом смысле в метриках $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$ (см. теоремы 1, 2 и 3), из которых, в частности, вытекает, что удаление из этих систем любых конечных, а также некоторых бесконечных подсистем не нарушает их свойства замкнутости в слабом смысле в метриках $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$.

Для этого приходится рассматривать одно F-пространство, определяемое с помощью системы $\{f_n(x)\}$. Пусть $\{f_n(x)\}$ замкнута в слабом смысле в метрике $C[0,1]$ и $\Phi$ -замкнутая линейная оболочка этой системы в метрике $C[0,1]$. Пусть $f(x)$ почти везде конечная на $[0,1]$ измеримая функция и $M(f)$-множество чисел $m$, $0 < m < 1$, для каждого из которых существует функция $\varphi(x) \in \Phi$, удовлетворяющая условиям

$$\max|\varphi(x)| \leqslant m, \quad \mu\{x;\ \varphi(x) = f(x)\} \geqslant 1-m \tag{2}$$

Положим

$$\|f\|_S^* = \begin{cases} 1 & \text{если } M(f) \text{ пусто} \\ \inf\limits_{m \in M(f)} m & \text{если } M(f) \text{ не пусто} \end{cases} \tag{3}$$

Легко видеть, что линейное пространство $S$ с введенной метрикой $\|\cdot\|_S^*$ является полным F-пространством. Приведем доказательство полноты этого пространства. Пусть $U_n(x) \in S$, $n \geqslant 1$ и $\|U_n-U_m\|_S^* \longrightarrow 0$ при $n,m \longrightarrow \infty$. Выберем подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, такую, что $\|U_n-U_m\|_S^*$ $2^{-k}$, $n,m \geqslant n_k$, $k \geqslant 1$. В частности, $\|U_{n_{k+1}} - U_{n_k}\|_S^* < 2^{-k}$, $k \geqslant 1$ и поэтому из определения $\|\cdot\|_S^*$ (см. (2) и (3)) следует, что последовательность $\{U_{n_k}(x)\}$ сходится почти всюду на $[0,1]$ к некоторой функции $U(x) \in S$. Из определения нормы $\|\cdot\|_S^*$ вытекает также существование функций $\psi_k(x) \in \Phi$ и множеств $E_k \subset [0,1]$, $\mu(E_k) > 1-2^{-k}$ таких, что

$$\max|\psi_k(x)| < 2^{-k}, \ \psi_k(x) = U_{n_{k+1}}(x) - U_{n_k}(x), \ x \in E_k, \ k \geqslant 1$$

Обозначив

$$F_\vartheta = \bigcap_{k=\vartheta}^{\infty} E_k, \quad \varphi_i(x) = \sum_{k=\vartheta}^{i} \psi_k(x), \ i \geqslant \vartheta$$

мы видим, что последовательность $\{\varphi_i(x)\}_{i=\vartheta}^{\infty}$ сходится равномерно на $[0,1]$ к некоторой функции $\psi(x) \in \Phi$, $\max|\psi(x)| < 2^{-\vartheta+1}$ и так как

$$\varphi_i(x) = U_{n_{i+1}}(x) - U_{n_\vartheta}(x), \ x \in F_\vartheta, \quad i \geqslant \vartheta$$

имеем

$$\psi(x) = U(x) - U_{n_\vartheta}(x), \ x \in F_\vartheta,$$

причем $\mu(F_\vartheta) > 1-2^{-\vartheta+1}$. Это означает, что $\|U_{n_\vartheta}-U\|_S^* < 2^{-\vartheta+1}$ и тогда при $n > n_\vartheta$ имеем $\|U_n-U\|_S^* < 2^{-\vartheta+2}$. Полнота пространства $S$ с нормой $\|\cdot\|_S^*$ доказана.

Рассмотрим теперь множество $S$ с обычной нормой сходимости по мере

$$\|f\|_S = \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|}\, dx \tag{4}$$

Ясно, что тождественное отображение $E(f) = f$ пространства $S$ с нормой $\|\cdot\|_S^*$ на то же самое линейное пространство с нормой $\|.\|_S$ непрерывно, и поэтому по теореме Банаха непрерывно и обратное отображение. Это означает, что верна следующая

Лемма 1. Если система $\{f_n\}$, $f_n \in C[0,1]$ замкнута в $C[0,1]$ в слабом смысле, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $f \in S$ и

$$\|f\|_S < \delta , \tag{5}$$

то существует $g(x)$, принадлежащая замкнутой в метрике $C[0,1]$ линейной оболочке системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и удовлетворяющая условиям

$$\max|g(x)| < \varepsilon , \quad \mu\{x;\ f(x) = g(x)\} > 1 - \varepsilon \tag{6}$$

Используя лемму 1, докажем следующую лемму

Лемма 2. Пусть система $\{f_n(x)\}$ минимальна в $C[0,1]$ и замкнута в слабом смысле в $C[0,1]$. Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что если

$$f(x) = 0, \quad x \in [0,1] - E_0, \quad |f(x)| < \delta_0' < \delta_0, \quad x \in [0,1] \tag{7}$$

то для любого натурального $N$ и положительного $\eta > 0$ существуют множества $A$, $E$ и линейная комбинация

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^{m} a_k f_k(x), \quad m > N \tag{8}$$

обладающие свойствами

$$|H(x) - f(x)| < \eta , \quad x \in A, \ A \subset E \cap E_0, \quad \mu(A) > \frac{1}{4}\mu(E_0) - \varepsilon_0 \tag{9}$$

$$|H(x)| < \delta_0', \quad x \in E, \quad \mu(E) > 1 - \varepsilon_0 \tag{10}$$

$$\max|H(x)| < \varepsilon_0 \tag{11}$$

$$|H(x)| < \eta , \quad x \in E \cap ([0,1] - E_0) \tag{12}$$

Доказательство. Как легко видеть, не ограничивая общности, функцию $f(x)$ можно считать ступенчатой и равной нулю вне некоторого множества

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{\vartheta} \Delta_i, \tag{13}$$

где $\Delta_i$, $1 \leqslant i \leqslant \vartheta$ – попарно непересекающиеся интервалы и $f(x)$ постоянная на каждом $\Delta_i$, т.е.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i \chi_{\Delta_i}(x) \tag{14}$$

Рассмотрим последовательность

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i z_n(\Delta_i, x) \tag{15}$$

где $z_n(\Delta_i, x)$ – функции Радемахера, определенные на $\Delta_i$ и равные нулю вне $\Delta_i$. Возьмем $\delta_0 > 0$ такое, чтобы выполнялись требования леммы 1, когда в ее формулировке берется $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{4}$ и $\delta = \delta_0$. Тогда, если $|f(x)| < \delta_0' < \delta_0$, то $|\Psi_n(x)| < \frac{1}{2}\delta_0' < \frac{1}{2}\delta_0$, $n \geqslant 1$, и, следовательно, $|\Psi_n|_S^* < \delta_0$, $n \geqslant 1$. Согласно лемме 1, существуют функции $\varphi_n \in \Phi$, $n \geqslant 1$, такие, что

$$\max|\varphi(x)| < \frac{\varepsilon_0}{4}, \ \mu\left\{x;\ \varphi_n(x) = \Psi_n(x)\right\} > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4} \tag{16}$$

Рассмотрим линейные комбинации

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} a_k^{(n)} f_k(x), \ k_1 < k_q < \ldots < k_n < \ldots;\ n > 1 \tag{17}$$

такие, что $\max|Q_n(x)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ и $\max|Q_n(x) - \varphi_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$. Легко видеть, что для фиксированного натурального $N$ ($N$ – число, фигурирующее в формулировке леммы 2) существует $M > 0$, такое, что

$$\left|a_k^{(n)}\right| < M, \ 1 \leqslant k \leqslant N, \ n \geqslant 1 \tag{18}$$

В самом деле, допустим, что для некоторой последовательности $\{n_i\}$ имеем

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \left|a_k^{(n_i)}\right| = M_i \to +\infty \quad \text{при} \quad i \to \infty \tag{19}$$

Тогда $Q_{n_i}(x)/M_i$ равномерно на $[0,1]$ сходится к нулю при $i\to\infty$ и, следовательно, некоторая функция $f_{k_0}(x)$, $1\leqslant k_0\leqslant N$ будет пределом равномерно сходящейся последовательности линейных комбинаций остальных функций $f_k(x)$, $k\neq k_0$. Это противоречит минимальности системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из неравенств (18) следует, что для некоторой последовательности натуральных чисел $n_i$ и для всех $k$, $1\leqslant k\leqslant N$ последовательности $\{a_k^{(n_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ имеют конечные пределы и поэтому для достаточно большого $i$ будем иметь

$$\max\left|\sum_{k=N+1}^{k_{n_i}} a_k^{(n_i)} f_k(x) - \sum_{k=N+1}^{k_{n_{i-1}}} a_k^{(n_{i-1})} f_k(x) - (\varphi_{n_i}(x) - \varphi_{n_{i-1}}(x))\right| <$$

$$< \min\left\{\eta,\, \delta_0^{\prime},\, \mathcal{E}/q,\, \xi\right\}, \qquad \xi = \delta_0^{\prime} - \max|f(x)| \tag{20}$$

Теперь легко убедиться, что линейная комбинация

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^{m} a_k f_k(x) = \sum_{k=N+1}^{k_{n_i}} a_k^{(n_i)} f_k(x) - \sum_{k=N+1}^{k_{n_{i-1}}} a_k^{(n_{i-1})} f_k(x) \tag{21}$$

удовлетворяет требованиям леммы 2. В самом деле, из (14) и (15) вытекает, что

$$\psi_{n_i}(x) - \psi_{n_{i-1}}(x) = f(x), \quad x\in B\cup([0,1] - E_0) \tag{22}$$

где $B\subset E_0$, $\mu(B) = \frac{1}{4}\mu(E_0)$.

Положим

$$E = \{x\,;\,\varphi_{n_i}(x) = \psi_{n_i}(x)\}\cap\{x\,;\,\psi_{n_{i-1}}(x) = \varphi_{n_{i-1}}(x)\}, \quad A = B\cap E \tag{23}$$

Из (16) следует, что

$$\mu(E) > 1 - \varepsilon_0, \; A\subset E_0, \; \mu(A) > \frac{1}{4}\mu(E_0) - \varepsilon_0 \tag{24}$$

Условие (9) леммы 2 следует из (20), (21), (22), (23) и (24). Неравенство (10) следует из (20), (21) и (23), так как $\max|\psi_{n_i} - \psi_{n_{i-1}}| = \max|f(x)|$. Неравенство (11) немедленно следует из (16) и (20), а неравенство (12) следует из (20), (21), (22), (23) и из того, что $f(x) = 0$ при $x\in E_0$. Итак, лемма 1 доказана.

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\}$ минимальна в $C[0,1]$ и замкнута в $C[0,1]$ в слабом смысле. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $F \in S$,

$$\|F\|_S = \int_0^1 \frac{|F(x)|}{1+|F(x)|}\,dx < \delta, \tag{25}$$

то для любого $\eta > 0$ и натурального $N$ существуют линейная комбинация

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^{m} a_k f_k(x), \quad m > N \tag{26}$$

и множество $E$, которые удовлетворяют условиям

$$E \subset [0,1], \quad \mu(E) > 1-\varepsilon \tag{27}$$

$$|H(x) - F(x)| < \eta, \quad x \in E \tag{28}$$

$$\max|H(x)| < \varepsilon \tag{29}$$

Доказательство. Заметим, что теорема 1 будет доказана, если мы докажем существование для данного $\varepsilon > 0$ положительного $\delta$, для которого из условия

$$|F(x)| < \delta, \quad x \in [0,1] \tag{30}$$

вытекало бы существование для любых $\eta > 0$ и $N$ полинома (26) и множества $E$, удовлетворяющих условиям (27), (28) и (29). Возьмем натуральное число $n_0$ такое, что

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{31}$$

и выберем число $\delta_0 > 0$, которое удовлетворяет требованиям леммы 2, когда в ее формулировке взято

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2^{n_0+2}} \tag{32}$$

Положим

$$\delta = \frac{\delta_0}{2^{n_0}} \tag{33}$$

Тогда неравенство (30) влечет $\max|F(x)| < \delta_o \cdot 2^{-n_o} < \delta_o$ и применяя лемму 2 (здесь надо полагать $E_o = [0,1]$), определим множества $E_1$, $A_1$ и линейную комбинацию

$$H_1(x) = \sum_{k= +1}^{m_1} a_k f_k(x), \; m_1 > N \tag{34}$$

удовлетворяющие условиям

$$\mu(E_1) > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-n_o-2}, \; A_1 \subset E_1, \; \mu(A_1) > \frac{1}{4} - \varepsilon \cdot 2^{-n_o-2} \tag{35}$$

$$|H_1(x) - F(x)| < \eta/n_o, \; x \in A_1 \tag{36}$$

$$|H_1(x)| < \delta_o \cdot 2^{-n_o}, \; x \in E_1 \tag{37}$$

$$|H_1(x)| < \varepsilon \cdot 2^{-n_o-2}, \; x \in [0,1] \tag{38}$$

Пусть определены множества $A_i$, $E_i$ и линейные комбинации

$$H_i(x) = \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} a_j f_j(x), \; N = m_o, \; m_i < m_{i+1}, \; 1 \leq i \leq k-1 < n_o \tag{39}$$

такие, что

$$A_j \cap A_{j'} = \Theta, \; j \neq j', \; \mu([0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i) < (\tfrac{3}{4})^{k-1} + \frac{2^{k-1}\varepsilon}{2^{n_o+2}} \tag{40}$$

$$|H_i(x)| < \delta_o \cdot 2^{-n_o+i-1}, x \in E_i, \; \mu(E_i) > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-n_o-2}, \; i < k \tag{41}$$

$$|H_i(x)| < \varepsilon \cdot 2^{-n_o-2}, \; x \in [0,1] \tag{42}$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} F(x) - \sum_{i=1}^{k-1} H_i(x), & x \in \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \\ 0, & x \in ([0,1] \setminus \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \end{cases} \tag{43}$$

Из (41) следует, что

$$|f(x)| < \frac{\delta_o}{2^{n_o}} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\delta_o}{2^{n_o-i+1}} = \frac{\delta_o}{2^{n_o-(k-1)}} < \delta_o, \quad x \in [0,1]. \tag{44}$$

поэтому, применяя лемму 2 для функции (43), чисел $\eta/2n_o$, $m_{k-1}$, $\delta_o' = \delta_o \cdot 2^{-n_o-k+1}$ и множества

$$E_o = \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$$

мы можем определить полином $H_k(x)$ вида (39), где $i=k$, а также множества $A_k$, $E_k$, удовлетворяющие условиям

$$A_k \subset E_k \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} E_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\Big), \quad \mu(A_k) > \frac{1}{4}\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} E_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\Big) - \frac{\varepsilon}{2^{n_o+2}} \tag{45}$$

$$\Big|F(x) - \sum_{j=N+1}^{m_k} a_j f_j(x)\Big| = |f(x) - H_k(x)| < \eta/n_o, \quad x \in A_k \tag{46}$$

$$|H_k(x)| < \delta_o \cdot 2^{-n_o+k-1}, \quad x \in E_k, \ \mu(E_k) > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-n_o-2} \tag{47}$$

$$|H_k(x)| = \Big|\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j f_j(x)\Big| < \varepsilon \cdot 2^{-n_o-2}, \quad x \in [0,1] \tag{48}$$

$$|H_k(x)| < \eta/n_o, \quad x \in E_k \cap \Big(\Big([0,1] \setminus \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i\Big) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\Big) \tag{49}$$

Из (40), (45) и (47) следует, что множества $A_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ попарно не пересекаются и

$$\mu\Big([0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) < \Big(\frac{3}{4}\Big)^k + \frac{\varepsilon \cdot 2^k}{2^{n_o+2}} \tag{50}$$

В самом деле,

$$\mu([0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\mu([0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)-\mu(A_k), \tag{51}$$

где согласно [45] и [47]

$$\mu(A_k)>\frac{1}{4}\mu([0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon\cdot(k-1)}{2^{n_o+2}}-\frac{\varepsilon}{2^{n_o+2}} \tag{52}$$

Из (51) и (52) имеем

$$\mu([0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k}A_i)<\frac{3}{4}\mu([0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)+\frac{\varepsilon\cdot k}{2^{n_o+2}} \tag{53}$$

и учитывая также (40), получаем неравенство (50). Сравнивая (40), (41) и (42) с (45), (47) и (48), заключаем, что для всех $1\leqslant k\leqslant n_o$ можно определить множества $A_k$, $E_k$ и линейные комбинации $H_k(x)$ вида (39), обладающие свойствами (45) – (50). Теперь можно показать, что линейная комбинация

$$H(x)=\sum_{i=N+1}^{m}a_if_i(x)=\sum_{k=1}^{n_o}H_k(x),\quad N=m_o,\ m=m_{n_o} \tag{54}$$

и множество

$$E=(\bigcap_{k=1}^{n_o}E_k)\cap(\bigcup_{k=1}^{n_o}A_k) \tag{55}$$

удовлетворяют требованиям теоремы 1.

В самом деле, условие (27) для множества (55) выполнено, так как согласно (47) и (50)

$$\mu(E)>1-\mu([0,1]\setminus\bigcap_{k=1}^{n_o}E_k)-\mu([0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{n_o}A_k)>$$

$$>1-n_o\cdot\frac{\varepsilon}{2^{n_o+2}}-(3/4)^{n_o}-\frac{\varepsilon\cdot 2^{n_o}}{2^{n_o+2}}>1-\varepsilon \tag{56}$$

выполнение условия (29) немедленно следует из (54) и из неравенств (48). Проверим выполнение условия (28). Если $x \in E$, то $x \in A_{k_0}$ для некоторого $k_0$ и $x \in E_k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n_0$. Когда $k_0 = n_0$ из (46) и (54) следует (29). Пусть $k_0 < n_0$. Тогда $x \in A_{k_0}$ и одновременно $x \in \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ для всех $k > k_0$. В этом случае из (46), при $k = k_0$, имеем

$$\left|F(x) - \sum_{i=N+1}^{m_{k_0}} a_i f_i(x)\right| < \eta/n_0 \tag{57}$$

и так как

$$x \in E_k \cap (([0,1] \setminus \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i),\ k > k_0 \tag{58}$$

из (49) следует, что $|H_k(x)| < \eta/n_0$ для всех $k > k_0$.

Таким образом, будем иметь

$$|F(x) - H(x)| \leqslant \left|F(x) - \sum_{j=N+1}^{m_{k_0}} a_j f_j(x)\right| + \sum_{k=k_0+1}^{n_0} |H_k(x)| < \eta \tag{59}$$

Следовательно, условие (29) тоже выполнено и теорема 1 доказана.

Аналогичная теорема верна и для минимальных и замкнутых в $L^p[0,1]$ в слабом смысле систем $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Она формулируется следующим образом.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – минимальна в $L^p[0,1]$, $p \geqslant 1$ и замкнута в слабом смысле в $L^p[0,1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$\|f\|_S < \delta, \tag{60}$$

то для любого $\eta > 0$ и натурального $N$ существует линейная комбинация

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^{m} a_k f_k(x) \tag{61}$$

и множество $E$, которые удовлетворяют условиям

$$E \subset [0,1],\ \mu(E) > 1 - \varepsilon \tag{62}$$

$$|H(x) - f(x)| < \eta,\ x \in E \tag{63}$$

$$\|H\|_p = \left(\int_0^1 |H(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \varepsilon \tag{64}$$

Доказательство этой теоремы совпадает с вышеприведенным доказательством теоремы 1. Нужно только во всех предыдущих рассмотрениях норму $\|f\|_C = \max|f(x)|$ заменить на норму $\|f\|_p$.

Аппроксимационные свойства систем $\{f_n\}$, установленные в теоремах 1 и 2 в более наглядном виде можно сформулировать следующим образом.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in C[0,1]$ $(f_n \in L^p[0,1])$ минимальна в $C[0,1]$ (минимальна в $L^p[0,1]$) и замкнута в слабом смысле в $C[0,1]$ (замкнута в слабом смысле в $L^p[0,1]$). Пусть далее, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ - произвольные положительные числа и $\mathcal{N}$-произвольное натуральное число. Тогда для любой функции $f(x) \in C[0,1]$, $(f \in L^p[0,1])$ существуют множество $E$ и линейная комбинация вида (61), удовлетворяющие условиям:

$$E \subset [0,1], \quad \mu(E) > 1 - \varepsilon \tag{65}$$

$$\left|\sum_{k=\mathcal{N}+1}^{m} a_k f_k(x) - f(x)\right| < \eta, \quad x \in E \tag{66}$$

$$\left\|\sum_{k=\mathcal{N}+1}^{m} a_k f_k(x)\right\| < Q(\varepsilon)\cdot\|f\| \tag{67}$$

где $Q(\varepsilon)$ - константа, зависящая только от $\varepsilon$ и от системы $\{f_n\}$, а норма $\|\cdot\|$ есть норма в $C[0,1]$ (соотв. норма в $L^p[0,1]$).

В самом деле, пусть $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ выбрано в зависимости от $\varepsilon$ согласно теореме 1 (соотв. согласно теореме 2). Так как

$$\left\|\delta(\varepsilon)\cdot\frac{f(x)}{\|f\|}\right\|_S < \delta(\varepsilon)\int_0^1 \frac{|f(x)|}{\|f\|} < \delta(\varepsilon)$$

то согласно теореме 1 (согласно теореме 2) можно определить линейную комбинацию

$$h(x) = \sum_{k=\mathcal{N}+1}^{m} b_k f_k(x)$$

и множество $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 1-\varepsilon$, такие, что $\|h\| < \varepsilon$ и

$$\left|h(x) - \frac{\delta(\varepsilon)}{\|f\|} f(x)\right| < \eta \cdot \frac{\delta(\varepsilon)}{\|f\|}, \; x \in E$$

Тогда, очевидно, линейная комбинация

$$H(x) = \frac{\|f\|}{\delta(\varepsilon)} \cdot h(x)$$

будет удовлетворять условиям (65) - (67) с $Q(\varepsilon) = \varepsilon/\delta(\varepsilon)$.

Аппроксимационные свойства, выраженные в теореме 3, представляют также достаточное условие для того, чтобы минимальная в $C[0,1]$ (соотв. минимальная в $L^p[0,1]$) система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была замкнутой в слабом смысле в $C[0,1]$ (соотв. замкнутой в слабом смысле в $L^p[0,1]$). Из этих же свойств вытекает, что свойство замкнутости в слабом смысле в $C[0,1]$ и в $L^p[0,1]$, минимальных систем $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ устойчиво относительно удаления из них любых конечных, а также некоторых бесконечных подсистем. Верна следующая

Теорема 4. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in C[0,1]$ ($f_n \in L^p[0,1]$) произвольная система, обладающая свойствами, приведенными в утверждении теоремы 3 с нормой $\|\cdot\|$ в $C[0,1]$ (соотв. с нормой $\|\cdot\|$ в $L^p[0,1]$) и $N$ - произвольное натуральное число. Тогда существует замкнутая в слабом смысле в $C[0,1]$ (замкнутая в слабом смысле в $L^p[0,1]$) подсистема $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, не содержащая как все первые $N$ функций $f_n(x)$, $n \leq N$, так и бесконечное число других функций из $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $\{P_i(x)\}$ - последовательность всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами, $\{\varepsilon_j\}$ и $\{\eta_s\}$ сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел, причем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < +\infty, \qquad \sum_{j=2}^{\infty} \eta_{j-1} Q(\varepsilon_j) < +\infty \tag{68}$$

Перенумеруем счетное множество всех троек $\{P_i, \varepsilon_j, \eta_s\}$, $s \geq 1$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, и рассмотрим полученную последовательность $\{P_{i_k}, \varepsilon_{j_k}, \eta_{s_k}\}$. Из предположения, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 3 немедленно вытекает существование линейных комбинаций

$$H_k(x) = \sum_{n=N_k}^{m_k} a_n f_n(x) \tag{69}$$

и множеств $E_k$, $k \geq 1$, удовлетворяющих условиям

$$N_1 = N+1, \; N_k < m_k < N_{k+1}, \quad k \geq 1 \tag{70}$$

$$E_k \subset [0,1], \ \mu(E_k) > 1 - \varepsilon_{j_k}, \quad k \geqslant 1 \tag{71}$$

$$|H_k(x) - P_{i_k}(x)| < \frac{1}{2}\eta_{s_k}, \quad x \in E_k, \quad k \geqslant 1 \tag{72}$$

$$\|H_k(x)\| \leqslant Q(\varepsilon_{j_k}) \cdot \|P_{i_k}(x)\|, \quad k \geqslant 1 . \tag{73}$$

Пусть $f(x) \in S$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем $j_0 > 1$ такое, что

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \varepsilon_j < \frac{\varepsilon}{2} \tag{74}$$

Из последовательности $\{P_{i_k}, \varepsilon_{j_k}, \eta_{s_k}\}$ выберем элемент $\{P_{i_{k_1}}, \varepsilon_{j_{k_1}}, \eta_{s_{k_1}}\}$, такой, что $\varepsilon_{j_{k_1}} = \varepsilon_{j_0}$, $\eta_{s_{k_1}} = \eta_{j_0}$ и

$$|P_{i_{k_1}}(x) - f(x)| < \frac{1}{q}\eta_{j_0}, \quad x \in A_1, \tag{75}$$

где $\mu(A_1) > 1 - \varepsilon_{j_0}$.

Тогда, согласно (71) и (72), имеем

$$|H_{k_1}(x) - f(x)| < \eta_{j_0}, \ x \in B_1, \tag{76}$$

где $B_1 = A_1 \cap E_{k_1}$ и, следовательно, $\mu(B_1) > 1 - 2\varepsilon_{j_0}$.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - H_{k_1}(x), & x \in B_1 \\ 0 & x \in [0,1] - B_1 \end{cases} \tag{77}$$

и из последовательности $\{P_{i_k}, \varepsilon_{j_k}, \eta_{s_k}\}$ выберем элемент $\{P_{i_{k_2}}, \varepsilon_{j_{k_2}}, \eta_{s_{k_2}}\}$, $k_2 > k_1$, $\varepsilon_{j_{k_2}} = \varepsilon_{j_0+1}$, $\eta_{s_{k_2}} = \eta_{j_0+1}$, такой, что

$$|P_{i_{k_2}}(x) - F(x)| < \frac{1}{2}\eta_{j_0+1}, \ x \in A_2 \tag{78}$$

где $\mu(A_2) > 1 - \varepsilon_{j_0+1}$ и

$$\|P_{i_{k_2}}\| < \eta_{j_0} \tag{79}$$

Тогда, согласно (71) и (72), имеем

$$\left|H_{k_2}(x) - F(x)\right| < \eta_{j_0+1}, \quad x \in B_2, \tag{80}$$

где $B_2 = A_2 \cap E_{k_2}$ и, следовательно,

$$\mu(B_2) > 1 - \varepsilon_{j_0+1} - \varepsilon_{j_{k_2}} = 1 - 2\varepsilon_{j_0+1} \tag{81}$$

Из (75) и (80) имеем

$$\left|H_{k_1}(x) + H_{k_2}(x) - f(x)\right| < \eta_{j_0+1}, \quad x \in B_1 \cap B_2 \tag{82}$$

причем, согласно (79) и (73)

$$\left\|H_{k_2}(x)\right\| < Q(\varepsilon_{j_{k_2}}) \cdot \left\|P_{i_{k_2}}\right\| = Q(\varepsilon_{j_0+1}) \left\|P_{i_{k_2}}\right\| < \eta_{j_0} Q(\varepsilon_{j_0+1}) \tag{83}$$

Допустим, что уже выбраны линейные комбинации $H_{k_1}, \dots, H_{k_{\vartheta-1}}$ и множества $B_1, B_2, \dots, B_{\vartheta-1}$ такие, что

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{\vartheta-1} H_{k_i}(x)\right| < \eta_{j_0+\vartheta-2}, \quad x \in \bigcap_{i=1}^{\vartheta-1} B_i \tag{84}$$

где $\mu(B_i) > 1 - 2\varepsilon_{j_0+i-2}$ и

$$\left\|H_{k_i}\right\| < \eta_{j_0+i-2}\, Q(\varepsilon_{j_0+i-1}) \tag{85}$$

Тогда, полагая

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \sum\limits_{i=1}^{\vartheta-1} H_{k_i}(x), & x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\vartheta-1} B_i \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{\vartheta-1} B_i \end{cases} \tag{86}$$

из подпоследовательности $\{P_{i_k}, \varepsilon_{j_k}, \eta_{s_k}\}$ выберем элемент, $\{P_{i_{k_\vartheta}}, \varepsilon_{j_{k_\vartheta}}, \eta_{s_{k_\vartheta}}\}$ такой, что

$$\varepsilon_{j_{k_\vartheta}} = \varepsilon_{j_0+\vartheta-1}, \quad \eta_{s_{k_\vartheta}} = \eta_{j_0+\vartheta-1} \tag{87}$$

$$\left|P_{i_{k_{\vartheta}}}(x) - F(x)\right| < \frac{1}{2}\eta_{j_0+\vartheta-1}, \quad x \in A_{\vartheta} \tag{88}$$

где $\mu(A_{\vartheta}) > 1 - \varepsilon_{j_0+\vartheta-1}$ и

$$\left\|P_{i_{k_{\vartheta}}}(x)\right\| < \eta_{j_0+\vartheta-2} \tag{89}$$

Последнему неравенству (89) можно удовлетворит в силу того, что согласно (84) и (86) $\max|F(x)| < \eta_{j_0+\vartheta-2}$. Тогда, согласно (71), (72) и (88), имеем

$$\left|H_{k_{\vartheta}}(x) - F(x)\right| < \frac{1}{2}\eta_{s_{k_{\vartheta}}} + \frac{1}{2}\eta_{j_0+\vartheta-1} = \eta_{j_0+\vartheta-1}, \quad x \in B_{\vartheta}, \tag{90}$$

где

$$B_{\vartheta} = A_{\vartheta} \cap E_{k_{\vartheta}}, \quad \mu(B_{\vartheta}) > 1 - \varepsilon_{j_0+\vartheta-1} - \varepsilon_{j_{k_{\vartheta}}} = 1 - 2\varepsilon_{j_0+\vartheta-1} \tag{91}$$

Из (86) и (90) следует

$$\left|\sum_{i=1}^{\vartheta} H_{k_i}(x) - f(x)\right| < \eta_{j_0+\vartheta-1}, \quad x \in \bigcap_{i=1}^{\vartheta} B_i \tag{92}$$

При этом, согласно (89) и (73), имеем

$$\left\|H_{k_{\vartheta}}\right\| < Q(\varepsilon_{j_{k_{\vartheta}}}) \cdot \eta_{j_0+\vartheta-2} = \eta_{j_0+\vartheta-2} \cdot Q(\varepsilon_{j_0+\vartheta-1}) \tag{93}$$

Сравнивая (84) и (85) с (92) и (93), мы видим, что построенная выше приведенным способом последовательность линейных комбинаций $H_{k_i}(x)$, $i \geq 1$ обладает тем свойством, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_{k_i}(x) \tag{94}$$

по норме $\|\cdot\|$ сходится (см. (85) и (68)) и при этом сумма ряда (94) совпадает с $f(x)$ на множестве $E = \bigcap B_i$, мера которого больше, чем $1 - \varepsilon$ ((74), (91) и (92)).

Остается заметить, что в линейных комбинациях $H_k(x)$, $k \geq 1$ из которых выбраны $H_{k_i}(x)$, не содержатся как первые $N$ функций, так и бесконечное число других функций системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (69) и (70)). Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА


[1] Талалян А.А.: О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 3, с. 17-34.

[2] Талалян А.А.: Представление измеримых функций рядами. УМН, 1960, т. 15, вып. 5, с. 77-141.

[3] Goffman C. and Waterman D.: Basic sequences in the space of measurable functions, Proc. Amer. Math. Soc. 1960, 11, p. 211-213.


Recenzent: Prof. dr hab. Julian Musielak

Wpłynęło do redakcji: 21.XI.1983 r.


S t r e s z c z e n i e

Mówimy, że układ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcji z X jest zamknięty (w słabym sensie) w przestrzeni X, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdej funkcji $f \in X$ istnieje funkcja $\varphi$ z liniowej otoczki $\{f_n\}$ taka, że

$$\mu(\{x : f(x) = \varphi(x)\}) > 1 - \varepsilon .$$

W pracy bada się to pojęcie dla przypadku $X = C[0,1]$ oraz $X = L_p[0,1]$, $p > 1$.
Główne wyniki głoszę, że jeśli układ $f_n$ jest zamknięty, to po odrzuceniu z niego pierwszych N-elementów, a nawet pewnych nieskończonych podukładów, pozostanie zamknięty.


ON THE APPROXIMATION PROPERTIES OF WEAKLY CLOSED SYSTEMS IN THE METRICS $C(0,1)$ and $L_p(0,1)$


S u m m a r y

A sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ of functions from a space X is said to be weakly closed in X if for every $\varepsilon > 0$ and $f \in X$ there exists $\varphi$ from a finite linear span of $\{f_n\}$ such that

$$\mu(\{x : f(x) = \varphi(x)\}) > 1 - \varepsilon$$

In this paper the case $X = C[0,1]$ and $X = L_p[0,1]$ for $p > 1$ is considered. The main results say that if $\{f_n\}$ is weakly closed, then after dropping out finite elements or even some infinite subsequences it is still weakly closed.